hp 48gII calculadora gráfica

guía del usuario

i n v e n t

Edición 4
Número de parte de HP F2226-90023

Nota

REGISTRO SU PRODUCTO EN : www.register.hp.com

ESTE MANUAL Y CUALQUIER EJEMPLO CONTENIDO AQUÍ SE OFRECEN "TAL COMO ESTÁN" Y ESTÁN SUJETOS A CAMBIOS SIN PREVIO AVISO. LA COMPAÑÍA HEWLETT-PACKARD NO OFRECE GARANTÍAS DE NINGÚN TIPO CON RESPECTO A ESTE MANUAL, INCLUYENDO, PERO NO LIMITÁNDOSE A LAS GARANTÍAS IMPLÍCITAS DE COMERCIALIZACIÓN, SIN INFRINGIMIENTO DE APTITUD DEL PRODUCTO PARA FINES ESPECÍFICOS.

HEWLETT-PACKARD CO. NO SE HARÁ RESPONSABLE DE NINGÚN ERROR O DE DAÑOS INCIDENTALES CONSECUENTES ASOCIADOS A LA PROVISIÓN, FUNCIONAMIENTO O USO DE ESTE MANUAL O A LOS EJEMPLOS AQUÍ CONTENIDOS.

Hewlett-Packard Company
4995 Murphy Canyon Rd,
Suite 301
San Diego,CA 92123

Historial de impresión

Edición 4 Abril de 2004

Prefacio

Usted tiene en sus manos una calculadora que es efectivamente un ordenador (computador, computadora) simbólico y numérico que facilita el cálculo y análisis matemáticos de problemas en una gran variedad de disciplinas, desde matemáticas elementales hasta temas avanzados de ciencia e ingeniería. Aunque designada como una calculadora, debido a su formato compacto que se asemeja a las calculadoras típicas, la calculadora hp 48gII debe considerarse más bien como un ordenador (computador, computadora) manual gráfico y programable.

La calculadora hp 48gII puede operarse en dos modos diferentes, el modo de notación polaca reversa (RPN) y el modo algebraico (ALG) (véase el Capítulo 1 de la guía del usuario para mayores detalles sobre estos modos operativos.) El modo RPN fue originalmente incorporado en las calculadoras para hacer cálculos más eficientes. En este modo, los operandos en una operación (por ejemplo, ' 2 ' y ' 3 ' en la operación ' 2+3 ') se escriben en la pantalla de la calculadora, referida como "la pila" (stack), y después se escribe el operador (por ejemplo, ' + ' en la operación ' 2+3 ') para terminar la operación. El modo ALG, por otra parte, se asemeja a la manera en que uno escribe expresiones aritméticas en el papel. Así, la operación ' 2+3 ', en modo de ALG, será escrita en la calculadora presionando las llaves ' 2 ', ' + ', y ' 3 ', en ese orden. Para terminar la operación utilizamos la tecla ENTER. Los ejemplos de usos de las diversas funciones y operaciones en esta calculadora se ilustran en esta guía del usuario utilizando ambos modos operativos.

La presente guía contiene ejemplos que ilustran el uso de las funciones y operaciones básicas de la calculadora. Los capítulos de esta guía Inicial se organizan en orden de dificultad: comenzando por la selección de los modos de operación de la calculadora, pasando a cálculos con números reales y complejos, operaciones con listas, vectores y matrices, gráficas, aplicaciones en el cálculo diferencial e integral, análisis vectorial, ecuaciones diferenciales, probabilidad, y estadística.

Para ejecutar operaciones simbólicas la calculadora incluye un poderoso Sistema Algebraico Computacional (Computer Algebraic System, o CAS), que permite seleccionar diferentes modos de operación, por ejemplo, números complejos vs. números reales, o modo exacto (simbólico) vs. Modo aproximado (numérico.) La pantalla puede ajustarse para presentar los resultados en notación matemática, lo que puede ser útil cuando se trabaja con matrices, vectores, fracciones, sumatorias, derivadas, e integrales. Las gráficas de alta velocidad de la calculadora son convenientes para producir figuras complejas en un tiempo mínimo.

A través de la conexión infrarroja y el cable RS 232 disponible con la calculadora, Usted puede conectar su calculadora a otras calculadoras u ordenadores (computadores, computadoras.) La conexión de alta velocidad a través de la conexión infrarroja o del cable RS 232 permite un rápido y eficiente intercambio de datos con otras calculadoras y ordenadores (computadores, computadoras.) La calculadora provee un puerto de tarjetas de memoria "flash" para facilitar el almacenamiento e intercambio de datos con otros usuarios.

La capacidad de programación de la calculadora permite al usuario desarrollar programas eficientes para propósitos específicos. Ya sean para aplicaciones matemáticas avanzadas, solución a problemas específicos, o colección de datos, los lenguajes de programación disponibles en la calculadora la convierten en un equipo computacional muy versátil.

Esperamos que su calculadora sea una compañera inseparable para Usted en sus actividades escolares y profesionales.

Índice de Materias

Apéndices

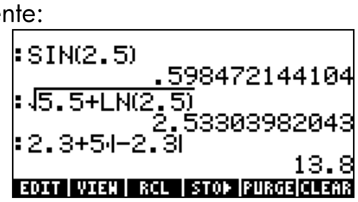
Advertencia sobre las pantallas en esta guía

Una pantalla en la guía (o retrato de la pantalla, para ser más precisos) es una representación de la pantalla de la calculadora. Por ejemplo, la primera vez que la calculadora se enciende mostrará la pantalla siguiente (las pantallas de la calculadora se demuestran con borde grueso en esta sección):

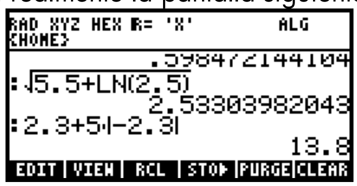
Las dos líneas superiores representan el encabezado de la pantalla y el área restante en la pantalla se utiliza para mostrar resultados.

La mayoría de las pantallas en esta guía fueron generados usando un programa emulador (un programa que simula la operación de la calculadora en un ordenador o computadora), y, por lo tanto, no se muestran en ellas las líneas del encabezado de la pantalla. En su lugar, se mostrará un área de salida adicional de pantalla en la localización de las líneas del encabezado, como se muestra a continuación:

Esta área de salida adicional de la pantalla, mostrada en muchas de las pantallas en esta guía, no se mostrará cuando usted intenta los ejemplo de la guía en su calculadora. Así, mientras que en la guía usted puede ver una pantalla como la siguiente:

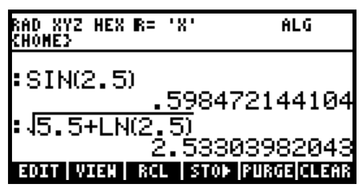


la calculadora mostrará realmente la pantalla siguiente:



Note que las líneas del encabezado cubren las primeras línea y media de la salida en la pantalla de la calculadora. Sin embargo, las líneas de la salida no visibles todavía están accesibles al usuario. Usted puede tener acceso a esas líneas en su calculadora presionando la tecla direccional vertical (▲), la cuál permitirá que usted deslice la pantalla hacia abajo.

También, cuando usted realiza las tres operaciones enumeradas en la pantalla, en el orden mostrado, su pantalla las mostrará ocupando los niveles más altos de la misma como se muestra a continuación:



Las teclas requeridas para completar estos ejercicios son los siguientes:

[SIN] [2] [.] [5] [ENTER]

[√x] [←] () [5] [.] [5] [+] [→] LN [2] [.] [5] [ENTER]

La operación siguiente,

[2] [.] [3] [+] [5] [×] [←] ABS [+/-] [2] [.] [3] [ENTER]

forzará las líneas que corresponden a la operación SIN(2.5) a moverse hacia arriba y ser ocultadas por las líneas del encabezado.
Muchas pantallas en esta guía también se han modificado para mostrar solamente la operación de interés. Por ejemplo, la pantalla para la operación

SIN(2.5), mostrada anteriormente, puede ser simplificada en esta guía para lucir de esta manera:

Estas simplificaciones de las pantallas se orientan a economizar espacio de impresión en la guía.

Tenga en cuenta las diferencias entre las pantallas de la guía y las pantallas correspondientes en la calculadora, y usted no tendrá ningún problema en reproducir los ejercicios en esta guía.

Capítulo 1
Preliminares

El presente capítulo está destinado a proveer la información básica sobre la operación de la calculadora. Los ejercicios que se presentan a continuación permiten al usuario familiarizarse con las operaciones básicas y la selección de los modos de operación de la calculadora.

Operaciones Básicas

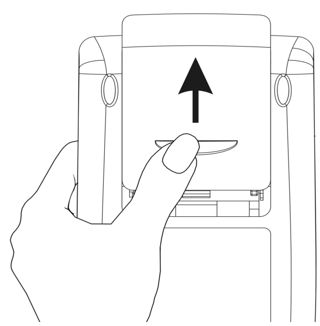
Los ejercicios siguientes tienen el propósito de describir la calculadora misma.

Baterías

La calculadora utiliza 3 baterías AAA (LR03) como fuente de alimentación principal y una batería de litio CR2032 para copia de seguridad de la memoria.
Antes de utilizar la calculadora, instale las baterías siguiendo el procedimiento que se describe a continuación.

Para instalar las baterías principales

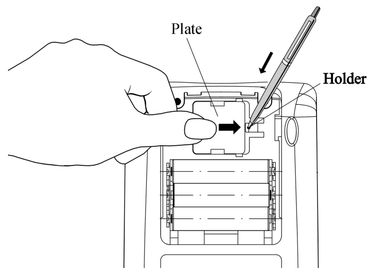
a. **Compruebe que la calculadora esté apagada.** Deslice la tapa del compartimento de las baterías hacia arriba tal y como se indica la figura.



b. Inserte 3 baterías AAA (LR03) nuevas en el compartimento principal. Asegúrese de que cada batería se inserta en la dirección indicada.

Para instalar las baterías de seguridad

a. **Compruebe que la calculadora esté apagada.** Presione el elemento de sujeción hacia abajo. Empuje la placa en la dirección mostrada y levántela.



b. Inserte una nueva batería de litio CR2032. Asegúrese de que el polo positivo (+) mira hacia arriba.
c. Vuelva a colocar la placa y acóplela en su ubicación original.

Después de instalar las baterías, presione [ON] para activar la alimentación.

Advertencia: cuando el icono de batería baja aparezca en la pantalla, reemplace las baterías cuanto antes. No obstante, intente no retirar la batería de seguridad y las baterías principales al mismo tiempo para evitar la pérdida de datos.

Encendido y apagado de la calculadora

La tecla **$** se localiza en la esquina inferior izquierda del teclado. Pulse esta tecla para encender la calculadora. Para apagar la calculadora, pulse la tecla roja **@** (primera tecla en la segunda fila contada de la parte inferior del teclado), seguida de la tecla **$** . La tecla **$** tiene un rótulo rojo indicando OFF (apagar) en la esquina superior derecha para recalcar la operación de apagar la calculadora.

Ajustando el contraste de la pantalla

Uno puede ajustar el contraste de la pantalla al mantener presionada la tecla **$** mientras pulsa la tecla **+** ó **-** simultáneamente. La combinación **$** (mantener) **+** produce <u>una pantalla más oscura</u>. La combinación **$** (mantener) **-** produce <u>una pantalla más clara</u>.

Contenidos de la pantalla

Encienda la calculadora una vez más. La pantalla mostrará lo siguiente:

En la parte superior de la pantalla usted tendrá dos líneas de información que describan las opciones de la calculadora. La primera línea muestra los caracteres: RAD XYZ HEX R= 'X'

Los detalles de estas especificaciones se muestran en el Capítulo 2 de esta Guía. La segunda línea muestra los caracteres: { HOME } que indican que el directorio HOME es el directorio activo para almacenar archivos en la memoria de la calculadora. En el capítulo 2 usted aprenderá que usted puede almacenar datos en su calculadora en archivos o variables. Las variables se pueden organizar en directorios y sub-directorios. Eventualmente, usted puede crear un diagrama o árbol directorios, similar a aquellos en el disco de una computadora. Uno puede navegar a través de los directorios para seleccionar cualquier directorio de interés. A medida que usted navega a través de los directorios la segunda línea de la pantalla cambiará reflejando directorios y subdirectorios en la memoria.
Al pié de la pantalla se encuentran varios rótulos, a saber, EDIT VIEW RCL STO PURGE CLEAR, que están asociados con las seis *teclas de menú*, F1 a F6: F1 F2 F3 F4 F5 F6 .

Los seis rótulos en la parte inferior de la pantalla cambian dependiendo del menú activo. Sin embargo, la tecla F1 siempre se asocia con el primer rótulo, la tecla F2 se asocia con el segundo rótulo, y así sucesivamente.

Menús

Los seis rótulos asociados con las teclas F1 a F6 forman parte de un menú de funciones de la calculadora. Dado que la calculadora solamente tiene seis teclas de menú, solo se muestran seis rótulos a la vez. Sin embargo, el menú puede tener más de seis opciones. Cada grupo de 6 opciones se conoce como una Página de Menú. Para mostrar la siguiente página de menú (si existe), presiónese la tecla NXT (NeXT, es decir, el siguiente menú). Esta tecla se localiza en la tercera columna y la tercera fila del teclado.

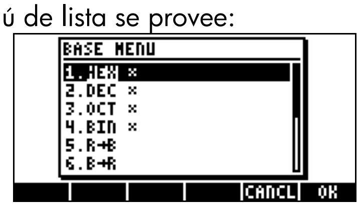
Presionar NXT una vez más para volver al menú TOOL, o presionar la tecla TOOL (tercera tecla en la segunda fila del teclado).

El menú TOOL se describe en la sección siguiente. A este punto ilustraremos algunas características de los menús que usted encontrará útiles al usar su calculadora.

Menú de teclas (SOFT menus) vs. menú de listas (CHOOSE boxes)

Los menús de teclas (SOFT menu) asocian las etiquetas en la parte inferior de la pantalla con las seis teclas en la primera fila del teclado. Presionando la tecla apropiada del menú, la función en la etiqueta asociada se activará. Por ejemplo, con el menú TOOL activo, el presionar la tecla CLEAR (F6) se activa la función CLEAR, la cuál borra el contenido de la pantalla. Para ver esta función en acción, escriba un número, por ejemplo, 1 2 3 ENTER, y presione la tecla F6 .

Los menús de teclas se utilizan típicamente para seleccionar entre de un número de funciones relacionadas. Sin embargo, los menús de teclas no son la única manera de acceder a las funciones en la calculadora. La manera alternativa será referida como menús de listas (CHOOSE boxes). Para ver un ejemplo de un menú de listas, actívese el menú TOOL (presione TOOL), y entonces presione la combinación de teclas ↱ BASE (asociada con la tecla 3). El siguiente menú de lista se provee:



Esta acción genera un menú de lista y proporciona una lista de funciones numeradas, a partir de 1. HEX x a 6. B→R. Esta pantalla constituirá la primera página del menú mostrando seis funciones. Usted puede navegar a través del menú usando las teclas verticales, ▲▼, localizadas en el lado derecho superior del teclado, debajo de F5 y F6 . Para activar cualquier función dada, primero, selecciónese el nombre de la función las teclas verticales, ▲▼, o presionando el número que corresponde a la función en la lista. Después de que se seleccione el nombre de la función, presione la tecla OK (F6). Así, si usted desea utilizar la función R→B (real a binario), presione 6 F6.

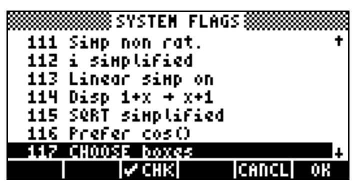
Si usted desea trasladarse al comienzo de la página actual del menú en una lista, utilice ← ▲. Para moverse al final de la página actual, utilice ← ▼. Para moverse al comienzo del menú, utilice → ▲. Para moverse al final del menú, utilice → ▼.

Selección de SOFT menus o CHOOSE boxes

Usted puede seleccionar el formato en el cual sus menús serán exhibidos cambiando las banderas o señales del sistema de la calculadora (la bandera o señal del sistema es una variable de la calculadora que controla cierta operación o modo de la calculadora. Para más información sobre banderas, ver el capítulo 24). La bandera 117 del sistema se puede fijar para producir ya sea un menú de teclas (SOFT menu) o un menú de listas (CHOOSE boxes). Para tener acceso a esta bandera:

MODE FLAGS ▲ ← ▲ ▼

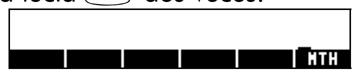
Su calculadora mostrará la pantalla siguiente, destacando la línea comenzando con el número 117:



La línea destacada (117 CHOOSE boxes) indica que los menús de listas son la opción actual para mostrar menús. Si usted prefiere utilizar menú de teclas, presione ✓CHK (F3), seguida de OK (F6). Presione OK (F6) una vez más, para volver a la pantalla normal de la calculadora.

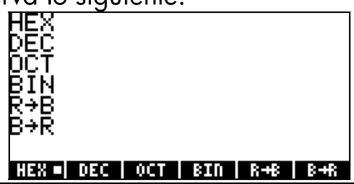
Si Ud. presiona → BASE, en vez del menú de lista que se mostró anteriormente, la pantalla ahora mostrará seis etiquetas del menú como la primera página de un menú:

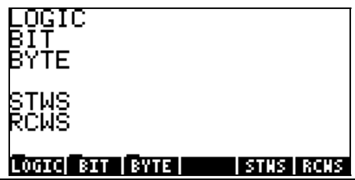
Para navegar las funciones de este menú presione la tecla NXT para acceder la página siguiente, o ← PREV (asociada con la tecla NXT) para moverse a la página anterior. Las figuras siguientes demuestran las diversas páginas del menú BASE obtenidas al presionar la tecla NXT dos veces:



Al presionar la tecla NXT una vez más, se retorna a la primera página del menú.

Nota: Con la opción SOFT menus fijada para la bandera 117 del sistema, la combinación → (mantener) ▼, mostrará una lista de las funciones en el menú actual. Por ejemplo, para las dos primeras páginas en el menú BASE, se observa lo siguiente:





Para elegir la opción CHOOSE boxes, use:

MODE FLAGS ▲ ← ▲ ▼ ✓CHK OK OK.

Notas:

1. El menú TOOL, obtenido al presionar TOOL, siempre produce un menú de teclas (SOFT menu).
2. La mayoría de los ejemplos en este manual de usuario se demuestran usando ambas opciones: SOFT menus y CHOOSE boxes. Los programas en los Capítulos 21 y 22 usan exclusivamente menús de teclas.
3. Información adicional sobre menús de teclas y menús de listas se presentan en el Capítulo 2 de esta Guía.

El menú de herramientas (TOOL)

El menú activo a este momento, conocido como el menú de herramientas (TOOL), está asociado con operaciones relacionadas a la manipulación de variables (véase la sección sobre variables in este Capítulo). Las diferentes funciones del menú de herramientas son las siguientes:

EDIT F1 EDITar el contenido de una variable (para información adicional, véase el Capítulo 2 en esta Guía y el Capítulo 2 y el Apéndice L en la Guía del Usuario)
VIEW F2 Observar (VIEW) el contenido de una variable
RCL F3 Recobrar (ReCaLl) el contenido de una variable
STO F4 Almacenar (STOre) el contenido de una variable
PURGE F5 Eliminar o borrar (PURGE) una variable
CLEAR F6 Limpiar (CLEAR) la pantalla

Estas seis funciones forman la primera página del menú de herramientas (TOOL). Este menú tiene actualmente ocho opciones organizadas en dos páginas. La segunda página se obtiene al presionar la tecla NXT.

En la segunda página del menú solamente las dos primeras teclas de menú tienen funciones asociadas. Estas funciones son:

CASCM F1 CASCMD: CAS CoMmanD, se utiliza para modificar el CAS (Computer Algebraic System, o Sistema Algebraico Computacional)
HELP F2 HELP, menú informativo que describe las funciones disponibles en la calculadora

Al presionar la tecla NXT nuevamente, se obtiene el menú de herramientas (TOOL) original. Otra forma de recuperar el menú de herramientas (TOOL) es al presionar la tecla TOOL (tercera columna y segunda fila en el teclado).

Fijar hora y fecha

La calculadora tiene un reloj en tiempo real interno. Este reloj se puede exhibir en la pantalla y utilizar continuamente para programar alarmas así como en programas. Esta sección demostrará no solamente cómo fijar hora y la fecha, pero también los fundamentos de usar menús de listas (CHOOSE boxes) y los datos que entran en una forma interactiva (dialog box).

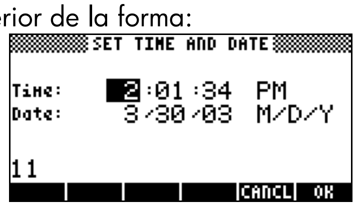
Para fijar hora y para fechar utilizamos el menú de lista TIME que es una función alternativa de la tecla 9. Al combinar la tecla ↱ con la tecla

9 se activa el menú TIME. Esta operación se puede también representarse como ‿ TIME . El menú TIME se muestra a continuación:

Según lo indicado arriba, el menú TIME proporciona cuatro diversas opciones, numeradas 1 a 4. De interés para nosotros a este punto es la opción *3. Set time, date...* Usando la tecla vertical, ▼, destaque esta opción y presione OK (F6). Como consecuencia, se muestra la siguiente forma interactiva (*input form* , véase el Apéndice A) para ajustar tiempo y fecha:

Fijar la hora del día

Usando las teclas numéricas, 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 , comenzamos ajustando la hora del día. Suponga que cambiamos la hora a 11, presionando 1 1 en la línea *Time* de la forma interactiva denominada SET TIME AND DATE. Esto produce el número 11 que se escribe en la línea superior de la forma:



Presione OK F6 para efectuar el cambio en la hora. El valor de 11 ahora se muestra en la posición de la hora, y la posición de los minutos se seleccionan automáticamente:

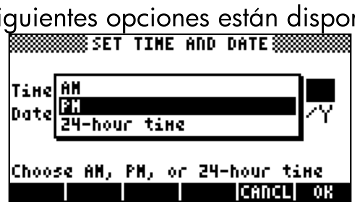
Cambiemos los minutos a 25, presionando: 2 5 OK . La posición de los segundos ha sido seleccionada. Suponga que usted desean cambiar el campo de los segundos a 45, utilice: 4 5 OK

La localidad del formato del tiempo ha sido seleccionada. Para cambiar esta opción utilice +/- (la segunda tecla de la izquierda en la quinto fila de teclas del fondo del teclado), o presione la tecla CHOOS (F2).

- Si se utiliza la tecla +/-, el ajuste en la localidad del formato del tiempo cambiará a cualquiera de las opciones siguientes:
    - o AM : indica que el tiempo exhibido es AM
    - o PM : indica que el tiempo exhibido es tiempo P.M.
    - o 24-hr : indica que ése el tiempo exhibido utiliza el formato de 24 horas, por ejemplo, 18:00 representa los 6pm

  La opción seleccionada por último se convertirá en la opción del sistema para el formato del tiempo usando este procedimiento.

- Si se usa CHOOS, las siguientes opciones están disponibles.

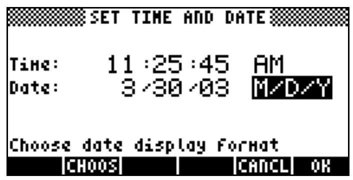


  Utilice las teclas direccionales verticales ▲ ▼ para seleccionar entre las opciones (AM, PM, 24-hour time). Presione OK F6 para efectuar la selección.

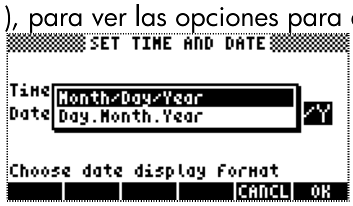
Fijar la fecha

Después de fijar la opción del formato del tiempo, la forma interactiva denominada SET TIME AND DATE luce como se muestra a continuación:

Para fijar la fecha, primero hay que fijar el formato de fecha. El formato pre-selecto es M/D/Y (mes/día/año). Para modificar este formato, presiónese la tecla vertical inferior. Esto destacará el formato de fecha según lo demostrado a continuación:



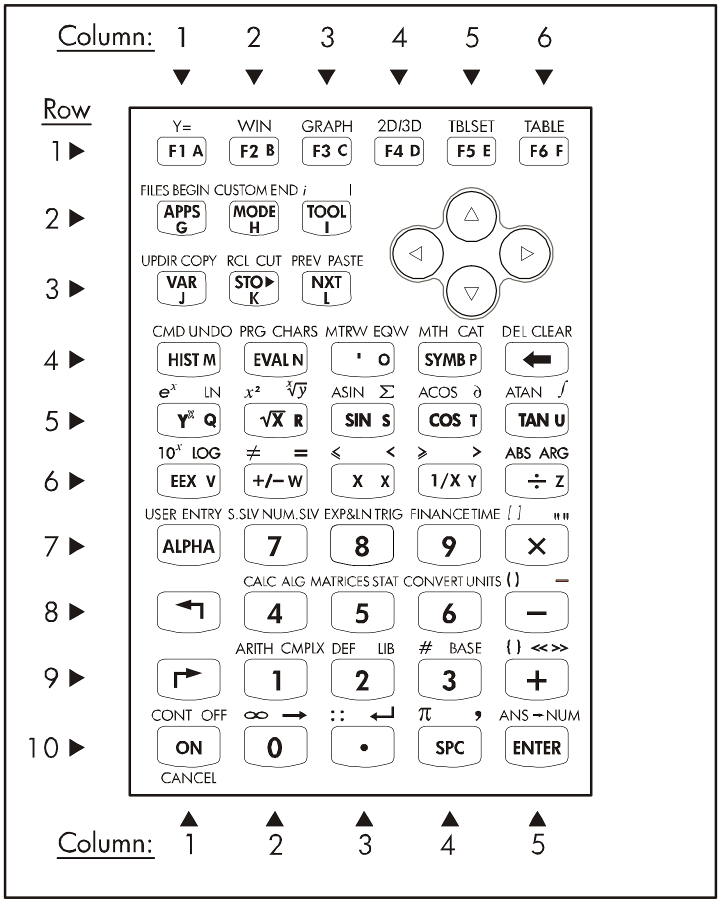
Use la tecla CHOOS (F2), para ver las opciones para el formato de fecha:



Seleccione su opción usando las teclas direccionales verticales ▲ ▼, y presione OK F6 para efectuar la selección.

Introducción al teclado de la calculadora

La figura siguiente muestra un diagrama del teclado de la calculadora enumerando sus filas y columnas.



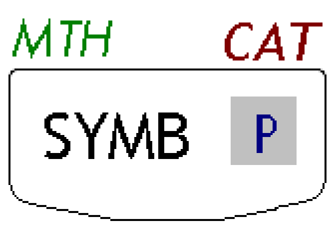
La figura demuestra 10 filas de las teclas combinadas con 3, 5, o 6 columnas. La fila 1 tiene 6 teclas, las filas 2 y 3 tienen 3 teclas cada uno, y las filas 4 a 10 tienen 5 teclas cada uno. Hay 4 teclas de flecha situadas en el lado derecho del teclado en el espacio ocupado por las filas 2 y 3.

Cada tecla tiene tres, cuatro, o cinco funciones asociadas. La función principal de una tecla corresponde al rótulo más prominente en la tecla. La tecla verde de cambio izquierdo, tecla (9,1), la tecla roja de cambio derecho, tecla (9,1), y la tecla azul alfa (ALPHA), tecla (7,1), pueden combinarse con otras teclas para activar las funciones alternas que se muestran en el teclado.

Por ejemplo, la tecla SYMB, *tecla(4,4)*, tiene las siguientes seis funciones asociadas:

SYMB	Función principal, para activar el menú de operaciones simbólicas
← MTH	Función de cambio izquierdo, activa el menú de matemáticas (MTH)
→ CAT	Función de cambio derecho, activa el CATálogo de funciones
ALPHA P	Función ALPHA, para escribir la letra P mayúscula
ALPHA ← P	Función ALPHA-cambio izquierdo, escribe la letra p minúscula
ALPHA → P	Función ALPHA-cambio derecho, escribe el símbolo π

De las seis funciones asociadas con una tecla, solamente las cuatro primeras se muestran en el teclado mismo. La figure siguiente muestra estas cuatro funciones para la tecla SYMB. Nótese que el color y la posición de los rótulos de las funciones en la tecla, a saber, **SYMB**, *MTH*, *CAT* y **P**, indican cual es la función principal (**SYMB**), y cual de las otras tres funciones se asocian con la tecla de cambio izquierdo ← (*MTH*), con la tecla de cambio derecho → (*CAT*), y con la tecla ALPHA (**P**).

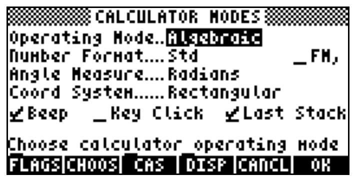


Para información adicional sobre la operación del teclado de la calculadora, refiérase al Apéndice B en la Guía del Usuario.

Cambiando los modos de operación

Esta sección asume que el usuario se ha familiarizado con el uso de los menús y las formas interactivas de entradas de datos (si éste no es el caso, refiérase al Apéndice A en la Guía del Usuario).

Presione la tecla MODE (segunda fila y segunda columna del teclado) para activar la forma interactiva denominada *CALCULATOR MODES*:



Presione la tecla OK F6 para recuperar la pantalla normal. Ejemplos de los diferentes modos de operación se muestran a continuación.

Modo operativo

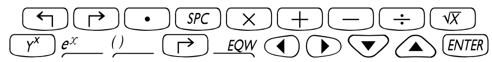
La calculadora presenta dos modos de operación: el *modo Algebraico*, y el modo de *Notación Polaca Reversa* (*Reverse Polish Notation*, *RPN*). Si bien el modo Algebraico es el modo predefinido de operación (como se indica en la figure anterior), usuarios con experiencia en previos modelos de las calculadoras HP podrían preferir el modo RPN.

Para seleccionar el modo operativo, actívese la forma interactiva titulada CALCULATOR MODES presionando la tecla MODE. La opción *Operating Mode* (Modo Operativo) es seleccionada automáticamente. Selecciónese el modo operativo Algebraico o RPN usando, ya sea, la tecla +/- (segunda columna y quinta fila en el teclado), o la tecla CHOOS (escoger, F2). Si se usa el procedimiento ultimo, úsense las teclas direccionales verticales, ▲ ▼, para seleccionar el modo operativo, y presiónese la tecla OK para completar la operación.

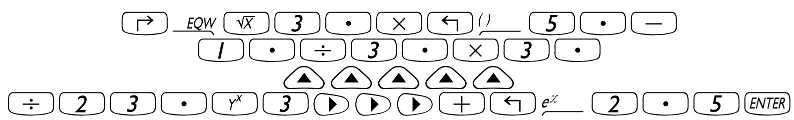
Para ilustrar la diferencia entre los dos modos operativos, a continuación procedemos a calcular la siguiente expresión en los dos modos operativos:

$$\sqrt{\frac{3.0 \cdot \left(5.0 - \frac{1}{3.0 \cdot 3.0}\right)}{23.0^3} + e^{2.5}}$$

Para escribir esta expresión, usaremos el escritor de ecuaciones (*equation writer*), EQW. Antes de continuar, le invitamos a identificar las siguientes teclas, además de las teclas numéricas:



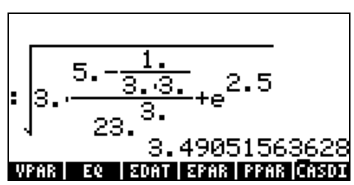
El escritor de ecuaciones representa un ambiente en el que uno puede construir expresiones matemáticas usando notación matemática explícita incluyendo fracciones, derivadas, integrales, raíces, etc. Para escribir la expresión antes mencionada en el escritor de ecuaciones, utilícense la secuencia de teclas siguiente:



Después de presionar la tecla ENTER la pantalla muestra la siguiente expresión:

```
√(3.*(5.-1/(3.*3.))/(23.^3+EXP(2.5))
```

Al presionar la tecla ENTER una vez más produce el siguiente resultado (acepte el cambio a modo Approx., de ser necesario, presionando la tecla OK):



Uno puede escribir la expresión directamente en la pantalla sin usar el escritor de ecuaciones, como se muestra a continuación:

[√x] [←] [( )] [3] [•] [×] [←] [( )] [5] [•] [−]
[/] [÷] [3] [•] [×] [3] [•] [▶]
[÷] [2] [3] [•] [y^x] [3] [+] [←] [e^x] [2] [•] [5] [ENTER]

Cámbiese el modo operativo a RPN comenzando al presionar la tecla [MODE]. Selecciónese el modo operativo *RPN* utilizando ya sea la tecla [+/-], o la tecla CHOOS del menú. Presiónese la tecla OK [F6] del menú para completar la operación. La pantalla en el modo operativo RPN se muestra a continuación:

Nótese que la pantalla muestra varios niveles identificados por los números 1, 2, 3, etc. Esta pantalla se denomina la pila (*stack*) de la calculadora. Los diferentes niveles se denominan los niveles de la pila, es decir, nivel 1, nivel 2, etc.

Básicamente, en el modo operativo RPN en vez de escribir la operación 3 + 2 de esta forma:

[3] [+] [2] [ENTER]

se escriben primero los operandos, en el orden apropiado, seguidos del operador, por ejemplo,

[3] [ENTER] [2] [ENTER] [+]

A medida que se escriben los operandos, éstos pasan a ocupar diferentes niveles en la pila. Al escribirse, por ejemplo, [3] [ENTER], el número 3 aparece en el nivel 1. A continuación, escríbase [2] [ENTER] para promover el número 3 al nivel 2. Finalmente, al presionar [+], se indica a la calculador que aplique el operador, o programa, [+] a los objetos que ocupan los niveles 1 y 2. El resultado, es este caso 5, aparece en el nivel 1.

Calcúlense las siguientes operaciones antes de intentar las operaciones presentadas anteriormente usando el sistema operativo algebraico:

123/32	1 2 3 ENTER 3 2 ÷
4^2	4 ENTER 2 y^x
$^3\sqrt{27}$	2 7 ENTER $\sqrt{x}$ 3 ↱ $\sqrt[x]{y}$

Obsérvese la posición de la y y de la x en las dos operaciones últimas. La base en la operación exponencial es y (nivel 2), mientras que el exponente es x (nivel 1) antes de presionarse la tecla y^x. De manera similar, en la operación de la raíz cúbica, y (nivel 2) es la cantidad bajo el signo radical, y x (nivel 1) es la raíz.

Ejecútese el siguiente ejercicio involucrando 3 factores: $(5 + 3) \times 2$

5 ENTER 3 ENTER +	Calcúlese (5 +3) primero.
2 ×	Complétese la operación.

Calcúlese la expresión propuesta anteriormente:

$$\sqrt{\frac{3 \cdot \left(5 - \frac{1}{3 \cdot 3}\right)}{23^3} + e^{2.5}}$$

3 ENTER	Escríbase 3 en el nivel1
5 ENTER	Escríbase 5 en el nivel1, 3 pasa al nivel 2
3 ENTER	Escríbase 3 en el nivel1, 5 pasa al nivel 2, 3 pasa al nivel 3
3 ×	Escríbase 3 y ejecútese la multiplicación, 9 se muestra en el nivel1
1/x	1/(3×3), último valor en nivel 1; 5 en el nivel2; 3 en el nivel3
−	5 - 1/(3×3) , ocupa el nivel 1; 3 en el nivel2
×	3× (5 - 1/(3×3)), ocupa el nivel 1
2 3 ENTER	Escríbase 23 en el nivel1, 14.6666 pasa al nivel 2.

3 y^x	Escríbase 3, calcúlese 23^3 en nivel 1. 14.666 en nivel 2.
÷	(3× (5-1/(3×3)))/23^3 en nivel 1
2 . 5	Escríbase 2.5 en el nivel 1
↰ e^x	$e^{2.5}$, pasa al nivel 1, nivel 2 muestra el valor anterior
+	(3× (5 - 1/(3×3)))/23^3 + $e^{2.5}$ = 12.18369, en nivel 1
√x	√((3× (5 - 1/(3×3)))/23^3 + $e^{2.5}$) = 3.49…, en nivel 1.

Para seleccionar modo operativo ALG vs. RPN, uno puede activar / desactivar la señal de sistema número 95 utilizando las siguientes teclas:

MODE FLAGS ▲ ↰ ▲ ↰ ▲ ↰ ▲ ✓CHK

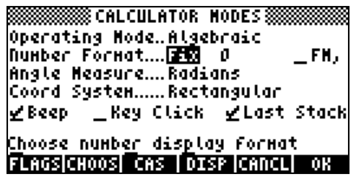
Formato de los números y punto o coma decimal

Al cambiar el formato de los números permite mostrar resultados en diferentes formas. Esta opción es muy útil en operaciones que involucran potencias de diez o si se quiere limitar el número de cifras decimales en los resultados.

Para seleccionar el formato de los números, actívese primero la forma interactiva denominada CALCULATOR MODES al presionar la tecla MODE. Utilícese entonces la tecla direccional vertical, ▼, para seleccionar la opción *Number format*. El valor preseleccionado es *Std*, o formato estándar. En este formato, la calculadora mostrará números reales con la máxima precisión disponible (12 cifras significativas). Para mayor información sobre números reales en la calculadora véase el Capítulo 2 en esta Guía. Ejemplos que utilizan el formato estándar y otros formatos se muestran a continuación:

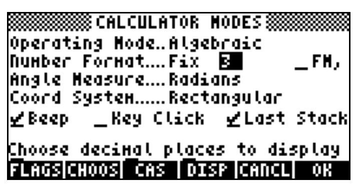
- **Formato Estándar**:
  Este modo es el más utilizado dado que muestra los números en su notación mas común. Presiónese la tecla de menú OK, con la opción *Number format* mostrando el valor *Std*, para recobrar la pantalla normal. Escríbase el número 123.4567890123456 (con16 cifras significativas). Presiónese la tecla ENTER. El número se redondea al máximo de 12 cifras significativas, y se muestra de la siguiente manera:

- **Formato con número de decimales fijo:**
  Presiónese la tecla MODE, y utilícese la tecla direccional vertical, ▼, para seleccionar la opción *Number format*. Presiónese la tecla de menú CHOOS (F2), y selecciónese la opción *Fixed* utilizando la tecla ▼.



Presiónese la tecla direccional horizontal, ▶, y selecciónese el cero enfrente de la opción *Fix*. Presiónese la tecla de menú CHOOS y selecciónese el valor 3 (como ejemplo), utilizando las teclas direccionales verticales, ▲▼.

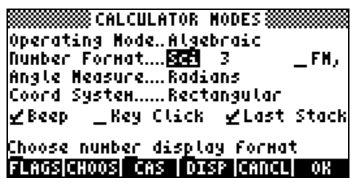
Presiónese la tecla de menú OK para completar la selección:



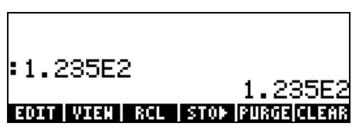
Presiónese la tecla de menú OK para recobrar la pantalla normal. El número que se utilizó anteriormente se muestra ahora como:

Nótese que la parte decimal es redondeada, y no truncada. Por ejemplo, con este formato, el número 123.4567890123456 se muestra como 123.457, y no como 123.456. Esto se debe a que el tercer decimal, 6 es > 5).

- **Formato científico**
  Para seleccionar este formato, presiónese primero la tecla MODE. A continuación, utilícese la tecla direccional vertical, ▼, para seleccionar la opción *Number format*. Presiónese la tecla CHOOS (F2), y selecciónese la opción *Scientific* utilizando la tecla ▼. Manténgase el número 3 enfrente de *Sci*. (Este número puede cambiarse de la misma manera en que se cambió la opción *Fixed* en el ejemplo anterior).

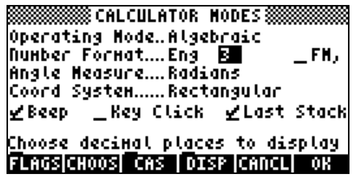


Presiónese la tecla OK para recobrar la pantalla normal. El número utilizado anteriormente se muestra ahora de la forma siguiente:



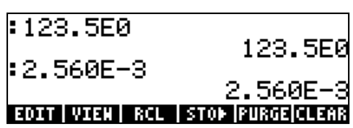
Este resultado, 1.23E2, es la versión de la notación de potencias de diez, es decir 1.235×10^2, proveída por la calculadora. En este formato científico, el número *3* enfrente de la opción *Sci* representa el número de cifras significativas que siguen al punto decimal. La notación científica siempre incluye una cifra entera como se mostró anteriormente. En este ejemplo, por lo tanto, el número de cifras significativas es cuatro.

- **Formato de ingeniería**
  El formato de ingeniería (engineering format) es muy similar al científico, excepto que el exponente en la potencia de diez es un múltiplo de 3. Para seleccionar este formato, presiónese primero la tecla MODE, y utilícese la tecla direccional, ▼, para seleccionar la opción *Number format*. Presiónese la tecla CHOOS (F2), y selecciónese la opción *Engineering* con la tecla ▼. Manténgase el número 3 delante de la opción *Eng*. (Este número puede cambiarse de la misma manera en que se cambió para la opción *Fix* del formato de número).



  Presiónese la tecla OK para recuperar la pantalla normal. El número utilizado en los ejemplos anteriores se muestra ahora de la siguiente manera:

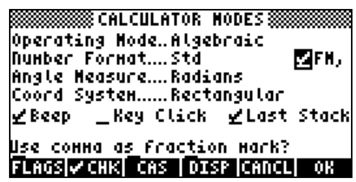
  Dado que este número posee tres cifras en la parte decimal, se muestra con cuatro cifras significativas y un exponente de cero cuando se utiliza el formato de ingeniería. Por ejemplo, el número 0.00256 se muestra como:



- **Coma vs. Punto decimales**
  Puntos decimales en números reales pueden re-emplazarse con comas, si el usuario está acostumbrado a esa notación. Para re-emplazar los puntos decimales con comas, cámbiese la opción *FM* en la forma interactiva denominada CALCULATOR MODES como se muestra a

continuación (Nótese que hemos cambiado el formato de números a estándar, *Std*):

- Presiónese primero la tecla MODE. Después, presiónese la tecla direccional vertical, ▼, una vez, y la tecla direccional horizontal, ▶, dos veces, para seleccionar la opción *__FM,*. Para seleccionar comas, presiónese la tecla de menú ✓CHK (F2). La forma interactiva lucirá como se muestra a continuación:



- Presiónese la tecla de menú OK para recobrar la pantalla normal. Por ejemplo, el número 123.456789012, utilizado anteriormente, se mostrará de la forma siguiente utilizando comas:

Medidas angulares

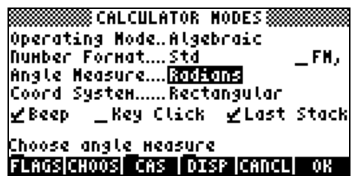
Las funciones trigonométricas, por ejemplo, requieren argumentos que representan ángulos en el plano. La calculadora provee tres modos diferentes de medidas angulares, a saber:

- *Grados (Degrees)*: Existen *360* grados (*360°*) en un círculo.
- *Radianes*: Existen 2π radianes ($2\pi^{r}$) en un círculo.
- *Grados decimales (Grades)*: Existen *400* grades (400^{g}) en un círculo.

Las medidas angulares afectan los resultados de funciones tales como seno(SIN), COS, TAN y funciones asociadas.

Para seleccionar las medidas angulares utilícese el procedimiento siguiente:

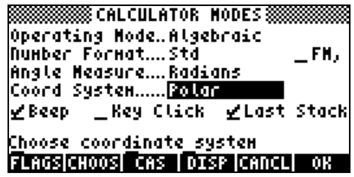
- Presiónese primero la tecla MODE. A continuación, utilícese la tecla ▼, dos veces. Selecciónese la opción *Angle Measure* utilizando ya sea la tecla +/- (segunda columna en la quinta fila contando de abajo hacia arriba), o la tecla de menú CHOOS (F2). Si se utiliza la última opción, utilícense las teclas direccionales verticales, ▲ ▼, para seleccionar la medida angular, y presiónese la tecla OK F6 para completar la operación. Por ejemplo, en la siguiente pantalla, se selecciona Radianes como la medida angular:



Sistema de coordenadas

La selección del sistema de coordenadas afecta la forma en se escriben y se muestran vectores y números complejos. Para mayor información sobre números complejos y vectores, véanse los Capítulos 4 y 8, respectivamente, en esta Guía. Existen tres sistemas de coordenadas en la calculadora: Rectangulares (RECT), Cilíndricas (CYLIN), y Esféricas (SPHERE). Para seleccionar el sistema de coordenadas utilícese el procedimiento siguiente:

- Presiónese primero la tecla MODE. A continuación, utilícese la tecla direccional vertical, ▼, tres veces. Una vez seleccionada la opción *Coord System*, selecciónese la medida angular utilizando la tecla +/-, o la tecla CHOOS (F2). Si se sigue la última opción, utilícense las teclas direccionales verticales, ▲ ▼, para seleccionar el sistema de coordenadas, y presiónese la tecla OK F6 para completar la operación. Por ejemplo, en la siguiente pantalla se seleccionan coordenadas polares:



Señal sonora, sonido de tecla, y última escritura

La línea pasada de la forma de la entrada de la forma CALCULATOR MODES incluye las opciones:

_Beep _Key Click _Last Stack

Al colocar la marca de aprobado al lado de cada uno de estas opciones, la opción correspondiente es activada. Estas opciones se describen a continuación:

_Beep : (señal sonora) Cuando está seleccionado, la señal sonora de la calculadora está activa. Esta operación se aplica principalmente a los mensajes de error, pero también a algunas funciones del usuario como BEEP.

_Key Click : (sonido de tecla) Cuando está seleccionado, cada tecla, al presionarse, produce un sonido "clic"

_Last Stack: Guarda el contenido de la escritura más reciente en la pantalla para usarse con las funciones UNDO y ANS (ver el capítulo 2).

La opción *_Beep* puede ser útil para aconsejar al usuario sobre errores. Usted puede desconectar esta opción si usa su calculadora en una sala de clase o una biblioteca.
La opción *_Key Click* puede ser útil como manera audible de comprobar que cada tecla operó según lo previsto.
La opción *_Last Stack* es muy útil para recuperar la operación pasada en caso de que la necesitemos para un nuevo cálculo.

Para seleccionar, o para remover, cualesquiera de estas tres opciones, primero presiónese la tecla MODE. Y después,

- Use la tecla vertical, ▼, cuatro veces para seleccionar la opción *_Last Stack*. Use la tecla ✓CHK (F2) para cambiar la selección.
- Use la tecla ◄ para seleccionar la opción *_Key Click*. Use la tecla ✓CHK (F2) para cambiar la selección.

- Use la tecla ◄ para seleccionar la opción _*Beep*. Use la tecla ✓CHK (F2) para cambiar la selección.

Presione OK F6 para terminar la operación.

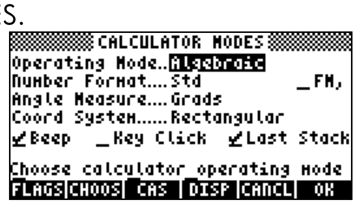
Seleccionando opciones del CAS

El término CAS significa *C*omputer *A*lgebraic *S*ystem, o Sistema Algebraico Computacional. El CAS es el centro matemático de la calculadora donde residen las operaciones y funciones simbólicas de la misma. El CAS presenta un número de opciones que pueden ajustarse de acuerdo a la operación de interés. Estas son:

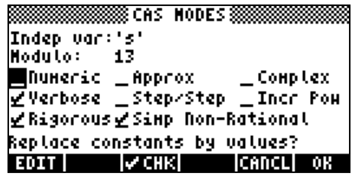
- Variable independiente preseleccionada
- Modo numérico vs. simbólico
- Modo detallado (verbose) vs. no-detallado (non-verbose)
- Operaciones paso-a-paso
- Formato polinómico con potencia creciente
- Modo riguroso (para el valor absoluto)
- Simplificación de expresiones no racionales

Para ver las opciones del CAS utilícese el procedimiento siguiente:

- Presiónese la tecla MODE para activar la forma interactiva denominada CALCULATOR MODES.



- Para cambiar las opciones del CAS presiónese la tecla de menú CAS. Los valores predefinidos de las opciones del CAS se muestran en la figura siguiente:



- Para navegar a través de las diferentes opciones en la forma interactiva denominada CAS MODES, utilícese las teclas direccionales: .

- Para seleccionar o remover cualquiera de las opciones indicadas anteriormente, selecciónese la línea que precede a la opción de interés, y presiónese la tecla de menú ✓CHK hasta que se obtenga la opción apropiada. Una vez seleccionada cierta opción, aparecerá una marca de aprobado (✓) en la línea que precede a la opción seleccionada (por ejemplo, véanse las opciones *Rigorous* y *Simp Non-Rational* en la pantalla mostrada anteriormente). En las opciones que no han sido seleccionadas no se mostrarán marcas de aprobado (✓) en la línea precedente (por ejemplo, en las opciones *_Numeric, _Approx, _Complex, _Verbose, _Step/Step,* y *_Incr Pow* mostradas anteriormente).

- Después de haber seleccionado o removido todas las opciones deseadas en la forma interactiva denominada CAS MODES, presiónese la tecla de menú OK. Esta acción permite regresar a la forma interactiva denominada CALCULATOR MODES. Para recobrar la pantalla normal presiónese la tecla de menú OK una vez más.

Explicación de las opciones del CAS

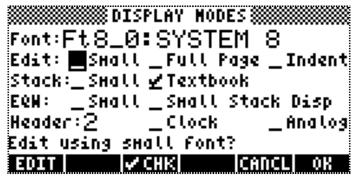
- Indep var: La variable independiente para las aplicaciones del CAS. Usualmente, VX = 'X'.
- Modulo: Para operaciones en la aritmética modular esta variable almacena el módulo del anillo aritmético (véase el Capítulo 5 en la Guía del Usuario de la calculadora).
- Numeric: Cuando se selecciona esta opción la calculadora produce resultados numéricos en las operaciones.

- Approx: Cuando se selecciona esta opción, la calculadora usa el modo denominado aproximado (Approx) y produce resultados numéricos en las operaciones. Si esta opción no es seleccionada, el CAS utiliza el modo exacto (Exact), el cual produce resultados simbólicos en las operaciones algebraicas.
- Complex: Cuando se selecciona esta opción, las operaciones con números complejos son activadas. Si no se selecciona esta opción, la calculadora opera en modo Real, lo que significa que se activan las operaciones con números reales. Para mayor información sobre operaciones con números reales véase el Capítulo 4 en esta Guía.
- Verbose: Si se selecciona esta opción la calculadora provee información detallada al realizar ciertas operaciones del CAS.
- Step/Step: Si se selecciona esta opción, la calculadora provee resultados intermedios detallados (paso-a-paso) en ciertas operaciones que usan el CAS. Esta opción puede ser útil para obtener pasos intermedios en sumatorias, derivadas, integrales, operaciones con polinomios (por ejemplo, divisiones sintéticas), y operaciones matriciales.
- Incr Pow: Potencia creciente (Increasing Power), significa que, si se selecciona esta opción, los términos de los polinomios se mostrarán con un orden reciente de las potencias de la variable independiente.
- Rigorous: Si se selecciona esta opción la calculadora no simplifica la función valor absoluto |X| a X.
- Simp Non-Rational: Si se selecciona esta opción la calculadora intentará simplificar expresiones no racionales tanto como sea posible.

Selección de los modos de la pantalla

La pantalla de la calculadora posee un número de opciones que el usuario puede ajustar a su gusto. Para ver las opciones disponibles, use el procedimiento siguiente:

- Para empezar, presiónese la tecla MODE para activar la forma denominada CALCULATOR MODE. Dentro de esta forma interactiva, presiónese la tecla de menú DISP (F4) para activar la forma denominada DISPLAY MODES:



- Para navegar a través de las diferentes opciones en la forma interactiva DISPLAY MODES utilícense las teclas direccionales: ◄►▼▲.

- Para seleccionar o remover cualquiera de las opciones mostradas en la figura anterior (las opciones selectas se indican con la marca de aprobado, ✓), selecciónese la línea previa a la opción de interés, y presiónese la tecla de menú ✓CHK hasta conseguir la opción deseada. Cuando se selecciona una opción, se muestra una marca de aprobado, ✓, en la línea precedente (por ejemplo, en la opción *Textbook* en la línea *Stack:* en la figura anterior). Opciones no seleccionadas no mostrarán la marca de aprobado, ✓, en la línea precedente (por ejemplo, las opciones *_Small, _Full page,* e *_Indent* en la línea *Edit:* en la figura anterior).

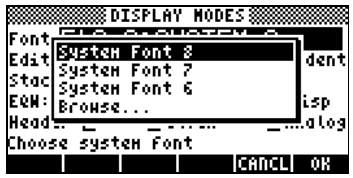
- Para seleccionar el tipo de caracteres (Font) para la pantalla, selecciónese la opción *Font:* en la forma interactiva denominada DISPLAY MODES, y utilícese la tecla de menú CHOOS (F2).

- Después de haber seleccionado y/o removido todas las opciones deseadas en la forma interactiva DISPLAY MODES, presiónese la tecla de menú OK. Esta acción permite al usuario recobrar la forma interactiva denominada CALCULATOR MODES en la pantalla. Para recobrar la pantalla normal, presiónese la tecla de menú OK una vez más.

Selección del tipo de caracteres (font)

Para empezar, presiónese la tecla MODE para activar la forma interactiva CALCULATOR MODES. Dentro de esta forma interactiva, presiónese la tecla de menú DISP(F4) para activar la forma interactiva denominada DISPLAY

MODES. La pantalla indicará que la opción *Ft8_0:system 8* ha sido seleccionada para la línea *Font:* en la forma interactiva DISPLAY MODES. Este es el valor pre-selecto para la línea *Font*. Al presionar la tecla de menú CHOOS (F2), la pantalla proveerá todas las opciones posibles para el tipo de caracteres:



Existen tres opciones estándares disponibles *System Fonts* (de tamaños *8, 7,* y *6*) y una cuarta opción, *Browse…* Esta última opción permite al usuario a buscar tipos adicionales que pueden ser creados por el usuario o copiados en la memoria de la calculadora de otras fuentes.

Practique cambiar el tamaño de los caracteres a *7* y *6*. Presiónese la tecla OK para aceptar la selección del tamaño de los caracteres. Una vez seleccionado el tamaño de los caracteres, la tecla de menú OK para recobrar la forma interactiva denominada CALCULATOR MODES. Para recobrar la pantalla normal, presiónese la tecla de menú OK una vez más. Obsérvese como la pantalla se ajusta al tamaño de caracteres seleccionado por el usuario.

Selección de las propiedades del editor de línea

Para empezar, presiónese la tecla MODE para activar la forma interactiva CALCULATOR MODES. Dentro de esta forma interactiva, presiónese la tecla de menú DISP (F4) para activar la forma interactiva DISPLAY MODES. Presiónese la tecla direccional vertical, ▼, una vez, para alcanzar la línea *Edit*. Esta línea muestra tres propiedades del editor que pueden ser modificadas. Cuando se seleccionan estas propiedades (se muestra una marca de aprobado, ✓) se activan las siguientes opciones:

_Small	Se cambia el tamaño de los caracteres a pequeño
_Full page	Permite posicionar el cursor al final de una línea
_Indent	Produce una auto-margen al presionar la tecla

alimentadora de líneas (Enter)

Instrucciones para el uso del editor de línea se presentan en el Capítulo 2 de esta Guía.

Selección de las propiedades de la pantalla (Stack)

Para empezar, presiónese la tecla MODE para activar la forma interactiva CALCULATOR MODES. Dentro de esta forma interactiva, presiónese la tecla de menú DISP (F4) para activar la forma interactiva DISPLAY MODES. Presiónese la tecla direccional vertical, ▼, dos veces, para alcanzar la línea *Stack*. Esta línea muestra dos propiedades del editor que pueden ser modificadas. Cuando se seleccionan estas propiedades (se muestra una marca de aprobado, ✓) se activan las siguientes opciones:

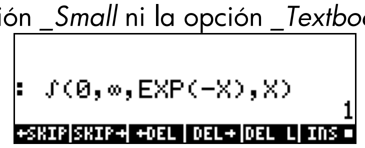
_Small Cambia el tamaño de los caracteres a pequeño. Esta opción maximiza la cantidad de información presentada en la pantalla. Esta selección precede a la selección del tamaño de los caracteres de la pantalla.

_Textbook Muestra las expresiones matemáticas en notación matemática propia

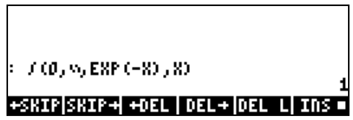
Para ilustrar estas opciones, ya sea en modo algebraico o RPN, utilícese el escritor de ecuaciones para escribir la siguiente expresión:

↱ EQW ↱ ∫ 0 ▶ ↰ ∞ ▶ ↰ e^x +/- X ▶ X ENTER

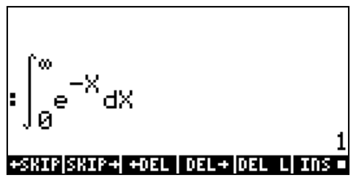
En modo algebraico, la siguiente pantalla muestra este resultado cuando no se selecciona ni la opción *_Small* ni la opción *_Textbook* en la línea *Stack*:



Cuando se selecciona la opción *_Small* solamente, la pantalla muestra lo siguiente:



Con la opción *_Textbook* seleccionada (este es el valor predefinido), ya sea que se seleccione la opción *_Small* o no, la pantalla muestra el siguiente resultado:



Selección de las propiedades del escritor de ecuaciones (EQW)

Para empezar, presiónese la tecla MODE para activar la forma interactiva CALCULATOR MODES. Dentro de esta forma interactiva, presiónese la tecla de menú DISP (F4) para activar la forma interactiva DISPLAY MODES. Presiónese la tecla direccional vertical, ▼, tres veces, para activar la línea *EQW* (Equation Writer). Esta línea muestra dos propiedades del editor que pueden ser modificadas. Cuando se seleccionan estas propiedades (se muestra una marca de aprobado, ✓) se activan las siguientes opciones:

_Small	Cambia el tamaño de los caracteres a pequeño cuando se utiliza el escritor de ecuaciones
_Small Stack Disp	Muestra tamaño pequeño de caracteres después de utilizar el escritor de ecuaciones

Instrucciones detalladas del uso del escritor de ecuaciones (EQW) se presentan en otras secciones de esta Guía.

En el ejemplo de la integral $\int_0^{\infty} e^{-X}\,dX$, que se presentó anteriormente, el seleccionar la opción *_Small Stack Disp* en la línea *EQW* de la forma DISPLAY MODES produce el siguiente resultado:

Selección del tamaño del encabezado

Presiónese primero la tecla MODE para activar la forma interactiva denominada CALCULATOR MODES. Dentro de esta forma, presiónese la tecla DISP (F4) para mostrar la forma interactiva denominada DISPLAY MODES. Presiónese la tecla ▼, cuatro veces, para obtener la línea *Header* (encabezado). El valor *2* se pre-asigna a la localidad *Header.* Esto significa que la parte superior de la pantalla contendrá dos líneas, uno que demuestra las opciones actuales de la calculadora, y la segundo que demuestra el sub-directorio actual dentro de la memoria de la calculadora (estas líneas fueron descritas anteriormente en esta guía). El usuario puede seleccionar los valores de1 ó 0 para reducir el número de las líneas del encabezado en la pantalla.

Selección del formato del reloj

Presiónese primero la tecla MODE para activar la forma interactiva denominada CALCULATOR MODES. Dentro de esta forma, presiónese la tecla DISP (F4) para mostrar la forma interactiva denominada DISPLAY MODES. Presiónese la tecla ▼, cuatro veces, para obtener la línea *Header* (encabezado). Use la tecla (▶) para seleccionar la línea delante de las opciones *_Clock* o *_Analog*. Presiónese la tecla ✓CHK hasta conseguir la opción deseada. Si se selecciona la opción *_Clock*, la hora del día y la fecha se mostrarán en la esquina superior derecha de la pantalla. Si se selecciona la opción *_Analog*, un reloj analógico, en vez de un reloj digital, se mostrará en la esquina superior derecha de la pantalla. Si no se selecciona la opción *_Clock*, o si el encabezado no está presente, o es muy chico, la fecha y la hora no se mostrarán en la pantalla.

Capítulo 2
Introducción a la calculadora

En este Capítulo se presentan las operaciones básicas de la computadora incluyendo el uso del escritor de ecuaciones (El escritor de ecuaciones) y la manipulación de los objetos (datos) en la calculadora. Analícense los ejemplos en este Capítulo para conocer mejor la operación de la calculadora en futuras aplicaciones.

Objetos en la calculadora

Cualquier número, expresión, carácter, variable, etc., que se pueda crear y manipular en la calculadora se denomina un objeto de la calculadora. Algunos de los objetos más útiles se enumeran a continuación.

Números reales. Estos objetos representan un número, positivo o negativo, con 12 cifras significativas y un exponente con un rango de -499 a +499. Ejemplos de reales son: 1., -5., 56.41564 1.5E45, -555.74E-95

Cuando se escribe un número real, se puede utilizar la tecla EEX para escribir el exponente y la tecla +/- para cambiar el signo de la mantisa.

Obsérvese que los reales deben ser escritos con un punto decimal, aún y cuando el número no tenga una parte fraccionaria. Si no el número escrito se opera como número entero, que es un objeto diferente en la calculadora. Los números reales se operan en la calculadora como cualquier número en una expresión matemática.

Números enteros. Estos objetos representan los números enteros (números sin parte fraccionaria) y no tienen límites (excepto la memoria de la calculadora). Ejemplos de números enteros: 564654112, -413165467354646765465487. Nótese que estos números no tienen un punto decimal.

Debido a su formato de almacenaje, los números enteros mantienen siempre la precisión completa en su cálculo. Por ejemplo, una operación tal como 30/14, con números enteros, producirá 15/7 y no 2.142.... Para forzar un resultado real (o de punto decimal flotante), utilice la función →NUM →NUM .

Los números enteros se utilizan con frecuencia en funciones del CAS mientras que han sido diseñadas para mantener la precisión completa en su operación.

Si el modo aproximado (APROX) se selecciona en el CAS (véase el apéndice C), los números enteros serán convertidos automáticamente a reales. Si usted no está planeando utilizar el CAS en sus operaciones, es una buena idea cambiar el CAS directamente al modo aproximado. Refiérase al apéndice C para más detalles.

La mezcla de números enteros y reales o el confundir un número entero con un real es una ocurrencia común. La calculadora detectará tales mezclas de objetos y le preguntará si usted desea cambiar al modo aproximado.

Los números complejos, son una extensión de los números reales que incluyen la unidad imaginaria, $i^2 = -1$. Se escribe un número complejo, Vg., 3 + 2ì, como (3, 2) en la calculadora. Los números complejos se pueden exhibir en modo cartesiano o polar dependiendo de cual sistema haya sido seleccionado. Obsérvese que los números complejos se almacenan siempre en modo cartesiano y que solamente se afecta el formato de presentación al cambiar coordenadas. Esto permite que la calculadora guarde tanta precisión como sea posible durante cálculos.

La mayoría de las funciones matemáticas operan con números complejos. No hay necesidad de utilizar una función "compleja +" para sumar números complejos. Usted puede utilizar la misma función + que se usa con los números reales o enteros.

Las operaciones con vectores y matrices utilizan objetos del tipo 3, **arreglos reales**, y, de ser necesarios, del tipo 4, **arreglos complejos**. Objetos del tipo 2, **cadenas de caracteres**, son simplemente líneas del texto (incluido entre comillas) producidas con el teclado alfanumérico.

Una **lista** es simplemente una colección de objetos incluidos entre teclas {} y separados por espacios en modo de RPN (la tecla espaciadora es la tecla SPC), o por comas en modo algebraico. Las listas, objetos del tipo 5, pueden ser muy útiles al procesar colecciones de números. Por ejemplo, las columnas de una tabla se pueden entrar como listas. Si se prefiere, una tabla se puede escribir como una matriz o arreglo.

Objetos del tipo 8 son **programas** en lenguaje UserRPL. Estos objetos son simplemente colecciones de instrucciones incluidas entre los símbolos < < > >.

Se asocian a programas los nombres de objetos tipo 6 y 7, **objetos globales y locales**, respectivamente. Estos nombres, o variables, se utilizan para almacenar cualquier tipo de objetos. El concepto de nombres globales o locales se relaciona con el alcance la variable en un programa dado.

Un **objeto algebraico**, o simplemente, un algebraico (objeto de tipo 9), es una expresión algebraica válida incluida entre apóstrofes.

Los **números enteros binarios**, objetos del tipo 10, se utilizan en informática.

Los **objetos gráficos**, objetos de tipo 11, almacenan diagramas producidos por la calculadora.

Los **objetos rotulados** (tagged objects), objetos de tipo 12, se utilizan en la salida de muchos programas para identificar resultados. Por ejemplo, en el objeto rotulado: *Media: 23.2*. la palabra *Media:* es la etiqueta o rótulo usado para identificar el número 23.2 como la media de una muestra, por ejemplo.

Los **objetos de unidades**, objetos de tipo 13, son valores numéricos con una unidad física adjunta.

Los **directorios**, objetos del tipo 15, son posiciones de memoria usadas para organizar las variables en una manera similar como las carpetas se utilizan en un ordenador personal.

Las **bibliotecas**, objetos de tipo 16, son programas que residen en los puertos de la memoria que son accesibles dentro de cualquier directorio (o de sub-directorio) en su calculadora. Se asemejan a **funciones predefinidas**, objetos del tipo 18, y a las **instrucciones predefinidas**, objetos del tipo 19, en la manera en que se utilizan.

Edición de expresiones en la pantalla

En esta sección se presentan ejemplos de la edición de expresiones directamente en la pantalla de la calculadora.

Creación de expresiones aritméticas

Pare ejecutar este ejemplo, selecciónese el modo operativo Algebraico y el formato *Fix* con 3 decimales para la pantalla. Escríbase la expresión:

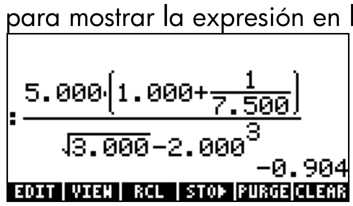
$$5.0 \cdot \frac{1.0 + \dfrac{1.0}{7.5}}{\sqrt{3.0} - 2.0^{3}}$$

Para escribir esta expresión, utilícense las siguientes teclas:

5 • × ← () 1 • + 1 • ÷ 7 • 5 ▶ ÷
← () √x 3 • − 2 • y^x 3

La expresión resultante es: 5*(1+1/7.5)/(√3-2^3).

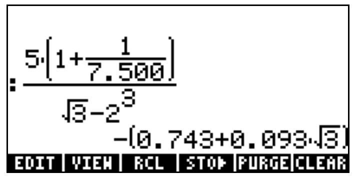
Presiónese la tecla ENTER para mostrar la expresión en la pantalla:



Nótese que, es la opción EXACT se selecciona para el CAS (véase el Apéndice C en la Guía del Usuario) y se escribe la expresión utilizando números enteros para los valores enteros, el resultado es una expresión simbólica, por ejemplo,

5 × ← () 1 + 1 ÷ 7 • 5 ▶ ÷
← () √x 3 − 2 y^x 3

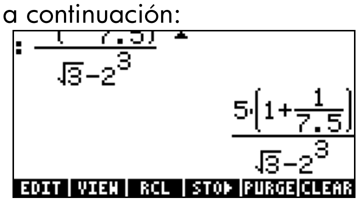
Antes de producirse el resultado, se solicita que el usuario cambie el modo a Approximate (aproximado). Acéptese el cambio para obtener el resultado mostrado a continuación (mostrado con formato Fix con tres decimales – véase el Capítulo 1):



En este caso, cuando la expresión se escribe directamente en la pantalla, en cuanto se presiona la tecla ENTER, la calculadora intentará calcular el valor de la expresión. Si la expresión se escribe entre apóstrofes, la calculadora simplemente reproduce la expresión tal y como fue escrita. Por ejemplo:

' 5 × ← () 1 + 1 ÷ 7 . 5 ▶ ÷
← () √x 3 − 2 y^x 3 ENTER

El resultado se muestra a continuación:



Para evaluar la expresión en este caso, utilícese la función EVAL :

EVAL ← ANS ENTER

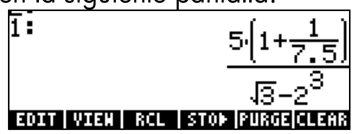
Si la opción *Exact* ha sido seleccionada para el CAS, se solicita que el usuario cambie el modo a Approximate (aproximado). Acéptese el cambio para obtener la evaluación de la expresión como se demostró en un ejemplo anterior.

Una forma alternativa para evaluar la expresión escrita entre apóstrofes en el ejemplo anterior, consiste en utilizar la función →NUM (→ →NUM).

A continuación, se escribe la expresión utilizada anteriormente con la calculadora utilizando el modo operativo RPN. Selecciónese la opción *Exact* para el CAS y la opción *Textbook* para la pantalla. Utilícense las siguientes teclas para escribir la expresión entre apóstrofes utilizada anteriormente, es decir,

→ ' 5 × ← () 1 + 1 ÷ 7 . 5 ▶ ÷
← () √x 3 − 2 y^x 3 ENTER

El resultado se muestra en la siguiente pantalla:



Presiónese la tecla `ENTER` una vez más para producir dos copias de la expresión en la pantalla. Evalúese la expresión en el nivel 1 utilizando la función *EVAL*, primero, y después la función *→NUM* (`EVAL`).

Esta expresión es semi-simbólica en el sentido de que existen componentes reales (números reales) en el resultado, así como la expresión simbólica √3. A continuación, intercámbiense las posiciones de los niveles 1 y 2 en la pantalla y evalúese la expresión utilizando la función →NUM: `▶` `↱` `→NUM` .

Este último resultado es puramente numérico, de manera que, los dos resultados en la pantalla, aunque representan la evaluación de la misma expresión, aparecen en formas diferentes. Para verificar que el valor resultante es el mismo, obténgase la diferencia de estos dos valores y evalúese esta diferencia usando la función EVAL: `−` `EVAL`. El resultado es cero(0.).

Nota: Evite mezclar números enteros y reales para evitar conflictos en los cálculos. Para muchas aplicaciones en la ciencia y en la ingeniería, incluyendo la solución numérica ecuaciones, aplicaciones estadística, etc., el modo APROX (véase el apéndice C) es el mejor. Para los usos matemáticos, es decir, cálculo, análisis vectorial, álgebra, etc., se prefiere el modo EXACT. Familiarícese con las operaciones en ambos modos y aprenda cómo cambiar del uno al otro para diversos tipos de operaciones (véase el apéndice C).

Edición de expresiones aritméticas

Suponga que hemos escrito la expresión siguiente, entre comillas, con la calculadora en modo de RPN y el CAS fijado a EXACT:

más bien que la expresión prevista: $5 \cdot \dfrac{1+\dfrac{1}{7.5}}{\sqrt{3}-2^3}$. La expresión incorrecta fue escrita usando:
['] [5] [×] [←] [()] [1] [+] [1] [÷] [1] [.] [7] [5] [▶] [÷] [←] [()] [√x] [5] [−] [2] [y^x] [3] [ENTER]

Para activar el editor de línea use [←] [▼]. La pantalla ahora luce como sigue:

El cursor editor se demuestra una flecha izquierda pulsante sobre el primer carácter en la línea que se corregirá. Puesto que el corregir en este caso consiste en remover algunos caracteres y en substituirlos por otros, utilizaremos las teclas [◀] [▶] para mover el cursor al lugar apropiado para edición, y la tecla de cancelación, [⇐], para eliminar caracteres.

Las teclas siguientes completan la corrección para este caso::

- Presione la tecla [▶] hasta que el cursor esté inmediatamente a la derecha del punto decimal en el término *1.75*
- Presione la tecla de cancelación, [⇐], dos veces para eliminar el *1.*
- Presione la tecla [▶], una vez, para mover el cursor a la derecha del *7*
- Escriba un punto decimal con [.]
- Presione la tecla [▶], hasta que el cursor está inmediatamente a la derecha de √*5*
- Presione la tecla de cancelación, [⇐], una vez, para borrar el carácter *5*
- Escriba un *3* con [3]
- Presione [ENTER] para volver a la pantalla

La expresión corregida está disponible ahora en la pantalla.

El corregir de una línea de la entrada cuando la calculadora está en modo de funcionamiento algebraico es exactamente igual que en el modo RPN. Usted puede repetir este ejemplo en modo algebraico para verificar esta aserción.

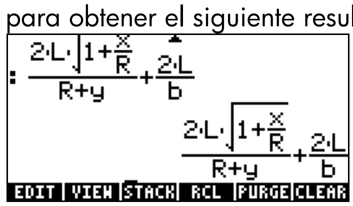
Creación de expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas incluyen no solamente números, sino también variable. Por ejemplo, escríbase la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{2L\sqrt{1+\frac{x}{R}}}{R+y}+2\frac{L}{b}$$

Selecciónese el modo operativo Algebraico en la calculadora, la opción *Exact* en el CAS, y la opción *Textbook* para la pantalla. Escríbase la expresión propuesta utilizando las siguientes teclas:
['] [2] [×] [ALPHA] [L] [×] [√x] [←] [()] [/] [+] [ALPHA] [←] [X] [÷] [ALPHA] [R] [▶] [÷]
[←] [()] [ALPHA] [R] [+] [ALPHA] [←] [Y] [▶] [+] [2] [×] [ALPHA] [L] [÷] [ALPHA] [←] [B]

Presiónese la tecla [ENTER] para obtener el siguiente resultado:



Esta expresión puede escribirse con la calculadora en modo operativo RPN de la misma forma especificada anteriormente para el modo operativo algebraico (ALG).

Para obtener información adicional en la edición de expresiones algebraicas en la pantalla, véase el Capítulo 2 en la Guía del Usuario de la calculadora.

Edición de expresiones algebraicas

La edición de una expresión algebraica con el editor de línea es muy similar la edición de una expresión aritmética (véase el ejercicio anterior). Suponga que deseamos modificar la expresión incorporada anteriormente de manera que luzca como se muestra a continuación:

$$\frac{2L\sqrt{1+\frac{x^2}{R}}}{R+x}+2\sqrt{\frac{L}{b}}$$

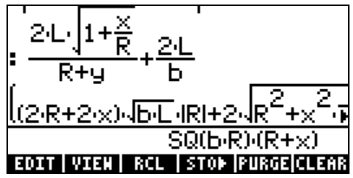
Para corregir esta expresión algebraica usando el editor de línea use ↰▼. Esto activa el editor de línea redactor, mostrando la expresión que se corregirá como sigue:

El cursor editor se muestra como una flecha izquierda pulsante sobre el primer carácter en la línea a editarse. Como en un ejercicio anterior en edición, utilizaremos las teclas ◀▶ para mover el cursor al lugar apropiado para edición, y la tecla de cancelación, ⬅, para eliminar caracteres.

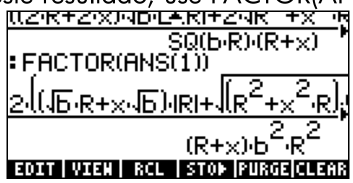
Las teclas siguientes completarán la edición para este caso:

- Presione ▶, hasta que el cursor está a la derecha de *x*
- Escriba y^x 2 para escribir la potencia 2 para la *x*
- Presione ▶, hasta que el cursor está a la derecha de *y*
- Presione ⬅, una vez para borrar los caracteres *y*.
- Escriba ALPHA ↰ X
- Presione ▶, 4 veces para mover el cursor a la derecha de *
- Escriba √x para escribir el símbolo de raíz cuadrada
- Escriba ↰ () para incorporar un par de paréntesis
- Presione ▶⬅ para suprimir el paréntesis derecho del par
- Presione ▶, 4 veces para mover el cursor a la derecha de *b*
- Escriba ↰ () para escribir segundo par de paréntesis
- Presione ⬅ para suprimir el paréntesis izquierdos del par
- Presione ENTER para regresar a la pantalla normal.

El resultado es:



Note que la expresión se ha ampliado para incluir términos por ejemplo |R|, el valor absoluto, y SQ(b·R), el cuadrado de b·R. Para ver si podemos simplificar este resultado, use FACTOR(ANS(1)) en modo ALG:



- Presione ⬅ ▼ para activar el editor de línea una vez más. El resultado es:

- Presione ENTER una vez más para regresar a la pantalla normal.

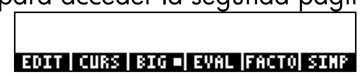
Para ver la expresión entera en la pantalla, podemos cambiar la opción _*Small Screen Disp* en la forma *SCREEN MODES* (ver el capítulo 1). Después de efectuar este cambio, la pantalla mirará como sigue:

Nota: Para utilizar las letras griegas y otros caracteres en expresiones algebraicas utilice el menú CHARS. Este menú se activa con ➡ CHARS. Los detalles se presentan en el apéndice D.

Uso del escritor de ecuaciones (EQW) para crear expresiones

El escritor de ecuaciones es una herramienta muy importante que permite al usuario no solamente escribir o ver una ecuación, sino también modificar y manipular expresiones, y aplicar funciones a las mismas. El escritor de ecuaciones (EQW), por lo tanto, permite que usted realice operaciones matemáticas complejas, directamente, o en un modo paso a paso, tal como Ud. las haría en el papel, al resolver, por ejemplo, problemas del cálculo.

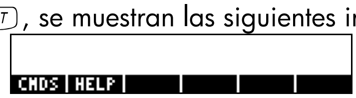
El escritor de ecuaciones se activa al presionar ↱ ↱ EQW (la tercera tecla en la cuarta fila del teclado). La pantalla resultante es la siguiente. Presiónese la tecla NXT para acceder la segunda página del menú:



Las seis teclas de menú del escritor de ecuaciones activan las siguientes funciones:

EDIT: para editar una línea (véase los ejemplos anteriores)
CURS: destaca la expresión y agrega un cursor gráfico a la misma
BIG: si está seleccionada (identificado por el carácter visible en la etiqueta) la pantalla usa caracteres de tamaño 8 (los caracteres más grande disponibles en el sistema)
EVAL: permite evaluar, simbólicamente o numéricamente, una expresión destacada en la pantalla del escritor de ecuaciones (similar a ↱ EVAL)
FACTO: permite factorizar la expresión destacada en la pantalla del escritor de ecuaciones (si la factorización es posible)
SIMP: permite simplificar una expresión destacada en la pantalla del escritor de ecuaciones (tanto como puede ser simplificada según las reglas algebraicas del CAS)

Presionando la tecla NXT, se muestran las siguientes instrucciones en el menú:



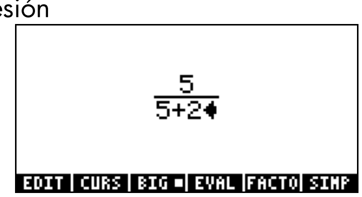
Estas teclas del menú para el escritor de ecuaciones activan las funciones siguientes:

CMDS: permite acceso a la colección de funciones del CAS enumeradas en orden alfabético. Esto es útil para activar funciones del CAS en cualquier expresión disponible en el escritor de la ecuación.
HELP: activa la función informativa del CAS de la calculadora que provee información y ejemplos de las funciones del CAS.
Algunos ejemplos del uso del escritor de ecuaciones se muestran a continuación.

Creación de expresiones aritméticas

La escritura de expresiones en el Escritor de ecuaciones es muy similar a la escritura de expresiones entre apóstrofes en la pantalla. La diferencia principal es que en el Escritor de ecuaciones las expresiones producidas se presentan en el estilo "textbook" (libro de texto, es decir, utilizando notación matemática similar a la de un libro de texto) en vez de escribirse como en el editor de línea en la pantalla. Por ejemplo, escríbase el siguiente ejercicio en el escritor de ecuaciones: 5 ÷ 5 + 2

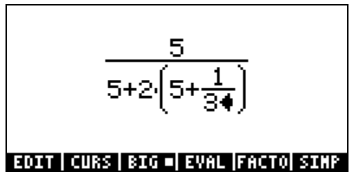
El resultado es la expresión



El cursor se muestra como una flecha apuntando hacia la izquierda. El cursor indica la posición de edición actual en la pantalla del escritor de ecuaciones. Por ejemplo, con el cursor en la posición mostrada anteriormente, escríbase:

× ← () 5 + 1 ÷ 3

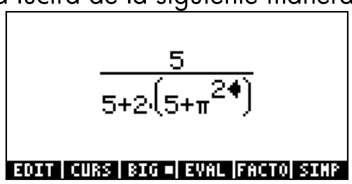
La expresión así editada lucirá ahora de la siguiente manera:



Supóngase que se desea reemplazar la expresión entre paréntesis en el denominador (es decir, 5+1/3) con (5+π^2/2). Para empezar, utilícese la tecla de borrar (◄) para borrar la fracción 1/3, y reemplazarla con π^2/2. Utilícense las siguientes teclas:

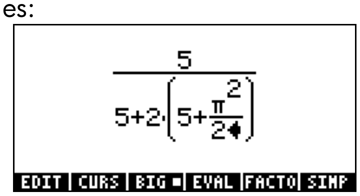
◄ ◄ ◄ ← π y^x 2

A este punto, la pantalla lucirá de la siguiente manera:



Para escribir el denominador *2* debajo de π^2, es necesario seleccionar la expresión π^2 completa. Esto se consigue al presionar la tecla direccional horizontal ►, una sola vez. Después, escríbase: ÷ 2

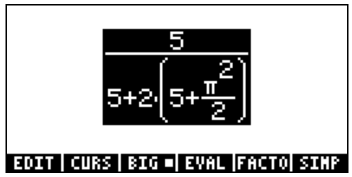
La expresión resultante es:



Supóngase que se quiere sumar la cantidad 1/3 a esta expresión para obtener:

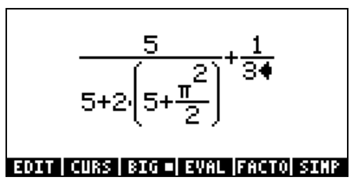
$$\frac{5}{5+2\cdot(5+\frac{\pi^2}{2})}+\frac{1}{3}$$

Para empezar, es necesario seleccionar todo el primer término utilizando, ya sea, la tecla direccional horizontal (▶) o la tecla direccional vertical (▲), repetidamente, hasta que la expresión completa haya sido seleccionada, es decir, siete veces:



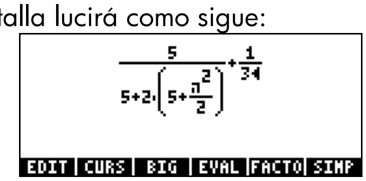
NOTA: Como forma alternativa, comenzando en la posición original del cursor (a la derecha del 2 en el denominador de $\pi^2/2$), se puede utilizar la combinación de teclas ↱ ▲, que se interpreta como (↱ ⏶).

Una vez seleccionada la expresión como se mostró anteriormente, escríbase + 1 ÷ 3 para agregar la fracción 1/3 a la expresión. El resultado es:



Mostrar la expresión en tamaño pequeño

Para mostrar la expresión en caracteres pequeños (el cuál podría ser útil si la expresión es larga y complicada), presione simplemente la tecla BIG F3 . Para este caso, la pantalla lucirá como sigue:

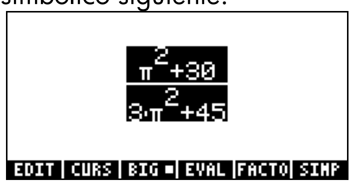


Para recuperar los caracteres grandes en la pantalla, presione BIG F3 una vez más.

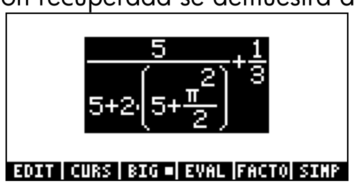
Evaluación de la expresión

Para evaluar la expresión (o las partes de la expresión) dentro del escritor de ecuaciones, destaque la pieza que usted desea evaluar y presione la tecla EVAL F4 .

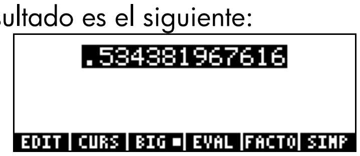
Por ejemplo, para evaluar la expresión entera en este ejercicio, primero, destaca la expresión entera, presionando ↱ ▲. Entonces, presione EVAL F4 . Si su calculadora se fija en modo Exact del CAS (es decir la opción *_Approx* del CAS no ha sido seleccionada), entonces usted conseguirá el resultado simbólico siguiente:



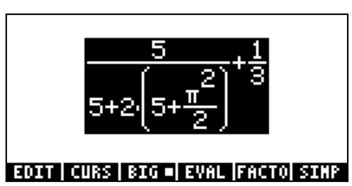
Si Ud. quiere recobrar la expresión sin evaluar utilice la función UNDO, i.e., ↱ UNDO (la primera tecla en la tercera fila contada de la parte superior del teclado). La expresión recuperada se demuestra destacada como antes:



Si Ud. desea un resultado numérico, use la función *→NUM* (es decir, ↱ →NUM). El resultado es el siguiente:



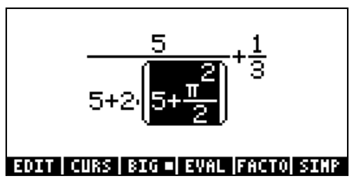
Utilice la función UNDO (↱ UNDO) una vez más para recobrar la expresión original:



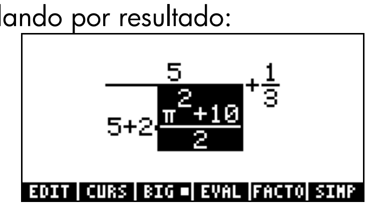
Evaluación de una sub-expresión

Suponga que usted desea evaluar solamente la expresión en paréntesis en el denominador de la primera fracción en la expresión mostrada arriba. Usted tiene que utilizar las teclas direccionales para seleccionar esa sub-expresión particular. He aquí una manera de hacerlo:

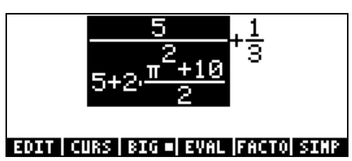
▼ Destacar solamente la primera fracción
▼ Destacar el numerador de la primera fracción
► Destacar denominador de la primera fracción
▼ Destacar primer término en denominador de la primera fracción
► Destacar segundo término en denominador de la primera fracción
▼ Destacar primer factor en segundo término en denominador de primera fracción
► Destacar expresión en paréntesis en denominador de la primera fracción



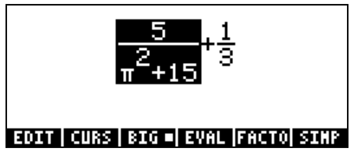
Puesto que ésta es la sub-expresión que deseamos evaluar, podemos ahora presionar EVAL F4 , dando por resultado:



Una evaluación simbólica una vez más. Suponer que, a este punto, deseamos evaluar la fracción lateral izquierda solamente Presione la tecla direccional vertical superior (▲) tres veces, para seleccionar esa fracción, dando por resultado:

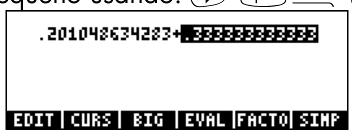


Entonces, presionar EVAL F4 para obtener:

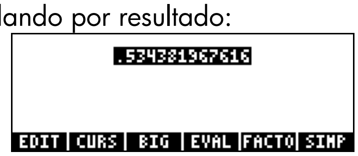


Intentemos una evaluación numérica de este término a este punto.
Utilizar ↱ →NUM para obtener:

Destaquemos la fracción a la derecha, y obtengamos una evaluación numérica de ese término también, y mostremos la suma de estos dos valores decimales en formato pequeño usando: ▶ ↱ →NUM F3 , conseguimos:

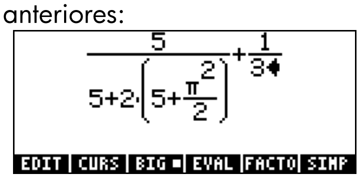


Para destacar y evaluar la expresión en el escritor de ecuaciones utilizamos: ▲ F4 , dando por resultado:

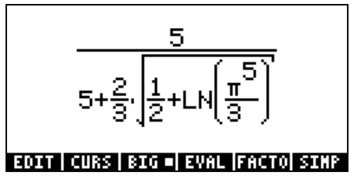


Edición de expresiones aritméticas

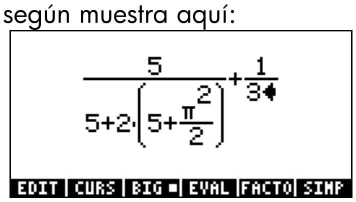
Demostraremos algunas de las funciones de edición en el escritor de ecuaciones como ejercicio. Comenzamos escribiendo la expresión siguiente usada en los ejercicios anteriores:



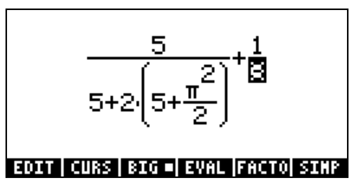
Y utilizará las funciones de edición del escritor de ecuaciones para transformarlo en la expresión siguiente:



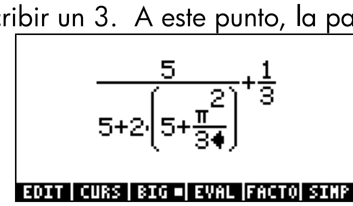
En los ejercicios anteriores utilizamos la tecla de flecha vertical hacia abajo para destacar las sub-expresiones para la evaluación. En este caso, las utilizaremos para accionar un cursor de edición. Después de que usted haya acabado de escribir la expresión original, el cursor de escritura (una flecha apuntando a la izquierda) será situado a la derecha del 3 en el denominador de la segunda fracción según muestra aquí:



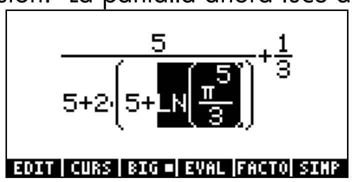
Presione la tecla (▽) para activar el cursor editor. La pantalla ahora luce así:



Usando (◁) usted puede mover el cursor en la dirección izquierda general, pero parando en cada componente individual de la expresión. Por ejemplo, suponga que primero queremos transformamos la expresión $\pi^2/2$ a la expresión $LN(\pi^5/3)$. Con el cursor transparente activo, como se mostró anteriormente, Presione la tecla (◁) dos veces para destacar el 2 en el denominador de $\pi^2/2$. Después, presione (⬅) para cambiar el cursor al cursor de inserción. Presione ⬅ una vez más para eliminar el 2, y entonces *3* para escribir un 3. A este punto, la pantalla luce como sigue:



Después, presione la tecla (▼)para activar el cursor transparente de edición destacando 3 en el denominador de $\pi^2/3$. Presione la tecla (◄) para destacar el exponente 2 en la expresión $\pi^2/3$. Después, Presione (⇐) para cambiar el cursor en el cursor de la inserción. Presione ⇐ una vez más para suprimir el 2, y un [5] para escribir 5. Presione la tecla (▲) tres veces para destacar la expresión $\pi^5/3$. Entonces, escriba [→] LN para aplicar *LN* a esta expresión. La pantalla ahora luce así:



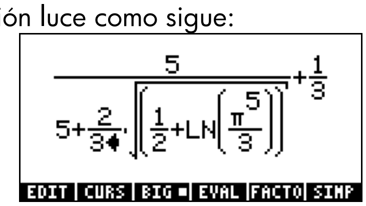
Después, cambiaremos el 5 dentro de paréntesis a un ½ usando:

◄ ⇐ ⇐ [1] [÷] [2]

Después, destacamos la expresión entera en paréntesis y aplicamos el símbolo de la raíz cuadrada usando: ▲ ▲ ▲ ▲ [√x]

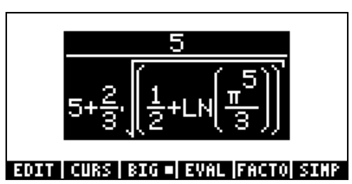
Después, convertiremos el2 delante del paréntesis en el denominador en un 2/3 usando: ◄ ⇐ ⇐ [2] [÷] [3]

A este punto la expresión luce como sigue:



El paso final es quitar el 1/3 en el lado derecho de la expresión. Esto se logra usando: ▲ ▲ ▲ ▲ ▲ ► ⇐ ⇐ ⇐ ⇐ ⇐

La versión final será:



En resumen, para editar una expresión en el escritor de ecuaciones usted debe utilizar las teclas (◄ ► ▲ ▼) para destacar la expresión a la cual las funciones serán aplicadas (Vg., los casos *LN* y raíz cuadrada en la expresión anterior). Use la tecla (▼)en cualquier localización, repetidamente, para activar el cursor transparente de edición. En este modo, utilizar las teclas (◀ ▶) para moverse de término a término en una expresión. Cuando usted alcanza un punto que usted necesite corregir, use (◀) para activar el cursor de inserción y proceder con la edición de la expresión.

Creación de expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es muy similar a una expresión aritmética, excepto que en la última se pueden incluir letras castellanas y griegas. El procedimiento de creación de una expresión algebraica sigue la misma idea que el crear una expresión aritmética, excepto que se tiene que utilizar el teclado alfanumérico.

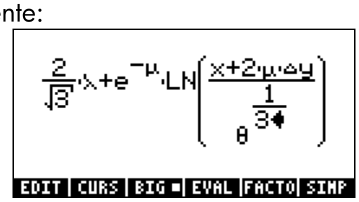
Para ilustrar el uso del escritor de ecuaciones para escribir una expresión algebraica se utilizará el siguiente ejemplo. Supóngase que se quiere escribir la expresión:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\lambda + e^{-\mu} \cdot LN\left(\frac{x + 2\mu \cdot \Delta y}{\theta^{1/3}}\right)$$

Utilícense las siguientes teclas:

2 ÷ √x 3 ▶ ▶ × ALPHA ↱ N + ↰ e^x +/- ALPHA ↱ M
▶ ▶ × ↱ LN ALPHA ↰ X + 2 × ALPHA ↱ M × ALPHA ↱ C
ALPHA ↰ Y ▲ ▲ ▲ ÷ ALPHA ↱ T y^x 1 ÷ 3

El resultado es el siguiente:



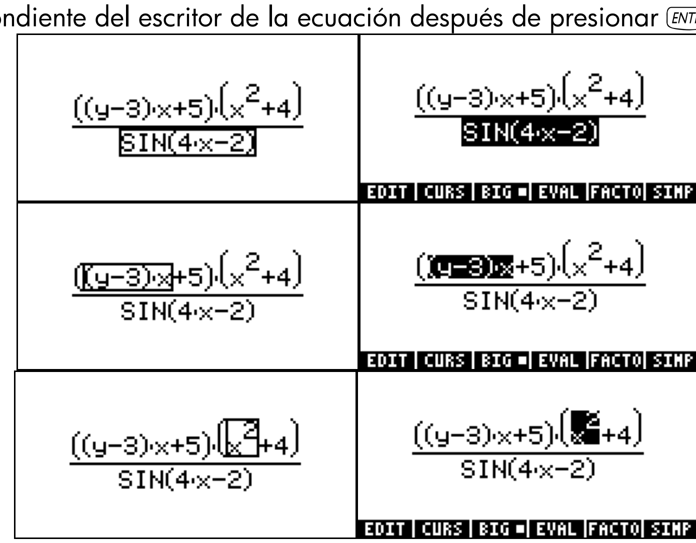
En este ejemplo se utilizan varias letras minúsculas del Castellano, por ejemplo, x (ALPHA ↰ X), varias letras griegas, por ejemplo, λ (ALPHA ↱ N), e inclusive una combinación de letras castellanas y griegas, Δy (ALPHA ↱ C ALPHA ↰ Y). Obsérvese que para escribir una letra castellana en minúscula es necesario utilizar la combinación de teclas ALPHA ↰ seguida de la tecla de la letra a escribirse. Así mismo, se pueden copiar caracteres especiales utilizando el menú CHARS (↱ CHARS) si no se desea memorizar la combinación de teclas que produce el carácter deseado. Una colección de combinaciones con ALPHA ↱ que se utilizan comúnmente se presentó en una sección anterior.

El árbol o diagrama de una expresión

El árbol o diagrama de una expresión es un diagrama que muestra cómo el Escritor de Ecuaciones interpreta una expresión. Ver el apéndice E para un ejemplo detallado.

La función CURS

La función CURS (CURS) en el menú del Escritor de Ecuaciones (la tecla F2) convierte pantalla en una pantalla gráfica y produce un cursor gráfico que se pueda controlar con las teclas direccionales (◀ ▶ ▲ ▼) para seleccionar sub-expresiones. La sub-expresión seleccionada con CURS se mostrará enmarcada en la pantalla gráfica. Después de seleccionar una sub-expresión presione ENTER para mostrar la sub-expresión seleccionada destacada en el escritor de ecuaciones. Las figuras siguientes muestran diversas sub-expresiones seleccionadas con CURS y la pantalla correspondiente del escritor de la ecuación después de presionar ENTER.

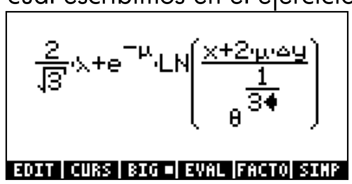


Edición de expresiones algebraicas

La edición de ecuaciones algebraicas sigue las mismas reglas que la de ecuaciones aritméticas. A saber:

- Use las teclas (◄ ► ▲ ▼) para seleccionar expresiones
- Use la tecla (▼), repetidamente, para activar e cursor transparente de edición . En este modo, use las teclas (◄ ►) para moverse de término a término en una expresión.
- En un punto de edición, use (⇦) para activar el cursor de la inserción y procede con la edición de la expresión.

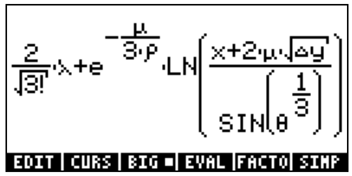
Para ver el cursor transparente de edición en la acción, comencemos con la expresión algebraica la cual escribimos en el ejercicio anterior:



Presione la tecla, ▼, en su localización actual para activar el cursor transparente de edición. El 3 en el exponente de θ será destacado. Use la tecla ◄, para moverse de elemento a elemento en la expresión. La orden de la selección del cursor transparente de edición en este ejemplo es la que sigue (Presione la tecla ◄, repetidamente):

1. El 1 en el exponente 1/3
2. θ
3. Δy
4. μ
5. 2
6. x
7. μ en la función exponencial
8. λ
9. 3 en el término √3
10. el 2 en la fracción 2/√3

En cualquier punto podemos cambiar el cursor transparente de edición al cursor de inserción al presionar (⇦). Utilicemos estos dos cursores (el cursor transparente de edición y el cursor de inserción) para cambiar la expresión actual a la siguiente:



Si usted siguió el ejercicio inmediatamente arriba, usted debe tener el cursor transparente de edición en el número 2 en el primer factor de la expresión. Siga estas instrucciones para editar la expresión:

▶ ALPHA ↱ 2 Escriba el factorial para el 3 en la raíz cuadrada (esto cambia el cursor al cursor de selección)

▼▼▶▶ Seleccione la μ en la función exponencial

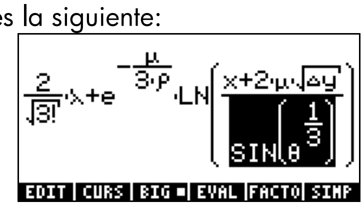
÷ 3 × ALPHA ↱ F Modifique el argumento de la función exponencial

▶▶▶▶ Selecciona Δy

√x Ponga un símbolo de raíz cuadrada sobre Δy (esta operación también cambia el cursor al cursor de selección)

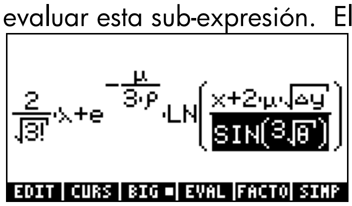
▼▼▶▲▲ SIN Seleccione $\theta^{1/3}$ y escriba la función SIN

La pantalla resultante es la siguiente:

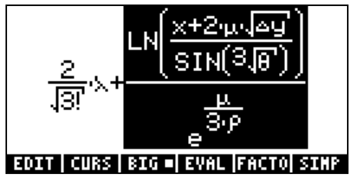


Evaluación de una sub-expresión

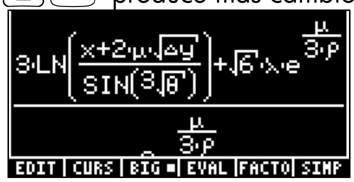
Puesto que tenemos ya la sub- expresión $SIN(\theta^{1/3})$ destacada, presionemos la tecla EVAL F4 para evaluar esta sub-expresión. El resultado es:



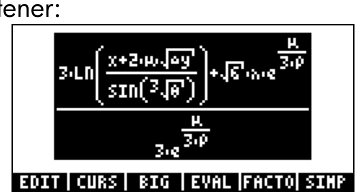
Algunas expresiones algebraicas no se pueden simplificar más. Intente lo siguiente: ▲ F4 . Usted notará que sucede nada, con excepción de destacar de la discusión entera de la función de LN. Esto es porque esta expresión no puede ser evaluada (o simplificada) más que esto según las reglas del CAS. Usando: ▲ F4 no produce otra vez ninguna cambio en la expresión. Otra secuencia de entradas ⬆ F4 , sin embargo, modifica la expresión como sigue:



Una aplicación más de ⬆ F4 produce más cambios:



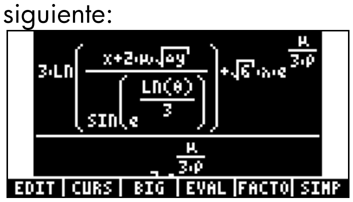
Esta expresión no cabe adentro de la pantalla del escritor de ecuaciones. Podemos ver la expresión entera usando caracteres pequeños. Presione la tecla BIG F3 para obtener:



Incluso con los caracteres grandes (inglés, large font), es posible navegar la expresión entera usando el cursor transparente de edición. Use lo siguiente: F3 ▼▼▼▼, para fijar el cursor transparente de edición encima del factor 3 en el primer término del numerador. Entonces, presione la tecla ▶, para navegar a través de la expresión.

Simplificación de una expresión

Presione la tecla BIG F3 para conseguir que la pantalla luzca como en la figura anterior. Después, presione la tecla SIMP F3 , para ver si es posible simplificar esta expresión como se demuestra en el escritor de ecuaciones. El resultado es la pantalla siguiente:



Esta pantalla demuestra la discusión de la función SIN, a saber, $\sqrt[3]{\theta}$,

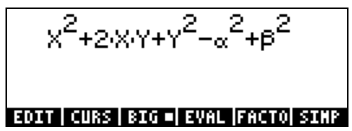
transformado en $e^{\frac{LN(\theta)}{3}}$. Esto no puede parecerse como una simplificación, pero lo es en el sentido que la función de la raíz cúbica ha sido substituida por las funciones inversas exp-LN.

Factorizando una expresión

En este ejercicio intentaremos descomponer en factores una expresión polinómica. Para continuar el ejercicio anterior, presione ENTER. Entonces, active el escritor de ecuaciones otra vez al presionar ↱ EQW . Escriba la ecuación:

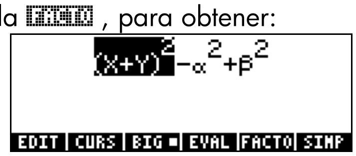
X y^x 2 ▶ + 2 × X × ALPHA Y + ALPHA Y y^x 2 ▶ −
ALPHA ↱ A y^x 2 ▶ ▶ + ALPHA ↱ B y^x 2

que resulta en:

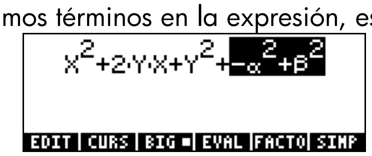


Seleccionemos los primeros 3 términos en la expresión y procuremos descomponer en factores la sub-expresión: ↱ ▲ ▼ ↱ ▶ ↱ ▶ . Esto produce:

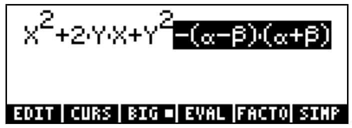
Ahora presiones la tecla FACTO , para obtener:



Presione ↱ UNDO para recuperar la expresión original. Después, use las teclas: ▼ ▼ ▼ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▲ ▲ ▲ ↱ ▶ para seleccionar los dos últimos términos en la expresión, es decir,



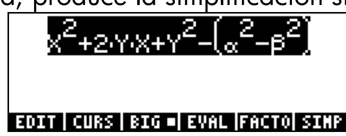
Presione la tecla FACTO , para obtener:



Presione (↱) UNDO para recuperar la expresión original. Ahora, seleccionemos la expresión entera presionando la tecla (▲). Y presione la tecla FACTO , para obtener:

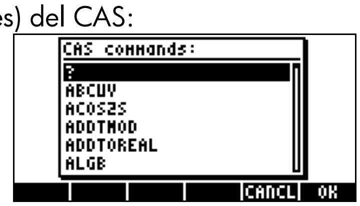
Presione (↱) UNDO para recuperar la expresión original.

Nota: Al presionar las teclas EVAL o SIMP, mientras que se selecciona la expresión original entera, produce la simplificación siguiente de la expresión:



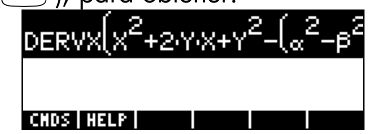
Usando la tecla CMDS

Con la expresión polinómica original usada en el ejercicio anterior todavía seleccionada, presione la tecla NXT para mostrar las teclas de menú CMDS y HELP. Estos dos comandos pertenecen a la segunda parte del menú disponible con el escritor de ecuaciones. Intentemos este ejemplo como aplicación de la tecla CMDS: Presione la tecla CMDS para conseguir la lista de los comandos (funciones) del CAS:



Después, seleccionar el comando DERVX (la derivada con respecto a la variable X, la variable independiente actual del CAS) usando: ALPHA D ▼ ▼ ▼ . La función DERVX ahora se selecciona:

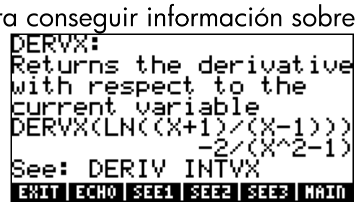
Presione la tecla OK (F6), para obtener:



Después, presione la tecla NXT para recuperar el menú original del escritor de ecuaciones, y presione la tecla EVAL (F4) para evaluar esta derivada. El resultado es:

Usar el menú HELP

Presione la tecla NXT para mostrar las teclas de menú CMDS y HELP. Presione la tecla HELP para conseguir la lista de las funciones del CAS. Entonces, presione ALPHA D ▼ ▼ ▼ para seleccionar la función DERVX. Presione la tecla OK (F6), para conseguir información sobre la función DERVX:



La explicación detallada en el uso de la función informativa para el CAS se presenta en el capítulo 1 y apéndice C. Para volver al escritor de ecuaciones, presione la tecla EXIT. Presione ENTER para abandonar el escritor de ecuaciones.

Funciones de edición BEGIN, END, COPY, CUT y PASTE

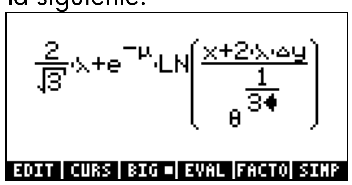
Para facilitar la edición, ya sea con el escritor de ecuaciones o en la pantalla, la calculadora proporciona cinco funciones de edición, BEGIN, END, COPY, CUT y PASTE, activadas combinando la tecla (↱) con las teclas (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), y (3,3), respectivamente. Estas teclas están situadas en la parte extrema izquierda de las filas 2 y 3. La acción de estas funciones de edición es la siguiente:

BEGIN: marca el principio de una cadena de caracteres para editar
END: marca el final de una cadena de caracteres para corregir
COPY: copia la cadena de caracteres seleccionados con BEGIN y END
CUT: remueve la cadena de caracteres seleccionados con BEGIN y END
PASTE: inserta una secuencia de caracteres, copiada o removida previamente, en la posición actual del cursor

Para ver un ejemplo, activemos el escritor de ecuaciones y escribamos la siguiente expresión (utilizada en un ejercicio anterior):

2 ÷ √x 3 ▶ ▶ × ALPHA ↱ M + ↰ e^x +/- ALPHA ↱ M
▶ ▶ × ↱ LN ALPHA ↰ X + 2 × ALPHA ↱ M × ALPHA ↱ C
ALPHA ↰ Y ▲ ▲ ▲ ÷ ALPHA ↱ T y^x 1 ÷ 3

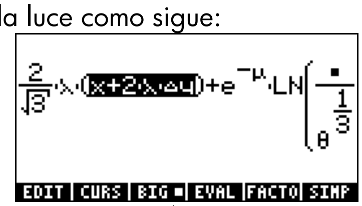
La expresión original es la siguiente:



Deseamos quitar el sub-expresión *x+2·λ·Δy* del argumento de la función *LN*, y moverla a la derecha de *λ* en el primer término. He aquí una posibilidad:

▼ ◀ ◀ ◀ ▲ ▲ ▲ ↱ CUT ◀ ◀ ▲ × ↱ PASTE

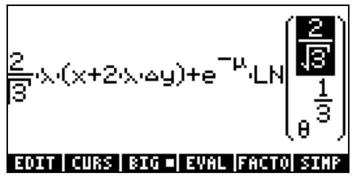
La expresión modificada luce como sigue:



Después, copiaremos la fracción *2/√3* del factor extremo izquierdo en la expresión, y la pondremos en el numerador del argumento de la función LN. Intente lo siguiente:

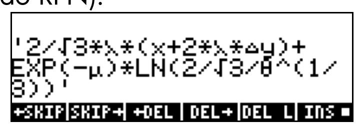
▼ ▼ ◀ ◀ ▲ ▲ ▲ ↱ COPY ▼ ▼
↱ ▶ ◀ ◀ ◀ ↱ PASTE

La pantalla resultante es la siguiente:



Las funciones BEGIN y END no ser necesario al operar dentro del escritor de ecuaciones, puesto que podemos seleccionar cadenas de caracteres usando las teclas direccionales. Las funciones BEGIN y END son más útiles al corregir una expresión con el editor de línea. Por ejemplo, seleccionemos la expresión $x+2\cdot\lambda\cdot\Delta y$ de esta expresión, pero usando el editor de línea dentro del escritor de ecuaciones, como sigue: [↱] [▲] [F1]

La pantalla del editor de línea lucirá así (comillas se muestran solamente si la calculadora está en modo RPN):

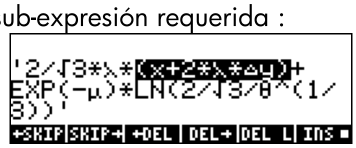


Para seleccionar la sub-expresión de interés, use:

[▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [↱] BEGIN

[▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [↱] END

La pantalla muestra la sub-expresión requerida :

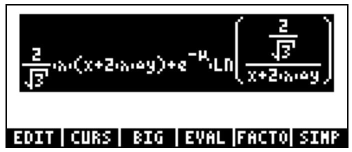


Podemos ahora copiar esta expresión y ponerla en el denominador del argumento de LN, como sigue: [↱] COPY [▶] [▶] … (27 times) … [▶]

[◀] [◀] … (9 times) … [◀] [↱] PASTE

El editor de línea ahora luce así:

Al presionar [ENTER] se muestra la expresión en el escritor de ecuaciones (en formato de caracteres pequeños, presione la tecla BIG [F3]):



Presione [ENTER] para abandonar el escritor de ecuaciones.

Creando y editando sumatorias, derivadas, e integrales

Las sumatorias, derivadas, e integrales se utilizan comúnmente en el cálculo, en la probabilidad y en la estadística. En esta sección demostramos algunos ejemplos de tales operaciones creadas con el escritor de ecuaciones. Utilizar el modo de ALG.

Sumatorias

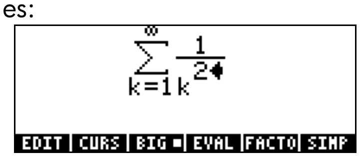
Utilizaremos el escritor de ecuaciones para escribir la sumatoria siguiente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Presione [↱] EQW para activar el escritor de ecuaciones. Entonces, presione [↱] Σ para incorporar el signo de sumatoria. Nótese que el signo, cuando se escribe en el escritor de ecuaciones, proporciona localidades de entrada para el índice de la sumatoria así como para la cantidad que es sumada. Para llenar estas localidades de entrada, utilice lo siguiente:

[ALPHA][↰][K][▶][1][▶][↰] ∞ [▶][1][÷][ALPHA][↰][K][Y^x][2]

La pantalla que resulta es:

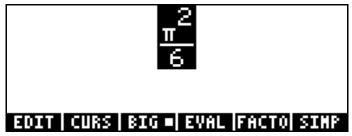


Para ver la expresión correspondiente en el editor de línea, presione [↱][▲] y la tecla [F1] para mostrar:

Esta expresión demuestra la forma general de a sumatoria escrita directamente en la pantalla o en el editor de línea:

Σ(*índice = valor_inicial*, *valor_final*, *sumando*)

Presione [ENTER] para volver al escritor de ecuaciones. La pantalla que resulta muestra el valor del sumatoria,



Para recobrar la sumatoria sin evaluar, use [→] UNDO. Para evaluar la sumatoria otra vez, usted puede utilizar [F4]. Esto demuestra otra vez que

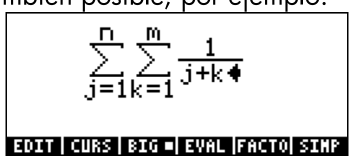
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Usted puede utilizar el escritor de ecuaciones para probar que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty.$$

Esta sumatoria (representando una serie infinita) se dice que diverge.

Doble sumatorias son también posible, por ejemplo:



Derivadas

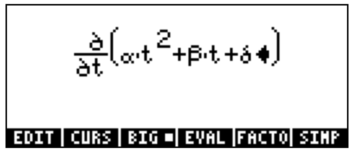
Utilizaremos el escritor de ecuaciones para escribir la siguiente derivada:

$$\frac{d}{dt}(\alpha\cdot t^2+\beta\cdot t+\delta)$$

Presione [→] EQW para activar el escritor de ecuaciones. Entonces presione [→] ∂ para escribir el símbolo de la derivada (parcial). Notar que la muestra, cuando se escribe en el escritor de ecuaciones, proporciona las localizaciones de la entrada para la expresión que es distinguida y la variable de la diferenciación. Para llenar estas localizaciones de la entrada, utilizar lo siguiente:

[ALPHA] [←] [T] [▶] [ALPHA] [→] [A] [×] [ALPHA] [←] [T] [yˣ] [2]
[▶] [▶] [+] [ALPHA] [→] [B] [×] [ALPHA] [←] [T] [+] [ALPHA] [→] [D]

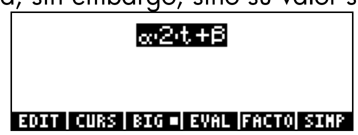
La pantalla resultante es la siguiente:



Para ver la expresión correspondiente en el editor de línea, presione ↱ ▲ y la tecla F1, para mostrar:

Esto indica que la expresión general para un derivada en el editor de línea o en la pantalla es: ∂*variable*(*función de variables*)

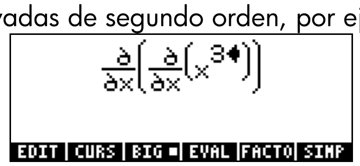
Presione ENTER para volver al escritor de ecuaciones. La pantalla que resulta no es la derivada escrita, sin embargo, sino su valor simbólico, a saber,



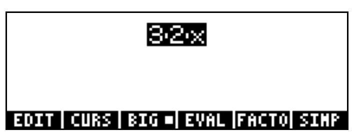
Para recobrar la expresión de la derivada, use ↱ UNDO. Para evaluar la derivada otra vez, usted puede utilizar la tecla F4. Esto demuestra otra vez que

$$\frac{d}{dt}(\alpha \cdot t^2 - \beta \cdot t + \delta) = 2\alpha \cdot t + \beta \ .$$

Es posible escribir derivadas de segundo orden, por ejemplo:



la cuál se evalúa como:



Nota: La notación $\frac{\partial}{\partial x}(\ )$ es apropiado de derivadas parciales. La notación apropiada para las derivadas totales (i.e., derivadas de una variable) es

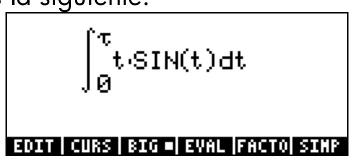
$\frac{d}{dx}(\ )$. La calculadora, sin embargo, no distingue entre las derivadas parciales y totales.

Integrales definidas

Utilizaremos el escritor de ecuaciones para incorporar la integral definida siguiente: $\int_0^\tau t \cdot \sin(t) \cdot dt$. Presione ⟜ _EQW_ para activar el escritor de ecuaciones. Entonces presione ⟜ _∫_ para escribir el símbolo de la integral. Notar que este símbolo, cuando se escribe en el escritor de ecuaciones, proporciona las localidades de entrada para los límites de la integración, el integrando, y la variable de la integración. Para llenar estas localidades de entrada, utilice lo siguiente:

0 ▶ ALPHA ⟜ U ▶ ALPHA ⟝ T × SIN ALPHA ⟝ T ▶ ALPHA ⟝ T .

La pantalla resultante es la siguiente:

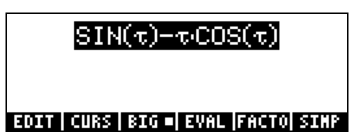


Para ver la expresión correspondiente en el editor de línea, presione ▲ ▲ y la tecla F1 , para mostrar:

Esto indica que la expresión general para una integral en el editor de línea o en la pantalla es:

∫(*límite_inferior, límite_superior,integrando,variable_de_integración*)

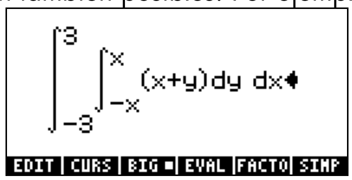
Presione ENTER para regresar al escritor de ecuaciones. La pantalla que resulta no es el integral definida que escribimos, sin embargo, si no su valor simbólico, a saber,



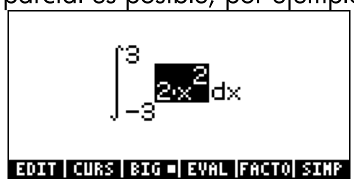
Para recuperar la expresión de la integral use ⟜ _UNDO_ . Para evaluar la integral otra vez, usted puede utilizar F4 . Esto demuestra otra vez que

$$\int_0^\tau t \cdot \sin(t) \cdot dt = \sin(\tau) - \tau \cdot \cos(\tau)$$

Los integrales dobles son también posibles. Por ejemplo,



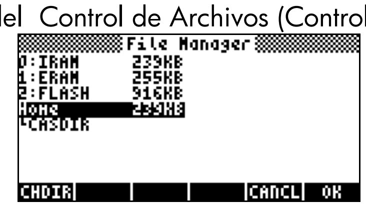
la cuál se evalúa a 36. La evaluación parcial es posible, por ejemplo:



Este integral evalúa a 36.

Organización de los datos en la calculadora

Es posible organizar los datos en la calculadora al almacenar variables en una colección de directorios. Para entender la memoria de la calculadora, primero echamos una ojeada el directorio del archivo. Presione las teclas FILES (primera tecla en la segunda fila de teclas de abajo a arriba) para conseguir la pantalla del Control de Archivos (Control de Archivos):



Esta pantalla muestra un bosquejo de la memoria de la calculadora y del árbol del directorio. La pantalla demuestra que la calculadora tiene tres puertos de memoria (o particiones de memoria), port *0:IRAM*, *port 1:ERAM*, y *port 2:FLASH* . Los puertos de la memoria se utilizan para almacenar las aplicaciones o bibliotecas desarrolladas por terceras partes, así como para objetos de reserva (backup). El tamaño de los tres diversos puertos también se indica. Las cuartas y subsecuentes líneas en esta pantalla demuestran el árbol del directorio de la calculadora. El directorio superior (destacado actualmente) es el directorio *Home*, y tiene predefinido en él un sub-directorio llamado *CASDIR*. La pantalla del *Control de Archivos* tiene tres funciones asociadas a las teclas del menú':

- CHDIR (F1): Cambiar al directorio seleccionado
- CANCL (F5): Acción de cancelación
- OK (F6): Aprobar una selección

Por ejemplo, cambie el directorio a CASDIR, presione la tecla ▼, y presione CHDIR (F1). Esta acción cierra la pantalla del *Control de Archivos* y nos vuelve a la pantalla normal de la calculadora. Usted notará que la segunda línea superior en la pantalla ahora comienza con los caracteres { HOME CASDIR } indicando que el directorio actual es CASDIR dentro del directorio HOME.

Funciones para la manipulación de variables

Esta pantalla incluye 20 funciones asociadas a las llaves suaves del menú que se pueden utilizar para crear, para corregir, y para manipular variables. Las primeras seis funciones son las siguientes:

- EDIT Para corregir una variable destacada
- COPY Para copiar una variable destacada
- MOVE Para mover una variable destacada
- RCL Para recordar el contenido de una variable destacada
- EVAL Para evaluar una variable destacada
- TREE Para ver el árbol del directorio donde se contiene la variable

Si Ud. presiona la tecla NXT, el siguiente conjunto de funciones es:

- PURGE Para borrar, o cancelar, una variable
- RENAM Para retitular una variable
- NEW Para crear una nueva variable
- ORDER Para ordenar un conjunto de variables en el directorio
- SEND Para enviar una variable a otra calculadora o computadora
- RECV Para recibir una variable de otra calculadora o computadora

Si Ud. presione la tecla NXT, el tercer es:

- HALT Para volver a la pantalla temporalmente
- VIEW Para ver contenido de una variable
- EDITB Para editar contenido de variable binaria (similar a EDIT)
- HEADE Para mostrar el directorio que contiene una variable en el encabezado
- LIST Proporciona una lista de nombres y descripción de variables

SORT Para clasificar variables según ciertos criterios

Si Ud. presiona la tecla NXT, el último conjunto de funciones es:

XSEND Para enviar variable con protocolo XMODEM

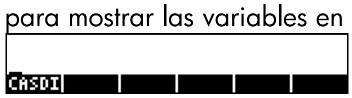
CHDIR Para cambiar el directorio

Para moverse entre las diversas funciones suaves del menú, usted puede utilizar no solamente la tecla NXT, sino también la tecla PREV (← PREV).

Se invita al usuario que intente estas funciones en el suyo o sus el propio. Sus usos son directos.

El directorio HOME

Para acceder al directorio HOME, presiónese la función UPDIR (← UPDIR) -- repítase cuantas veces sea necesario -- hasta que la especificación { HOME } se muestra en la segunda línea del encabezado de la pantalla. Como una alternativa, utilícese ← (manténgase presionada la tecla) UPDIR. En este ejemplo, el directorio HOME contiene solamente el sub-directorio CASDIR. Presiónese la tecla VAR para mostrar las variables en las teclas de menú:

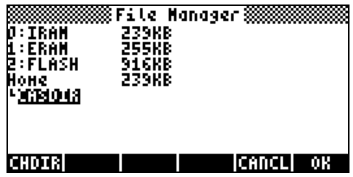


Sub-directorios

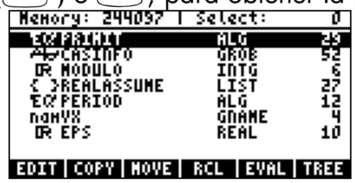
Para almacenar datos en una colección de directorios bien organizada, el usuario podría crear una serie de sub-directorios dentro del directorio HOME, y aún más sub-directorios dentro de estos sub-directorios, hasta formar una jerarquía de directorios similar a los directorios en un ordenador (computador, o computadora). Los sub-directorios pueden identificarse con nombres que reflejen el contenido de los mismos, o con cualquier nombre que el usuario quiera darles.

El sub-directorio CASDIR

El sub-directorio CASDIR contiene un número de variables necesarias para la operación apropiada del CAS (Computer Algebraic System, ver el apéndice C). Para ver el contenido del directorio, podemos utilizar las teclas: ← FILES lo cuál abre el *Control de Archivos* una vez más:



Esta vez el CASDIR se destaca en la pantalla. Para ver el contenido del directorio presione OK (F6) o ENTER, para obtener la pantalla siguiente:



La pantalla muestra una tabla que describe las variables contenidas en el directorio de CASDIR. Éstas son las variables predefinidas en la memoria de la calculadora que establecen ciertos parámetros para la operación del CAS (véase el apéndice C). La tabla anterior contiene 4 columnas:

- La primera columna indica el nombre de la variable (por ejemplo, 'EQ' significa una variable conteniendo una ecuación, |R indica una variable del real, { } significa una lista, *nam* significa ' un nombre global ', y el símbolo representa una variable del gráficos.
- La segunda columna representa el nombre de las variables, es decir, *PRIMIT, CASINFO, MODULO, REALASSUME, PERIOD, VX,* y *EPS*.
- La columna número 3 muestra otra especificación para la variable escrita, por ejemplo, *ALG* significa una expresión algebraica, *GROB* significa un objeto gráfico, *INTG* significa una variable numérica entera, *LIST* significa una lista de datos, GNAME significa un nombre global, y *REAL* significa una variable numérica real (o de punto flotante).
- La cuarta y última columna representa el tamaño, en bytes, de la variable. Así, por ejemplo, variable PERIOD ocupa 12.5 bytes, mientras que la variable REALASSUME ocupa 27.5 bytes (1 byte = 8 bits, 1 bit es la unidad de la memoria más pequeña en computadoras y calculadoras).

Variables de CASDIR en la pantalla

Presionando la tecla ON cierra la pantalla anterior y nos vuelve a la pantalla normal de la calculadora. Por defecto, conseguimos el menú TOOL:

Podemos ver las variables contenidas en el directorio actual, CASDIR, al presionar la tecla [VAR] (primera tecla en la segunda fila del teclado). Esto produce la pantalla siguiente:

Presione la tecla [NXT] para mostrar otras variables almacenadas en este directorio:

- Para ver el contenido de la variable EPS, por ejemplo, use [→] [EPS]. Esto demuestra que el valor de EPS es .0000000001
- Para ver el valor de una variable numérica, necesitamos presionar solamente la tecla del menú para la variable. Por ejemplo, presione [EPS] seguido de [ENTER], muestra el mismo valor de la variable en la pantalla, si la calculadora se fija a algebraico. Si la calculadora se fija al modo RPN, usted necesita solamente presionar la tecla [ENTER].
- Para ver el nombre completo de una variable, presione el apóstrofe primero ['], y después la tecla correspondiente del menú para la variable. Por ejemplo, para la variable listada en la pantalla como PERIO, usamos: ['] [PERIO], lo cual produce como salida el texto: 'PERIOD'. Este procedimiento se aplica a los modos algebraicos y RPN de la calculadora.

Variables en CASDIR

Las variables pre-definidas contenidas en el directorio de CASDIR son las siguientes:

PRIMIT	Primitiva (anti-derivada) calculada más recientemente, no una variable predefinida, sino una creada por un ejercicio anterior.
CASINFO	un gráfico que proporciona la información del CAS
MODULO	Modulo para la aritmética modular (predefinido = 13)
REALASSUME	Lista de los nombres de variables asumidos como reales
PERIOD	Período para funciones trigonométricas (predefinido= 2π)
VX	Nombre de la variable independiente (predefinido = X)
EPS	Valor de incremento pequeño, epsilon (predefinido= 10^{-10})

Estas variables se utilizan para la operación del CAS.

Escritura de nombres de directorios y variables

Para nombrar subdirectorios, y a veces, variables, usted tendrá que escribir cadenas continuas de caracteres, que pueden o no combinarse con números. En vez de presionar [ALPHA], [ALPHA][←], o [ALPHA][→] para escribir cada letra, uno puede mantener presionada la tecla [ALPHA] y escribir las letras requeridas. Es posible también asegurar el teclado de la calculadora en el modo alfabético de la siguiente manera:

[ALPHA][ALPHA] asegura el teclado alfabético en mayúsculas. Cuando se asegura el teclado alfabético de esta manera, es necesario presionar la tecla [←] antes de escribir la letra correspondiente en minúscula, mientras que al presionarse la tecla [→] antes de presionar una letra produce un carácter especial. Si el teclado alfabético está ya asegurado en mayúsculas, para asegurarlo en minúsculas utilícese [←][ALPHA]

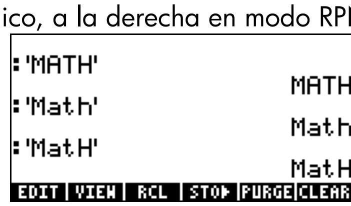
[ALPHA][ALPHA][←][ALPHA] asegura el teclado alfabético en minúsculas. Cuando se asegura el teclado alfabético de esta manera, es necesario presionar la tecla [←] antes de escribir la letra correspondiente en mayúscula. Para remover el teclado asegurado en minúsculas, presiónese [←][ALPHA]

Para remover el teclado asegurado en mayúsculas, presiónese [ALPHA]

Ejecútense los siguientes ejercicios:

['][ALPHA][ALPHA][M][A][T][H][ENTER]
['][ALPHA][ALPHA][M][←][A][←][T][←][H][ENTER]
['][ALPHA][ALPHA][M][←][ALPHA][A][T][←][H][ENTER]

La calculadora muestra los siguientes resultados (a la izquierda en modo Algebraico, a la derecha en modo RPN):



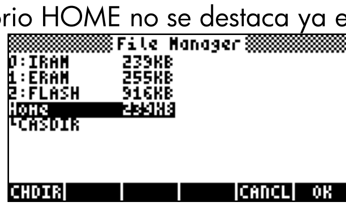
Nota: si se fija la bandera 60 del sistema, usted puede asegurar el teclado alfabético al presionar ALPHA. Véase el Capítulo 1 para mayor información sobre banderas o señales del sistema.

Crear sub-directorios

Los sub-directorios pueden ser creados usando el ambiente FILES o usando la función CRDIR. Los dos procedimientos para crear sub-directorios se presentan a continuación.

Usando el menú FILES

Sin importar el modo de operación de la calculadora (algebraico o RPN), podemos crear un árbol de directorio, basado en HOME, usando las funciones activadas en el menú FILES. Presione ← FILES para activar el menú FILE. Si el directorio HOME no se destaca ya en la pantalla, es decir,



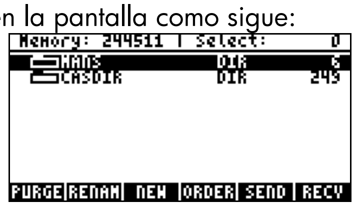
use las teclas ▲▼) para destacarlo. Entonces, presione la tecla OK (F6). La pantalla puede parecer esto:

mostrando que solamente un objeto existe actualmente en el directorio HOME, a saber, el sub-directorio de CASDIR. Creemos otro sub-directorio llamado MANS (MANualeS) donde almacenaremos las variables desarrolladas como ejercicios en este manual. Para crear este sub-directorio primero use: NXT NEW (F3) . Esto producirá la siguiente forma interactiva:

La localidad *Object*, la primera en la forma interactiva, se selecciona por defecto. Este campo de entrada puede incluir el contenido de una nueva variable que se está creando. Puesto que no tenemos ningún contenido para el nuevo sub-directorio a este punto, omitimos simplemente este campo de la entrada al presionar la tecla ▼. La localidad *Name* se selecciona ahora:

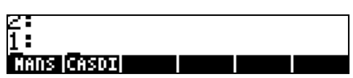
Aquí es donde incorporamos el nombre del nuevo sub-directorio (o variable, de acuerdo con las circunstancias), como sigue: ALPHA ALPHA M A N S ENTER

El cursor se mueve a la posición *_Directory*. Presione la tecla ✓CHK (F3) para especificar que usted está creando un directorio, y presione OK para abandonar la forma interactiva. El listado de variables para el directorio HOME será mostrado en la pantalla como sigue:



La pantalla indica que hay un nuevo directorio (MANS) dentro del directorio HOME.

Después, crearemos un sub-directorio llamado INTRO (INTROducción), dentro de MANS, para contener variables creadas como ejercicio en secciones subsecuentes de este capítulo. Presione la tecla ON para volver a la pantalla normal de la calculadora (el menú TOOLS se mostrará). Entonces, presione VAR para mostrar el contenido del directorio HOME en las teclas de menú. La pantalla puede lucir como la siguiente (si usted ha creado otras variables en el directorio HOME, éstas se mostrarán en las etiquetas de las teclas del menú también):



Para moverse dentro del directorio MANS, presione la tecla correspondiente (F1 en este caso), y ENTER si en modo algebraico. El árbol del directorio será demostrado en la segunda línea de la pantalla como {HOME MANS}. Sin embargo, no habrá etiquetas asociadas a las teclas, según lo demostrado abajo, porque no hay variables definidas dentro de este directorio.
Creemos el sub-directorio INTRO usando:

← FILES OK NXT NEW ▼ ALPHA ALPHA I N T R O ENTER ✓CHK OK

Presione la tecla ON, seguida por VAR, para ver el contenido del directorio MANS como sigue:

Presione la tecla INTRO para moverse dentro del sub-directorio INTRO. Esto mostrará un sub-directorio vacío. Más adelante, haremos algunos ejercicios en crear variables.

Usando la función CRDIR

La función CRDIR puede ser utilizado crear directorios. Esta función está disponible con la tecla del catálogo de la función (la tecla → CAT, segunda tecla en la cuarta fila del teclado), a través de los menús de programación (← PRG, la misma tecla que → CAT), o simplemente escribiendo el nombre de la función.

- Con la llave del catálogo
  Presione → CAT ALPHA C. Use las teclas ▲▼ para localizar la función de CRDIR. Presione la tecla OK para activar la función.
- A través de los menús de programación
  Presione ← PRG. Esto producirá el menú siguiente para programar:

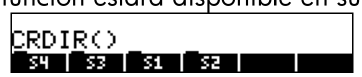
  Use la tecla (▼) para seleccionar la opción *2. MEMORY…* o simplemente presione 2. Entonces, presione OK. Esto producirá el menú siguiente:

Use la tecla (▼) para seleccionar la opción *5. DIRECTORY*, o simplemente presione 5. Entonces, presione OK. Esto producirá el menú siguiente:

Use la tecla (▼)para seleccionar la opción *5. CRDIR*, y presione OK.

Función CRDIR en modo algebraico

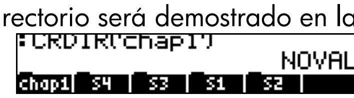
Una vez que usted haya seleccionado CRDIR con uno de los medios demostrados arriba, la función estará disponible en su pantalla como sigue:



A este punto, usted necesita escribir un nombre de directorio, digamos, *chap1* :

ALPHA ALPHA ← ALPHA C H A P 1 ALPHA ENTER

El nombre del nuevo directorio será demostrado en las teclas, por ejemplo,



Función CRDIR en modo RPN

Para usar la función CRDIR en modo RPN usted necesita tener el nombre del directorio ya disponible en la pantalla antes de tener acceso a la función. Por ejemplo:ALPHA ALPHA ← ALPHA C H A P 2 ALPHA ENTER

Entonces active la función CRDIR por cualquiera de los medios demostrados arriba, por ejemplo, con la tecla → _CAT_ :

Presione la tecla OK para activar la función, para crear el sub-directorio:

Mudanza entre sub-directorios

Bajar el árbol del directorio, usted necesita presionar la tecla correspondiente al sub-directorio al cual usted desea moverse. La lista de variables en un sub-directorio se puede producir al presionar la tecla VAR (VARiables). Para moverse hacia arriba en el árbol del directorio, utilice la función UPDIR, esto es, escriba ← UPDIR .

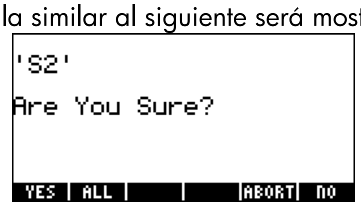
Alternativamente, usted puede utilizar el menú FILES, i.e., presione ← FILES . Use las teclas (▲▼)para seleccionar el sub-directorio a donde usted desea moverse, y entonces presione la tecla CHDIR (CHange DIRectory) o F1 . Esto mostrará el contenido del sub-directorio a donde usted se trasladó en las etiquetas de las teclas de menú.

Suprimir sub-directorios

Para suprimir un sub-directorio, utilice uno de los procedimientos siguientes:

Usando el menú FILES

Presione la tecla ← FILES para activar el menú FILES. Seleccionar contener del directorio sub-directorio usted desea suprimir, y presione la tecla CHDIR si es necesario. Esto cerrará el menú FILES y mostrará el contenido del directorio que usted seleccionó. En este caso usted necesitará presionar ENTER. Presione la tecla OK para enumerar el contenido del directorio en la pantalla. Seleccione el sub-directorio (o variable) que usted desea suprimir. Presione NXT PURGE. Una pantalla similar al siguiente será mostrada:



El texto 'S2' en esta forma es el nombre del sub-directorio que se está suprimiendo . Las teclas proporcionar las opciones siguientes:

YES (F1) Proceder con suprimir sub-directorio (o variable)

ALL (F2) Proceder con suprimir todos los sub-directorios (o variables)
NEXT (F5) No suprimir sub-directorio (o variable) de una lista
NO (F6) No suprimir sub-directorio (o variable)

Después de seleccionar una de estas cuatro funciones, volverá a la pantalla que enumera el contenido del sub-directorio. La función NEXT, sin embargo, mostrará un mensaje de error:

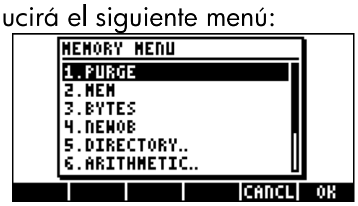
y usted tuvo que presionar OK, antes de volver al listado de las variable.

Usando la función PGDIR

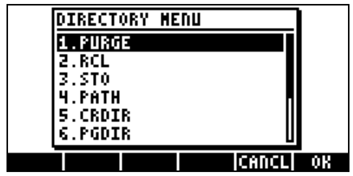
La función PGDIR puede ser utilizado para purgar directorios. Como la función CRDIR, la función de PGDIR está disponible con → CAT o con ← PRG , o puede simplemente ser escrita.

- Con la tecla del catálogo
  Presione → CAT ALPHA ALPHA P G . Esto debe destacar la función de PGDIR. Presione OK para activar la función.
- Con los menús de programación
  Presione ← PRG . Esto producirá el menú siguiente para programar:

Use la tecla (▼) para seleccionar la opción *2. MEMORY…* Entonces, Presione OK. Esto producirá el siguiente menú:



Use la tecla (▼) para seleccionar la opción *5. DIRECTORY*. Entonces, presione OK. Esto producirá el siguiente menú:



Use la tecla (▼) para seleccionar la opción *6. PGDIR*, y presione OK.

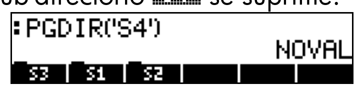
Función PGDIR en modo algebraico

Una vez que usted haya seleccionado la función PGDIR por uno de los medios demostrados arriba, la función estará disponible en su pantalla como sigue:

A este punto, usted necesita escribir el nombre de un directorio existente, digamos, *S4* :

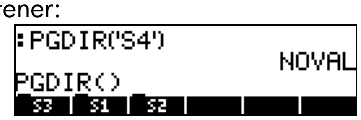
ALPHA S 4 ENTER

Consecuentemente, el sub-directorio S4 se suprime:

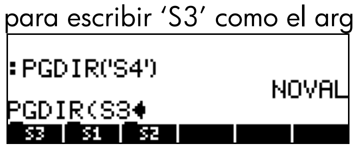


En vez de escribir el nombre del directorio, usted puede presionar simplemente la tecla correspondiente en el listado de la función PGDIR(), por ejemplo.,

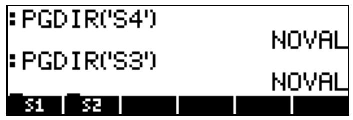
Presione OK, para obtener:



Entonces, Presione S3 para escribir 'S3' como el argumento de PGDIR.



Presione ENTER para suprimir el sub-directorio:

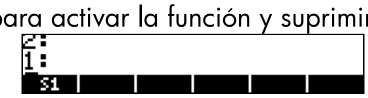


Función PGDIR en modo RPN

Para utilizar PGDIR en modo RPN usted necesita tener el nombre del directorio, entre apóstrofes, ya disponibles en la pantalla antes de tener acceso a la función. Por ejemplo: ['] [ALPHA] [S] [2] [ENTER]

Entonces acceda la función PGDIR por cualquiera de los medios demostrados arriba, por ejemplo., a través de la tecla [→] _CAT :

Presione la tecla [OK] para activar la función y suprimir el sub-directorio:



Usando la función PURGE a partir del menú TOOL

El menú TOOL está disponible al presionar la tecla [TOOL] (Modos algebraico y RPN):

La función PURGE está disponible al presionar la tecla [PURGE] ([F5]). En los ejemplos siguientes deseamos suprimir el sub-directorio *S1*:

- Modo algebraico: Escriba [PURGE] [VAR] [S1] [ENTER]
- Modo RPN: Escriba [VAR] ['] [S1] [ENTER] [TOOL] [PURGE] [VAR]

Variables

Las variables en la calculadora son similares a los archivos en el disco duro de un ordenador (computador, o computadora). Es posible almacenar un objeto (valores numéricos, expresiones algebraicas, listas, vectores, matrices, programas, etc.) en una variable. Las variables se identifican por un nombre, el cual puede ser cualquier combinación de caracteres alfabéticos o numéricos, comenzando siempre por una letra (ya sea castellana o griega). Algunos caracteres no alfabéticos, tales como la flecha (→), pueden utilizarse en el nombre de una variable, si se combinan con un carácter alfabético. Por lo tanto, '→A' es un nombre válido para una variable, pero '→' no lo es. Ejemplos de nombres válidos para una variable son: 'A', 'B', 'a', 'b', 'α', 'β', 'A1', 'AB12', '→A12','Vel','Z0','z1', etc.

No se puede asignar a una variable un nombre igual al de una función en la calculadora. Los nombres reservados por la calculadora son los siguientes: ALRMDAT, CST, EQ, EXPR, IERR, IOPAR, MAXR, MINR, PICT, PPAR, PRTPAR, VPAR, ZPAR, der_, e, i, n1,n2, …, s1, s2, …, ΣDAT, ΣPAR, π, ∞

Las variables pueden organizarse en sub-directorios.

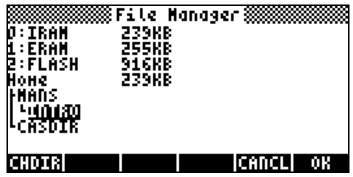
Creando variables

Para crear una variable, podemos utilizar el menú FILES, a lo largo de las líneas de los ejemplos demostrados arriba para crear un sub-directorio. Por ejemplo, dentro del sub-directorio {HOME MANS INTRO}, creado en un ejemplo anterior, deseamos almacenar las variables siguientes con los valores demostrados:

Nombre	***Contenidos***	***Tipo***
A	12.5	real
α	-0.25	real
A12	3×10^5	real
Q	'r/(m+r)'	algebraico
R	[3,2,1]	vector
z1	3+5i	complejo
p1	<< → r 'π*r^2' >>	programa

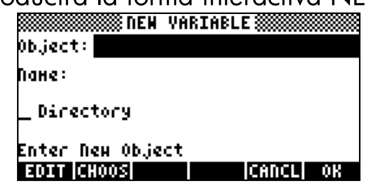
Usando el menú FILES

Utilizaremos el menú FILES para escribir la variable A. Asumimos que estamos en el sub-directorio {HOME MANS INTRO}. Para escoger este sub-directorio, use lo siguiente: ← FILES y seleccione el sub-directorio INTRO según lo demostrado en esta pantalla:



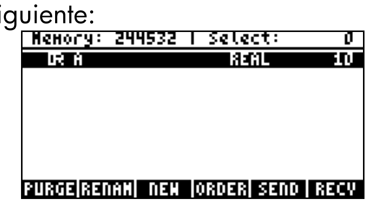
Presione OK para escoger el directorio. Usted conseguirá una pantalla que no muestra ningún elemento (el sub-directorio INTRO está vacío a este punto)

Presione la tecla NXT para acceder el siguiente conjunto de teclas, y presione la tecla NEW. Esto producirá la forma interactiva NEW VARIABLE:



Para escribir la variable A (ver la tabla anterior), primero incorporamos su contenido, a saber, el número 12.5, y después su nombre, A, como sigue: 1 2 . 5 OK ALPHA A OK. Dando por resultado la pantalla siguiente:

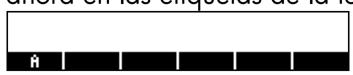
Presione OK una vez más para crear la variable. La nueva variable se muestra en el listado siguiente:



El listado indica una variable real (|R), cuyo nombre es A, y que ocupa 10.5 bytes de memoria. Para ver el contenido de la variable en esta pantalla, presione NXT VIEW.

- Presione la tecla GRAPH ([F1]) para ver el contenido en un formato
- gráfico.

- Presione la tecla TEXT ([F1]) para ver el contenido en formato de texto.
- Presione OK para regresar a la lista de variables
- Presione [ON] una vez más para regresar a la pantalla normal. La variable A aparece ahora en las etiquetas de la tecla:



Usando la función STO▶

Una manera más simple de crear una variable es usando la función STO (es decir, la tecla [STO▶]). Proporcionamos ejemplos en los modos algebraicos y RPN, creando el resto de las variables sugeridas anteriormente, a saber:

Name	***Contents***	***Escriba***
α	-0.25	real
A12	3×10^5	real
Q	‘r/(m+r)'	algebraico
R	[3,2,1]	vector
z1	3+5i	complejo
p1	<< $\rightarrow$ r 'π*r^2' >>	programa

- ***Modo algebraico***

  Use las teclas siguientes para almacenar el valor de –0.25 en la variable α: [0] [.] [2] [5] [+/-] [STO▶] [ALPHA] [→] [A]. A este punto, la pantalla lucirá como sigue:

  Esta expresión significa que el valor –0.25 se está almacenando en α (el símbolo ▶ sugiere la operación). Presione [ENTER] para crear la variable. La variable ahora se muestra en las etiquetas de tecla:

Los siguientes son las teclas requerido para incorporar las variables restantes:

A12: [3][EEX][5][STO▶][ALPHA][A][1][2][ENTER]

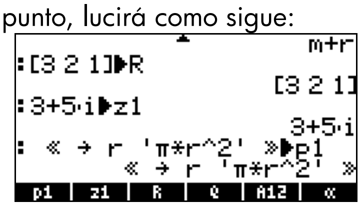
Q: ['][ALPHA][←][R][÷][←][()]
[ALPHA][←][M][+][ALPHA][←][R][▶][▶] [STO▶][ALPHA][Q][ENTER]

R: [←][[]] [3][→][,][2][→][,][1][▶] [STO▶][ALPHA][R][ENTER]

z1: [3][+][5][×][←][i] [STO▶][ALPHA][←][Z][1][ENTER] (si está necesitado, aceptar el cambio al modo Complex)

p1: [→][« »][→][→] [ALPHA][←][R]['][←][π][×]
[ALPHA][←][R][y^x][2][▶][▶][▶] [STO▶][ALPHA][←][P][1][ENTER]..

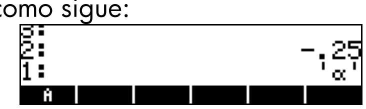
La pantalla, a este punto, lucirá como sigue:



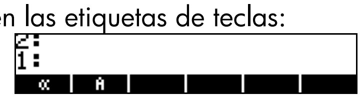
Usted verá seises de las siete variables enumeradas al píe de la pantalla: *p1, z1, R, Q, A12, α*.

- ***Modo RPN***

  Use las siguientes teclas para almacenar el valor de –0.25 en la variable α: [0][•][2][5][+/-][ENTER] [ALPHA][→][A][ENTER]. A este punto, la pantalla lucirá como sigue:



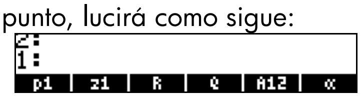
Esta expresión significa que el valor –0.25 está listo a ser almacenado en α. Presione [STO▶] para crear la variable. La variable se muestra ahora en las etiquetas de teclas:



Para incorporar el valor 3×10^5 dentro de A12, podemos utilizar una versión más corta del procedimiento:
[3][EEX][5]['][ALPHA][A][1][2][ENTER] [STO▶]

Aquí está una manera de incorporar el contenido de Q:

Q: ['] [ALPHA] [←] [R] [÷] [←] [()]
[ALPHA] [←] [M] [+] [ALPHA] [←] [R] [▶] [▶] ['] [ALPHA] [Q] [ENTER] [STO▶]
Para incorporar el valor de R, podemos utilizar una versión incluso más corta del procedimiento:
R: [←] [[ ]] [3] [SPC] [2] [SPC] [1] [▶] ['] [ALPHA] [R] [ENTER] [STO▶]
Notar eso para separar los elementos de un vector en modo RPN podemos utilizar la tecla espaciadora ([SPC]), en vez de la coma ([→] [,]) utilizada arriba en modo algebraico.
z1: ['] [3] [+] [5] [×] [←] [i] ['] [ALPHA] [←] [Z] [1] [STO▶] (si está necesitado, aceptar el cambio al modo Complex)
p1: [→] [« »] [→] [→] [ALPHA] [←] [R] ['] [←] [π] [×]
[ALPHA] [←] [R] [Y^x] [2] [▶] [▶] [▶] ['] [ALPHA] [←] [P] [1] [▶] [ENTER] [STO▶].
La pantalla, a este punto, lucirá como sigue:



Usted verá seis de las siete variables enumeradas al pié de la pantalla: *p1, z1, R, Q, A12,* α.

Verificando el contenido de las variables

Como ejercicio en la verificación del contenido de las variables, utilizaremos las siete variables escritas en el ejercicio anterior. Anteriormente demostramos cómo utilizar el menú FILES para verificar el contenido de una variable cuando creamos la variable A. En esta sección demostraremos una manera simple de verificar el contenido de una variable.

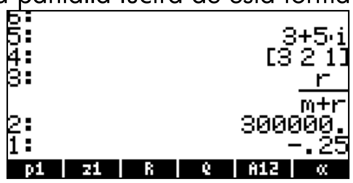
Presionando las teclas del menú de la variable

Este procedimiento mostrará el contenido de una variable siempre y cuando la variable contenga un valor numérico, un valor algebraico, o un arreglo. Por ejemplo, para las variables enumeradas anteriormente, presionar las teclas siguientes para ver el contenido de las variables:

La forma más simple de examinar los contenidos de una variable consiste en presionar la tecla de menú correspondiente al nombre de la variable. Por ejemplo, para las variables utilizadas anteriormente, ejecútense las siguientes instrucciones:

Modo algebraico

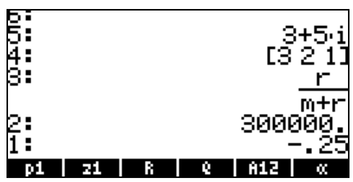
Presiónense las siguientes teclas: VAR z1 ENTER R ENTER Q ENTER. Al finalizar este ejercicio la pantalla lucirá de esta forma:



Modo RPN

En modos RPN, es necesario solamente presionar las teclas correspondientes al nombre de las variables para examinar el contenido de las mismas. Para el caso de interés, examínese el contenido de las variables *z1*, *R*, *Q*, *A12*, α, y *A*, creadas anteriormente, de la forma siguiente: VAR z1 R Q A12 α

Al finalizar este ejercicio, la pantalla lucirá de esta manera:

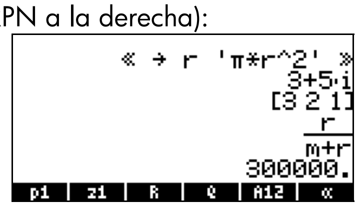


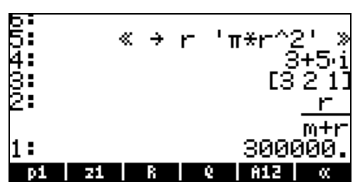
Utilizando la tecla ↱ seguida de la tecla del menú

Este procedimiento para examinar el contenido de las variables puede utilizarse ya sea en modo algebraico como en modo RPN. Ejecútense los siguientes ejemplos en cualquiera de los modos de operación:

VAR ↱ p1 ↱ z1 ↱ R ↱ Q ↱ A12

Los resultados se muestran a continuación (Modo algebraico a la izquierda, modo RPN a la derecha):





Nótese que en este caso el programa contenido en la variable p1 se lista en la pantalla. Para ver el contenido de α, utilícese:

[↱] [↱] [α]

Listado de las variables en la pantalla

Utilícese la combinación [↱] [▼] para listar el contenido de todas las variables en la pantalla. Por ejemplo:

Presiónese [ON] para recobrar la pantalla normal.

Sustituir el contenido de las variables

Sustituir el contenido de una variable se puede pensar como almacenar un valor diferente en una variable existente. Así, los ejemplos para crear las variables demostradas arriba se pueden utilizar para ilustrar el reemplazo del contenido de una variable.

Usando la función STO▶

Usando como ilustración las siete variables, *p1, z1, R, Q, A12, a,* y *A,* creados anterior, procederemos a cambiar el contenido de la variable *A12* (actualmente una variable numérica) con la expresión algebraica 'β/2', usando la función STO▶. Primero, usando el modo de operación algebraico:

['] [ALPHA] [↱] [B] [÷] [2] [▶] [STO▶] [A12] [ENTER]

Comprobar el nuevo contenido de la variable *A12* usando [↱] [A12] .

Usar el modo de operación RPN:

['] [ALPHA] [↱] [B] [÷] [2] [ENTER] ['] [A12] [ENTER] [STO▶]

o, de una manera simplificada,

['] [ALPHA] [↱] [B] [÷] [2] [▶] ['] [A12] [STO▶]

Usando ⓵ seguido por la tecla de la variable (RPN)

Esta es una manera muy simple de cambiar el contenido de una variable, pero trabaja solamente en el modo de RPN. El procedimiento consiste en escribir el nuevo contenido de la variable e incorporarlo en la pantalla, y entonces presionar ⓵ seguida por el tecla de la variable. Por ejemplo, en RPN, si deseamos cambiar el contenido de la variable *z1* a '*a+b·i* ', use:

' ALPHA ⓵ A + ALPHA ⓵ B × ⓵ i ENTER

Esto pondrá la expresión algebraica '*a+b·i* ' en el nivel 1: en la pantalla. Para incorporar este resultado en variable *z1*, use: VAR ⓵ z1

Para comprobar el nuevo contenido de *z1*, use: ⓶ z1

Una manera equivalente de hacer esto en modo algebraico es la siguiente:

ALPHA ⓵ A + ALPHA ⓵ B × ⓵ i ENTER STO▶ z1 ENTER

Para comprobar el nuevo contenido de *z1*, use: ⓶ z1

Uso de la variable ANS(1) modo algebraico)

En modo algebraico uno puede utilizar ANS(1) para sustituir el contenido de una variable. Por ejemplo, el procedimiento para cambiar el contenido de *z1* a '*a+bi*' es el siguiente: ⓵ ANS STO▶ z1 ENTER. Para comprobar el nuevo contenido de *z1*, use: ⓶ z1

Copiar variables

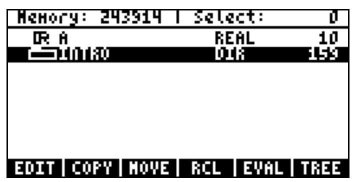
Los ejercicios siguientes demuestran diversas maneras de copiar variables a partir de la una secundaria-directorio a otra.

Usando el menú FILES

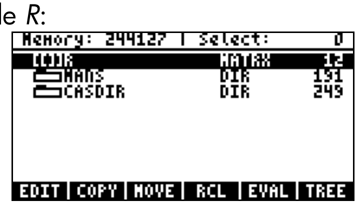
Para copiar una variable a partir de un directorio a otro usted puede utilizar el menú FILES. Por ejemplo, dentro del sub-directorio {HOME MANS INTRO}, tenemos las variables *p1, z1, R, Q, A12,* α*,* y *A*. Suponga que deseamos copiar la variable *A* y poner una copia en el sub-directorio {HOME MANS}. También, copiaremos la variable *R* y pondremos una copia en el directorio HOME. He aquí cómo a hacerlo: Presione ⓵ FILES OK para producir la lista siguiente de variables:

Use la tecla ▼ para seleccionar la variable *A* (la última en la lista), entonces presione COPY. La calculadora responderá con una pantalla etiquetada PICK DESTINATION:

Use la tecla ▲ para seleccionar el sub-directorio MANS y presione OK. Si usted ahora Presione ← UPDIR , la pantalla mostrará el contenido del sub-directorio MANS (note que la variable A se muestra en esta lista, según lo esperado):



Presione ON INTRO ENTER (modo algebraico), o ON INTRO (modo RPN) para regresar al directorio INTRO. Presione ← FILES OK para producir la lista de variables en {HOME MANS INTRO}. Use la tecla (▼)para seleccionar la variable *R*, entonces presione COPY. Use la tecla (▲) para seleccionar el directorio HOME, y presione OK. Si Ud. ahora presiona ← UPDIR , dos veces, la pantalla demostrará el contenido del Directorio HOME, incluyendo una copia de la variable *R*:



Usar la historia en modo algebraico

Aquí está una manera de utilizar la historia (pantalla) para copiar una variable a partir de un directorio a otro con la calculadora fijada al modo algebraico. Suponer que estamos dentro de sub-directorio {HOME MANS INTRO}, y desear copiar el contenido de la variable *z1* al sub-directorio {HOME MANS}. Utilice el procedimiento siguiente: [→] [z1] [STO▶] [z1] [ENTER] Esto almacena simplemente el contenido de *z1* en sí mismo (ningún cambio efectuado en *z1*). Después, use [←] UPDIR [ENTER] para moverse al sub-directorio {HOME MANS}. La pantalla de la calculadora lucirá de este modo:

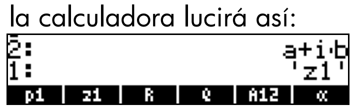
Después, use la tecla de cancelación tres veces, para quitar las tres líneas últimas en la pantalla: [◀] [◀] [◀]. A este punto, la pantalla está lista a ejecutar la función ANS(1)▶z1. Presione [ENTER] para ejecutar esta función. Entonces, use [→] [z1], para verificar el contenido de la variable.

Usar la pantalla en modo RPN

Para demostrar el uso de la pantalla en modo RPN para copiar una variable de un sub-directorio a otro, asumimos que usted está dentro del sub-directorio {HOME MANS INTRO}, y eso copiaremos el contenido de la variable *z1* al directorio HOME. Utilizar el procedimiento siguiente:

[→] [z1] [ENTER] ['] [z1] [ENTER]

Este procedimiento enumera el contenido y el nombre de la variable en la pantalla. La pantalla de la calculadora lucirá así:



Ahora, use [←] UPDIR [←] UPDIR para moverse al directorio HOME, y presione [STO▶] para terminar la operación. Use [→] [z1], para verificar el contenido de la variable.

Copiado de dos o más variables usando la pantalla en modo algebraico

Lo que sigue es un ejercicio para demostrar cómo copiar dos o más variables usando la pantalla cuando la calculadora está en modo algebraico. Suponer, una vez más, que estamos dentro del sub-directorio {HOME MANS INTRO} y eso que deseamos copiar las variables *R* y *Q* al sub-directorio {HOME MANS}. Las teclas necesarias para completar esta operación se muestran a continuación:

[→] [R] [STO▶] [R] [ENTER]
[→] [Q] [STO▶] [Q] [ENTER]
[←] UPDIR [ENTER]
[◀] [◀] [◀] [ENTER]
[◀] [◀] [◀] [◀] [ENTER]

Para verificar el contenido de las variables, use [→] [R] y [→] [Q].
Este procedimiento se puede generalizar al copiado de tres o más variables.

Copiado de dos o más variables usando la pantalla en modo RPN

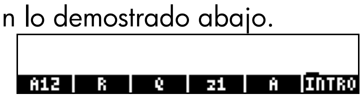
Lo que sigue es un ejercicio para demostrar cómo copiar dos o más variables usando la pantalla cuando es la calculadora en modo RPN. Asumimos, otra vez, que estamos dentro sub-directorio {HOME MANS INTRO} y que deseamos copiar las variables *R* y *Q* al sub-directorio {HOME MANS}. Las teclas necesario para terminar esta operación se demuestran a continuación:

[→] [R] ['] [R] [ENTER]
[→] [Q] ['] [Q] [ENTER]
[←] UPDIR [STO▶] [STO▶]

Para verificar el contenido de las variables, use [→] [R] y [→] [Q].
Este procedimiento se puede generalizar al copiado de tres o más variables.

Reordenar variables en un directorio

En esta sección ilustramos el uso de la función ORDER para reordenar las variables en un directorio. Asumimos que comenzamos dentro del sub-directorio {HOME MANS} contener las variables, *A12, R, Q, z1, A,* y el sub-directorio *INTRO*, según lo demostrado abajo.

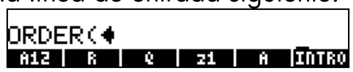


Modo algebraico

En este caso, tenemos la calculadora fijada al modo algebraico. Suponer que deseamos cambiar la orden de las variables a *INTRO, A, z1, Q, R, A12*.
Seguir de la forma siguiente para activar la función ORDER:

[←] PRG [▼] [OK] Seleccione MEMORY del menú de programación
[▼] [▼] [▼] [▼] [OK] Seleccione DIRECTORY del menú MEMORY
[▲] [▲] [OK] Seleccione ORDER del menú DIRECTORY

La pantalla demostrará la línea de entrada siguiente:



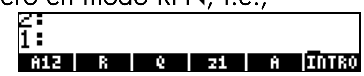
Después, enumeraremos el nuevo orden de las variables usando los nombres entre apostrofes:

{} ' INTRO ▶ , ' A
▶ , ' z1 ▶ , ' Q ▶
, ' R ▶ , ' A12 ENTER

La pantalla ahora demuestra nueva ordenar de las variables:

Modo RPN

En modo RPN, la lista de variables reordenadas se enumera en la pantalla antes de aplicar la función ORDER. Suponer que salimos de la misma situación que arriba, pero en modo RPN, i.e.,



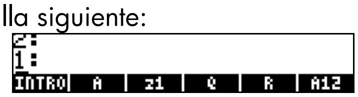
La lista reordenada es creada usando:

{} INTRO A z1 Q R A12 ENTER

Entonces, escriba la función ORDER, según lo hecho antes, i.e.,

PRG ▼ OK Seleccione MEMORY del menú de programación
▼ ▼ ▼ ▼ OK Seleccione DIRECTORY del menú MEMORY
▲ ▲ OK Seleccione ORDER del menú DIRECTORY

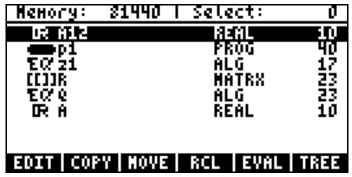
El resultado es la pantalla siguiente:



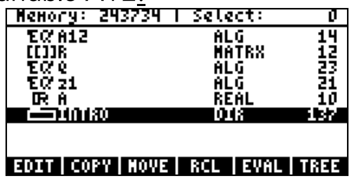
Moviendo variables usando el menú FILES

Para mover una variable de un directorio a otro usted puede utilizar el menú FILES. Por ejemplo, dentro de sub-directorio {HOME MANS INTRO}, tenemos las variables *p1, z1, R, Q, A12,* α, y *A*. Suponga que deseamos mover la variable *A12* al sub-directorio {HOME MANS}. He aquí cómo a hacerlo: Presione FILES OK para demostrar una lista de variables. Use la tecla ▼ para seleccionar la variable *A12*, entonces presione MOVE. La calculadora responderá con una pantalla denominada PICK DESTINATION.

Use la tecla ▲ para seleccionar el sub-directorio MANS y presione OK. La pantalla ahora demostrará el contenido del sub-directorio {HOME MANS INTRO}:



Note que la variable A12 ya no está más en la lista. Si usted ahora presiona ← UPDIR , la pantalla demostrará el contenido del sub-directorio MANS, incluyendo la variable *A12*:



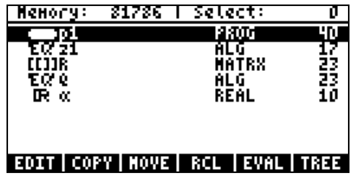
Nota: Usted puede utilizar la pantalla para mover una variable combinando el copiado con suprimir una variable. Los procedimientos para suprimir variables se muestran en la siguiente sección.

Suprimir variables

Las variables se pueden suprimir usando la función PURGE. Esta función puede ser alcanzada directamente usando el menú TOOLS (TOOL), o usando el menú FILES ← FILES OK.

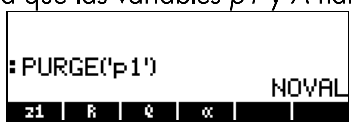
Usando la función FILES

La función FILES puede ser utilizado para purgar una variable a la vez. Para suprimir una variable de un directorio dado usted puede utilizar el menú FILES. Por ejemplo, dentro del sub-directorio {HOME MANS INTRO}, tenemos las variables *p1, z1, R, Q,* α, y *A*. Suponga que eliminamos la variable *A*. He aquí cómo hacerlo: Presione ← FILES OK para producir la lista de variables. Use la tecla ▼ para seleccionar la variable *A* (la última en la lista), entonces presione NXT PURGE YES. La pantalla ahora demostrará el contenido del sub-directorio INTRO sin la variable A.



Usando la función PURGE en la pantalla en modo algebraico

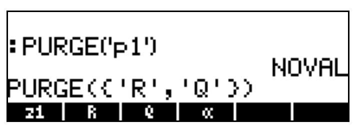
Nuestra lista de variables contiene las variables *p1, z1, Q, R, y α*. A continuación se utiliza la función PURGE para eliminar las variable *p1* y A. Presiónese TOOL PURGE VAR p1 ENTER, y a continuación TOOL PURGE VAR p1 ENTER. La pantalla indica que las variables *p1* y *A* han sido eliminada:



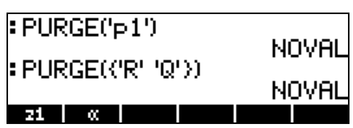
La función PURGE puede utilizarse para eliminar más de una variable al colocar sus nombres en una lista que pasa a ser el argumento de la función. Por ejemplo, si quisiéramos eliminar las variables *R* y *Q*, simultáneamente, se puede utilizar :

TOOL PURGE ← {} ' VAR R ▶ → , ' VAR Q

La pantalla muestra la función PURGE a punto de activarse para eliminar las variables R y Q:



Para completar el ejercicio, presiónese ENTER. La pantalla muestra las variables restantes:



Utilizando la función PURGE en la pantalla en modo RPN

Asumiendo que nuestra lista de variables contiene *p1, z1, Q, R, y α*. Utilizaremos la función PURGE para eliminar la variable *p1*. Presiónense las siguientes teclas ' p1 ENTER TOOL PURGE. La pantalla indica que *p1* ha sido eliminada de la memoria:

Para eliminar dos variables simultáneamente, por ejemplo, las variables *R* y *Q*, créese primero una lista (en Modo RPN, los elementos de lista no necesitan estar separados por comas como se requiere en Modo algebraico):

VAR ← {} ' R ▶ ' Q ENTER

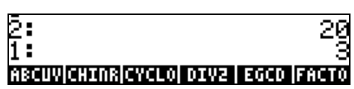
A continuación, presiónese TOOL PURGE para eliminar las dos variables.

Información adicional sobre la manipulación de variables se presenta en el Capítulo 2 de la Guía del Usuario de la calculadora.

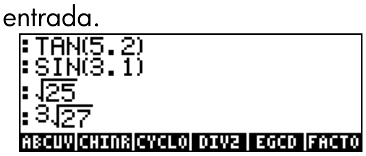
Las funciones UNDO y CMD

Las funciones UNDO y CMD son útiles para recobrar instrucciones previas o para recobrar una operación en caso de que se haya cometido un error. Estas funciones están asociadas con la tecla HIST: UNDO resulta al escribir → UNDO , mientras que CMD resulta al escribir ← CMD .

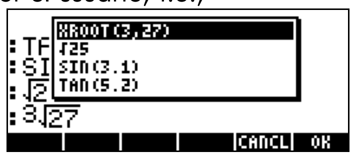
Para ilustrar el uso de UNDO, intentar el ejercicio siguiente en modo algebraico (ALG): 5 × 4 ÷ 3 ENTER. La función UNDO (→ UNDO) simplemente borra el resultado. El mismo ejercicio, en modo RPN, usará estas teclas: 5 ENTER 4 ENTER × 3 ENTER ÷ . Usando → UNDO a este punto deshará la operación más reciente (20/3), deja los términos originales en la pantalla:



Para ilustrar el uso de CMD, escríbase lo siguiente en modo ALG. Presione ENTER después de cada entrada.



Después, use la función CMD (← CMD) para mostrar las cuatro funciones más recientes escritas por el usuario, i.e.,



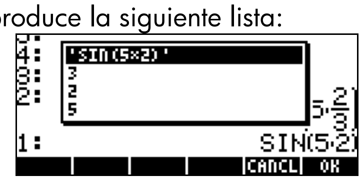
Usted puede utilizar las teclas ▲▼ para navegar entre estas funciones y destacar cualesquiera de ellas que usted desea colocar de nuevo en la pantalla. Una vez que usted haya seleccionado la función a repetir, presione OK.

La función de CMD funciona en la misma manera cuando la calculadora está en el modo RPN, excepto que la lista muestra solamente números o algebraicos. No se muestran las funciones escritas. Por ejemplo, intente el ejercicio siguiente en el modo RPN:

5 ENTER 2 ENTER 3 ÷ × SIN

' SIN 5 × 2 ENTER .

Presionando ← CMD produce la siguiente lista:



Como usted puede ver, los números 3, 2, y 5, utilizado en el primer cálculo arriba, se enumeran en la caja de la selección, así como el algebraico 'SIN(5x2)', pero no la función SIN escrita antes del algebraico.

Banderas o señales

Una bandera o señal es un valor Booleano, eso se puede fijar o despejar (verdad o falso), eso especifica un ajuste dado de la calculadora o una opción en un programa. Las banderas en la calculadora son identificadas por números. Hay 256 banderas, numeradas a partir de la -128 a 128. Las banderas positivas se llaman las banderas del usuario y están disponibles para programar propósitos del usuario. Las banderas representadas por números negativos se llaman las banderas del sistema y afectan la manera que la calculadora funciona. Para ver los ajustes actuales de las banderas presione la tecla MODE , y después la tecla FLAGS (i.e., F1). Usted conseguirá una pantalla etiquetada *SYSTEM FLAGS* listando los nombres de las banderas y sus números:

(**Nota**: En esta pantalla, solamente se muestran banderas del sistema, y sólo el valor absoluto del número de la bandera se muestra). Una bandera se dice estar fijada si usted ve una marca de cheque (✓) delante del número de la bandera. Si no, la bandera no está fija sino despejada. Para cambiar el estado de una bandera de sistema, presione la tecla ✓CHK! mientras que la bandera que usted desea cambiar esté seleccionada, o utilice la tecla +/-. Usted puede utilizar las teclas ▲▼ para moverse sobre la lista de las banderas del sistema. Aunque hay 128 banderas del sistema, no se utilizan todos, y algunos de ellos se utilizan para el control interno del sistema. Las banderas del sistema que no son accesibles al usuario no son visibles en esta pantalla. Una lista completa de banderas se presenta en el capítulo 24.

Ejemplo del ajuste de la bandera: soluciones generales contra valor principal

Por ejemplo, el valor prefijado para la bandera 01 del sistema es *General solutions* (soluciones generales). Lo que esto significa es que, si una ecuación tiene soluciones múltiples, todas las soluciones serán calculadas por la calculadora, muy probablemente en una lista. Al presionar la tecla ✓CHK usted puede cambiar la bandera 01 del sistema a *Principal value* (valor principal). Este ajuste forzará la calculadora para proporcionar un solo valor conocido como el valor principal de la solución.

Para ver su funcionamiento, primero fije la bandera 01 del sistema (i.e., seleccione *Principal Value*). Presione OK dos veces para volver a la pantalla normal de la calculadora. Intentaremos solucionar una solución cuadrática de la ecuación, por ejemplo, $t^2+5t+6 = 0$, con la función QUAD.

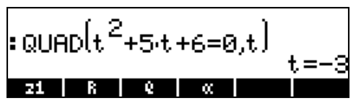
Modo algebraico

Use las teclas siguientes: [→] CAT [ALPHA] [Q] (use las teclas [▲] [▼] para seleccionar la función QUAD) presione [OK] .

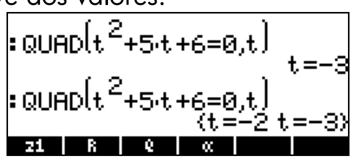
Para incorporar la ecuación como el primer argumento de la función QUAD, use las siguientes teclas:

[→] EQW [ALPHA] [←] [T] [Y^x] [2] [▶] [+] [5] [×] [ALPHA] [←] [T] [+] [6] [▲] [▲]
[→] [=] [0] [ENTER]
[→] [,] [ALPHA] [←] [T] [ENTER]

El resultado es:



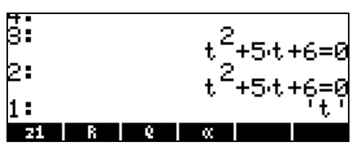
Ahora, cambie el ajuste de la bandera 1 a *General solutions*: [MODE] [FLAGS] [✓CHK] [OK] [OK]. E intente la solución otra vez: [▲] [▲] [ENTER] [ENTER]. La solución ahora incluye dos valores:



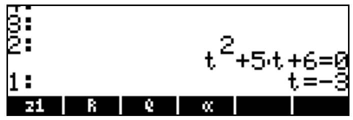
Modo RPN

Primero, ajuste la bandera del sistema 01 a *Principal Value*. Presione [OK] dos veces para volver a la pantalla normal de la calculadora. Entonces, escriba la ecuación cuadrática como sigue:

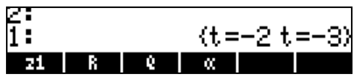
[→] EQW [ALPHA] [←] [T] [Y^x] [2] [▶] [+] [5] [×] [ALPHA] [←] [T] [+] [6] [▲] [▲]
[→] [=] [0] [ENTER]
[ENTER] (mantener una segunda copia en la pantalla RPN)
['] [ALPHA] [←] [T] [ENTER]



Utilice las siguientes teclas para escribir la función QUAD: [→] CAT [ALPHA] [Q] (use las teclas [▲] [▼] para seleccionar la función QUAD) Presione [OK] . La pantalla demuestra la solución principal:



Ahora, cambie el ajuste de la bandera 01 a *General solutions*: MODE FLAGS ✓CHK OK OK. E intentar la solución otra vez: ← ' ALPHA ← T ENTER → CAT ALPHA Q (use las teclas ▲▼ para seleccionar la función QUAD) Presione OK. La pantalla ahora demuestra las dos soluciones:



Otras banderas de interés

Muestre una vez más la bandera actual presionando la tecla MODE, y después FLAGS. Cerciorarse que la bandera 01 del sistema ha sido despejada como se hizo en el ejercicio anterior. Use las teclas ▲▼ para moverse sobre la lista de la bandera del sistema.

Algunas banderas de interés y de su valor preferido con el fin de los ejercicios que siguen en este manual son:

02 Constant → symb: Valores constantes (por ejemplo., π) se mantienen como símbolos

03 Function → symb: Las funciones no se evalúan automáticamente, en vez, se cargan como expresiones simbólicas.

*27 'X+Y*i' → (X,Y):* Los números complejos se representan como pares ordenados

60 [α][α] locks: La secuencia ALPHA ALPHA traba el teclado alfabético

Presione OK dos veces para volver a la pantalla normal de la calculadora.

CHOOSE boxes vs. Soft MENU

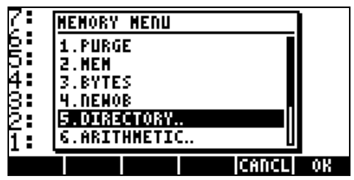
En algunos de los ejercicios presentados en este Capítulo hemos presentado listas de funciones en la pantalla. Estas listas de funciones se denominan, en inglés, *CHOOSE boxes* (listas de menú). El ejercicio siguiente indica como cambiar la opción (CHOSE boxes) a Soft MENU (teclas de menú), y viceversa.

Aunque el presente ejercicio no se aplica a un ejemplo específico, el mismo muestra las dos opciones para los menús de funciones en la calculadora

(CHOOSE boxes y soft MENUs). En este ejercicio, se busca la función ORDER, la cual se utiliza para reordenar las variables en un directorio:

← PRG ▼ Mostrar el menú PROG. Seleccionar MEMORY.

OK ▼▼▼▼ Mostrar el menú MEMORY. Seleccionar DIRECTORY.



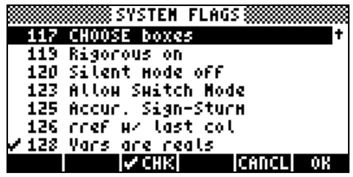
OK ▲▲ Mostrar menú DIRECTORY. Seleccionar ORDER.

OK Activar la función ORDER.

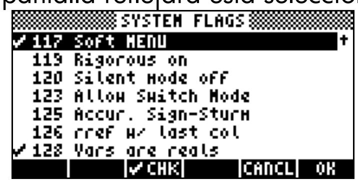
Una forma alternativa de mostrar las funciones de un menú es a través de teclas de menú (*soft MENU*), al manipular la señal de sistema número *117* (system flag 117). (Para información adicional sobre señales de sistema véanse los Capítulos 2 y 24 en la Guía del Usuario). Para seleccionar esta señal utilícese:

MODE FLAGS ▲▲▲▲▲▲▲

La pantalla muestra la señal de sistema número 117 sin seleccionar (es decir, con la opción *CHOOSE boxes* activa):



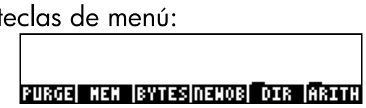
Presiónese la tecla ✓CHK para seleccionar esta señal de sistema activando la opción *soft MENU*. La pantalla reflejará esta selección:



Presiónese OK dos veces para recobrar la pantalla normal.

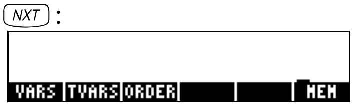
A continuación, se busca la función ORDER utilizando teclas de menú. Para comenzar, presiónese ← PRG . Nótese que en vez de una lista de menú se obtienen ahora teclas de menú para el menú PROG, es decir,

Presiónese F2 para seleccionar el menú MEMORY (MEM). La pantalla muestra las siguientes teclas de menú:



Presiónese F5 para seleccionar el menú DIRECTORY (DIR)

La función ORDER no se muestra en esta página de menú. Para encontrar esta función presiónese NXT :

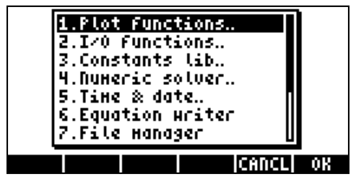


Para activar la función ORDER, presiónese la tecla de menú F3 (ORDER).

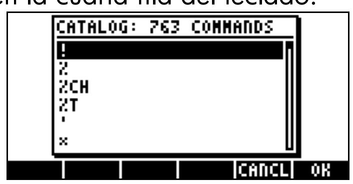
Ejemplos de menús de lista (CHOOSE boxes)

Algunos menús producirán solamente menús de listas (CHOOSE boxes), por ejemplo,

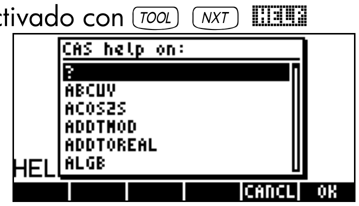
- El menú APPS (APPlicationS), activado con la tecla APPS primera tecla en la segunda fila del teclado:



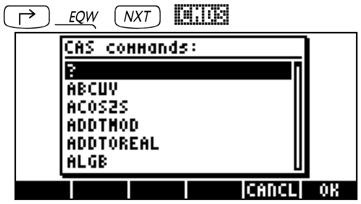
- El menú CAT (CATalog menu), activado con la tecla ↱ CAT , segunda tecla en la cuarta fila del teclado:



- El menú HELP, activado con TOOL NXT HELP



- El menú CMDS (inglés, CoMmanDS), activado dentro del escritor de ecuaciones, i.e., ↱ EQW NXT CMDS



Capítulo 3
Cálculos con números reales

Este Capítulo demuestra el uso de la calculadora para operaciones y las funciones relacionadas un los números reales. Se asume que el usuario está familiarizado con el teclado para identificar ciertas funciones disponibles en el mismo (por ejemplo, SIN, COS, TAN, etc.) Así mismo, se asume que el lector sabe como seleccionar el sistema operativo de la calculadora (Capítulo 1), como usar menús y listas de selección (Capítulo 1), y como utilizar variables (Capítulo 2).

Verificación de los ajustes de la calculadora

Para verificar los ajustes actuales de la calculadora y del CAS véase la línea superior en la pantalla de la calculadora en operación normal. Por ejemplo, usted puede ver el ajuste siguiente: RAD XYZ DEC **R** = 'X'

Estos ajustes representan: RADianes para las medidas angulares, XYZ para las coordenadas (cartesianos) rectangulares, base de numeración DECimal, números reales (**R**), = significa resultados EXACTos, y ' X ' es el valor de la variable independiente del CAS.

Otro listado posible de opciones podía ser DEG R∠Z HEX C ~ 't'

Estos ajustes representa: grados (DEGrees) como medidas angulares, R∠ Z para los coordenadas polares, base numérica HEXadecimal, números complejos (**C**) son permitidos, ~ significa resultados "APROXimados", y 't' es la variable independiente del CAS.

En general, esta parte de la pantalla contiene siete elementos. Cada elemento se identifica bajo números 1 a 7. Los valores posibles para cada elemento se muestran entre paréntesis después de la descripción del elemento. La explicación de cada uno de esos valores también se muestra:

1. Especificación de la medida del ángulo (DEG, RAD, GRD)
   DEG: grados, 360 grados en un círculo completo
   RAD: radianes, 2π radianes en un círculo completo
   GRD: grados centesimales, 400 grados en un círculo completo

2. Especificación de sistema coordinado (XYZ, R∠Z, R∠∠). El símbolo ∠ significa un coordenada angular.
   XYZ: Coordenadas cartesianas o rectangulares (x,y,z)
   R∠Z: coordenadas polares cilíndricas (r,θ,z)
   R∠∠: Coordenadas esféricas (ρ,θ,φ)
3. Especificación de la base de numérica (HEX, DEC, OCT, BIN)
   HEX: números hexadecimales (base 16)
   DEC: números decimales (base 10)
   OCT: números octales (base 8)
   BIN: números binarios (base 2)
4. Especificación de modo real o complejo (**R**, **C**)
   R: números reales
   C: números complejos
5. Especificación de modo exacto o aproximado (=, ~)
   = modo exacto (simbólico)
   ~ modo aproximado (numérico)
6. Variable independiente del CAS (por ejemplo, 'X', 't', etc.)

Verificación de modo de la calculadora

En modo RPN los diversos niveles del "stack" (pila) se listan en el lado izquierdo de la pantalla. Cuando se selecciona el modo ALGEBRAICO no hay niveles numerados en la pantalla, y la palabra ALG se lista en la línea superior de la pantalla hacia el lado derecho. La diferencia entre estos modos de funcionamiento fue descrita detalladamente en el capítulo 1.

Cálculos con números reales

Para ejecutar cálculos con números reales es preferible que el CAS tenga activa la opción *Real* (en contraste con la opción *Complex*). La opción *Exact* es la opción pre-seleccionada por la calculadora para la mayoría de las operaciones. Por lo tanto, usted puede comenzar sus cálculos en este modo. Cualquier cambio al modo *Approx* requerido para terminar una operación será solicitado por la calculadora. No hay selección preferida para la medida del ángulo o para la especificación de la base de número. Los cálculos de números reales se demuestran en modo algebraico (ALG) y de notación polaca reversa (RPN).

Cambio de signo de número, variable, o expresión

Use la tecla [+/-]. En modo de ALG, usted puede presionar [+/-] antes de escribir el número, por ejemplo, [+/-][2][.][5][ENTER]. Resultado = -2.5. En modo de RPN, usted necesita escribir por lo menos una parte del número primero, y después utilizar [+/-], por ejemplo, [2][.][5][+/-]. Resultado = -2.5. Si usted utiliza la función [+/-] mientras que no hay línea de comando, la calculadora aplicará la función NEG al objeto en el primer nivel del "stack."

La función inversa

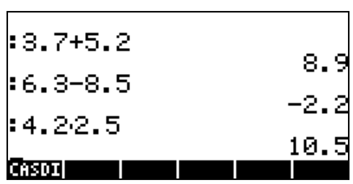
Use la tecla [1/x]. En modo de ALG, presione [1/x] primero, seguido por un número o una expresión algebraica, por ejemplo, [1/x][2]. Resultado = 0.5. En modo RPN, escriba el número primero, después utilice la tecla de la función, por ejemplo, [4][ENTER][1/x]. Resultado = 0.25.

Adición, substracción, multiplicación, división

Utilizar la tecla de la operación apropiada, a saber, [+] [−] [×] [÷]. En modo ALG, presione un operando, y después el operador, seguido de un operando, seguido por [ENTER] para obtener un resultado. Ejemplos:

[3][.][7] [+] [5][.][2] [ENTER]
[6][.][3] [−] [8][.][5] [ENTER]
[4][.][2] [×] [2][.][5] [ENTER]
[2][.][3] [÷] [4][.][5] [ENTER]

Las primeras tres operaciones arriba se demuestran en la pantalla siguiente tirada:



En modo de RPN, escribir los operandos uno después del otro, separado por un [ENTER], después presione la tecla del operador. Ejemplos:

[3][.][7][ENTER] [5][.][2] [+]
[6][.][3][ENTER] [8][.][5] [−]
[4][.][2][ENTER] [2][.][5] [×]
[2][.][3][ENTER] [4][.][5] [÷]

Alternativamente, en modo RPN, uno puede separar los operandos con la tecla espaciadora (SPC) antes de presionar la tecla de la operación. Ejemplos:

3 . 7 SPC 5 . 2 +
6 . 3 SPC 8 . 5 −
4 . 2 SPC 2 . 5 ×
2 . 3 SPC 4 . 5 ÷

Uso de paréntesis

Se pueden utilizar paréntesis para agrupar operaciones, así como para incluir argumentos de funciones. Los paréntesis están disponibles con la combinación ↰ ( ) . Los paréntesis se escriben siempre en pares. Por ejemplo, calcule (5+3.2)/(7-2.2):

En modo ALG:
↰ ( ) 5 + 3 . 2 ▶ ÷ ↰ ( ) 7 − 2 . 2 ENTER

En modo RPN uno no siempre necesita usar paréntesis, dado que los cálculos se realizan directamente en la pantalla (stack):
5 ENTER 3 . 2 ENTER + 7 ENTER 2 . 2 ENTER − ÷

En modo RPN, el escribir una expresión entre apóstrofes permite al usuario a escribir expresiones como en el modo algebraico:
' ↰ ( ) 5 + 3 . 2 ▶ ÷
↰ ( ) 7 − 2 . 2 ENTER EVAL

Para ambos modos, ALG y RPN, uno puede utilizar el escritor de ecuaciones en el cálculo:
↱ EQW 5 + 3 . 2 ▶ ÷ 7 − 2 . 2

La ecuación puede ser evaluada dentro del escritor de ecuaciones al utilizar las siguientes teclas:

▲ ▲ ▲ ▲ EVAL o, ↱ ▲ EVAL

Función valor absoluto

La función valor absoluto, ABS, está disponible con la combinación: ↰ ABS . Al calcular en modo ALG, escriba la función antes del argumento, por ejemplo, ↰ ABS +/- 2 . 3 2 ENTER

En modo RPN, escriba el número primero, y después la función, por ejemplo,
[2] [.] [3] [2] [+/-] [←] ABS

Cuadrados y raíces cuadradas

La función cuadrada, SQ, está disponible con la combinación : [←] x^2 . Al calcular en la pantalla en modo ALG, escriba la función antes del argumento, por ejemplo, [←] x^2 [+/-] [2] [.] [3] [ENTER]

En modo RPN, escriba el número primero, y después la función, por ejemplo,
[2] [.] [3] [+/-] [←] x^2

La función raíz cuadrada, √, está disponible en la tecla R. Cuando se calcula en la pantalla en modo ALG, escríbase la función antes del argumento, por ejemplo, [√x] [1] [2] [3] [.] [4] [ENTER]

En Modo RPN, escríbase el número primero, seguido por la función, por ejemplo, [1] [2] [3] [.] [4] [√x]

Potencias y raíces

La función potencia, ^, se encuentra disponible en la tecla [y^x]. Cuando se calcula en la pantalla en modo ALG, escríbase la base (*y*) seguida de la tecla [y^x], y del exponente (*x*), por ejemplo,[5] [.] [2] [y^x] [1] [.] [2] [5]
En Modo RPN, escríbase el número primero, seguido por la función, por ejemplo, [5] [.] [2] [ENTER] [1] [.] [2] [5] [ENTER] [y^x]
La función raíz, XROOT*(y,x),* está disponible a través de la combinación de teclas [→] $\sqrt[x]{y}$. Cuando se calcula en la pantalla en modo ALG, escríbase la función XROOT seguida por los argumentos (*y,x*), separados por comas, por ejemplo, [→] $\sqrt[x]{y}$ [3] [→] , [2] [7] [ENTER]
En Modo RPN, escríbase el argumento *y*, primero, después, *x*, y finalmente la función, por ejemplo, [2] [7] [ENTER] [3] [ENTER] [→] $\sqrt[x]{y}$

Logaritmos decimales y potencias de 10

Los logaritmos decimales (de base 10) se calculan a través de la combinación de teclas [→] LOG (función LOG), mientras que su inversa (ALOG, o antilogaritmo) se calcula utilizando [←] 10^x . En modo ALG, la función se escribe antes del argumento:
[→] LOG [2] [.] [4] [5] [ENTER]
[←] 10^x [+/-] [2] [.] [3] [ENTER]

En Modo RPN, el argumento se escribe antes de la función:

2 . 4 5 ENTER ↱ LOG
2 . 3 +/- ENTER ↰ 10^x

Utilizando potencias de 10 al escribir datos

Potencias de diez, es decir, números de la forma -4.5×10^{-2}, etc., se escriben utilizando la tecla EEX. Por ejemplo, en modo ALG:

+/- 4 . 5 EEX +/- 2 ENTER

O, en modo RPN:

4 . 5 +/- EEX 2 +/- ENTER

Logaritmos naturales y la función exponencial

Los logaritmos naturales (i.e., logaritmos de base *e = 2.7182818282*) se calculan utilizando ↱ LN (función LN) mientras que su inversa, la función exponencial (EXP), se calcula utilizando ↰ e^x . En modo ALG, la función se escribe antes del argumento:

↱ LN 2 . 4 5 ENTER
↰ e^x +/- 2 . 3 ENTER

En Modo RPN, el argumento se escribe antes de la función:

2 . 4 5 ENTER ↱ LN
2 . 3 +/- ENTER ↰ e^x

Funciones trigonométricas

Tres funciones trigonométricas se encuentran disponibles en el teclado: seno (SIN), coseno (COS), y tangente (TAN). Los argumentos de estas funciones son ángulos ya sea en grados, radianes, o grados decimales. Los siguientes ejemplos usan ángulos en grados (DEG):

En Modo ALG:

SIN 3 0 ENTER
COS 4 5 ENTER
TAN 1 3 5 ENTER

En Modo RPN:

3 0 ENTER SIN
4 5 ENTER COS
1 3 5 ENTER TAN

Funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas inversas disponibles en el teclado son el arco seno (ASIN), arco coseno (ACOS), y arco tangente (ATAN), disponible con las combinaciones ← ASIN , ← ACOS , y ← ATAN , respectivamente. Puesto que las funciones trigonométricas inversas representan ángulos, la respuesta de estas funciones será dada en la medida angular seleccionada (DEG, RAD, GRD). Algunos ejemplos se demuestran a continuación:

En modo ALG:

← ASIN 0 . 2 5 ENTER
← ACOS 0 . 8 5 ENTER
← ATAN 1 . 3 5 ENTER

En modo RPN:

0 . 2 5 ENTER ← ASIN
0 . 8 5 ENTER ← ACOS
1 . 3 5 ENTER ← ATAN

Todas las funciones descritas anteriormente, a saber, ABS, SQ, √, ^, XROOT, LOG, ALOG, LN, EXP, SIN, COS, TAN, ASIN, ACOS, ATAN, puede ser combinado con las operaciones fundamentales (+ − × ÷) para formar expresiones más complejas. El escritor de ecuaciones, cuyas operaciones se describen en el capítulo 2, es ideal para construir tales expresiones, sin importar el modo de la operación de la calculadora.

Diferencias entre las funciones y los operadores

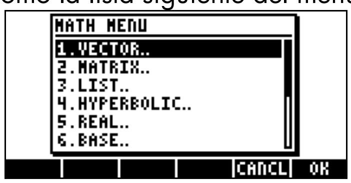
Las funciones como ABS, SQ, √, LOG, ALOG, LN, EXP, SIN, COS, TAN, ASIN, ACOS, ATAN requieren un solo argumento. Así, su uso en modo ALG es directo, por ejemplo, ABS(x). Algunas funciones como XROOT requieren dos argumentos, por ejemplo, XROOT(x,y). Esta función es equivalente a la combinación → $\sqrt[x]{y}$.

Los operadores, por otra parte, se colocan después de un solo argumento o entre dos argumentos. El operador factorial (!), por ejemplo, se coloca después de un número, por ejemplo, 5 ALPHA → 2 ENTER. Puesto que este operador requiere un solo argumento, se le conoce como un operador unitario. Operadores que requieren dos discusiones, por ejemplo + −

× ÷ y^x, son operadores binarios, por ejemplo, 3×5, o 4y^x2.

Funciones de números reales en el menú MTH

El menú de MTH (matemáticas) incluye un número de funciones matemáticas sobre todo aplicables a los números reales. Para tener acceso al menú MTH, utilice la combinación ← MTH . Con la opción CHOOSE boxes seleccionada para la bandera 117 del sistema (véase el capítulo 2), el menú MTH se muestra como la lista siguiente del menú:



Dado que existe una gran cantidad de funciones matemáticas disponibles en la calculadora, el menú de MTH se organiza por el tipo de objeto que las funciones se aplican encendido. Por ejemplo, las opciones 1. *VECTOR..*, *2. MATRIX.*, y *3. LIST..* se aplican a esos tipos de datos (es decir, vectores, matrices, y listas) y serán discutidas más detalladamente en capítulos subsecuentes. Las opciones *4. HYPERBOLIC..* y *5. REAL.* se aplican a los números reales y serán discutidas en detallado posteriormente. La opción *6. BASE..* se utiliza para la conversión de números en diversas bases, y también se discute en un capítulo separado. La opción *7. PROBABILITY..* se utiliza para los usos de la probabilidad y será discutido en un capítulo próximo. La opción *8. FFT..* (Transformada Rápida de Fourier, en inglés, Fast Fourier Transform) se aplica al proceso de señales y será discutido en un capítulo diferente. La opción *9. COMPLEX..* contiene las funciones apropiadas para los números complejos, que serán discutidos en el capítulo siguiente. La opción *10. CONSTANTS* proporciona el acceso a las constantes en la calculadora. Esta opción será presentada más adelante en este capítulo. Finalmente, la opción *11. SPECIAL FUNCTIONS..* incluye las funciones de las matemáticas avanzadas que serán discutidas en esta sección también.

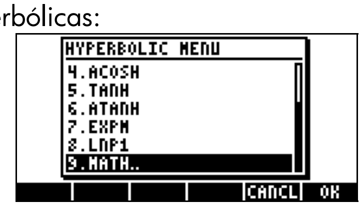
En general, téngase cuidado del número y orden de los argumentos requeridos para cada función, y téngase en cuenta que, en el modo ALG uno debe seleccionar primero la función y después escribir el o los argumentos, mientras que en Modo RPN, uno debe escribir el argumento en la pantalla primero, y después seleccionar la función.

Usando los menús de la calculadora:

1. 1. Dado que la operación de las funciones en MTH (y de muchos otros menús de la calculadora) es muy similar, describiremos en detalle el uso del menú *4. HYPERBOLIC..* en esta sección con la intención de describir la operación general de los menús de la calculadora. Préstese atención particular al proceso de selección de opciones.
2. Para seleccionar una de las opciones en una lista (CHOOSE box), simplemente presiónese el número de esa opción en el teclado. Por ejemplo, para seleccionar la opción *4. HYPERBOLIC..* en el menú MTH, simplemente presiónese 4.

Las funciones hiperbólicas y sus inversas

Al seleccionar la opción *4. HYPERBOLIC..* , en el menú *MTH*, y al presionar OK, se produce el menú de funciones hiperbólicas:



Las funciones hiperbólicas son:

Seno hiperbólico, SINH, y su inversa, ASINH o $\sinh^{-1}$
Coseno hiperbólico, COSH, y su inversa, ACOSH o $\cosh^{-1}$
Tangente hiperbólica, TANH, y su inversa, ATANH o $\tanh^{-1}$

Este menú contiene también las funciones:

$$EXPM(x) = \exp(x) - 1,$$
$$LNP1(x) = \ln(x+1).$$

Finalmente, la opción *9. MATH*, vuelve a usuario al menú de MTH.

Por ejemplo, en modo de ALG, la secuencia de golpe de teclado para calcular tanh(2.5) es la siguiente:

← MTH	Seleccionar el menú MTH
4 OK	Seleccionar *4. HYPERBOLIC..*
5 OK	Seleccionar *5. TANH*
2 . 5 ENTER	Evaluar *tanh(2.5)*

La pantalla muestra el siguiente resultado:

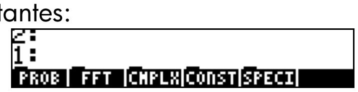
En el modo de RPN, las teclas para realizar este cálculo son los siguientes:

2 . 5 ENTER	Escriba los argumentos en la pantalla
← MTH	Seleccionar el menú MTH
4 OK	Seleccionar *4. HYPERBOLIC..*
5 OK	Seleccionar *5. TANH*

El resultado es:

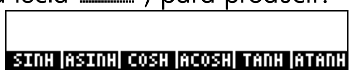
Las operaciones mostradas anteriormente asumen que uno utiliza la opción pre-definida para la señal de sistema número 117 (*CHOOSE boxes*). Si uno ha cambiado esta señal de sistema (véase el Capítulo 2) a *SOFT menu*, el menú MTH resulta ser como se muestra a continuación (a la izquierda en modo ALG, a la derecha en Modo RPN):

Presione NXT para mostrar las opciones restantes:



Nota: Al presionar ← PREV se recobra el primer menú de opciones de *MTH*. También, usando la combinación → ▼ enumerará todas las funciones del menú en la pantalla, por ejemplo

Así, seleccionar, por ejemplo, el menú de las funciones hiperbólicas, presionar la tecla HYP , para producir:



Finalmente, para seleccionar, por ejemplo, la función tangente hiperbólica (tanh), simplemente presione TANH.

Nota: Para ver opciones adicionales en estos menús, presione la tecla NXT o la secuencia ← PREV .

Por ejemplo, para calcular *tanh(2.5),* en modo ALG, cuando se usan menús de teclas (*SOFT menus*) en vez de menús de listas (*CHOOSE boxes*), utilícese el procedimiento siguiente:

← MTH	Seleccionar el menú MTH
HYP	Seleccionar el menú *HYPERBOLIC..*
TANH	Seleccionar *TANH*
2 . 5 ENTER	Evaluar *tanh(2.5)*

En Modo RPN, el mismo valor se calcula utilizando:

2 . 5 ENTER	Escribir argumentos en la pantalla
← MTH	Seleccionar el menú *MTH*
HYP	Seleccionar el menú *HYPERBOLIC..*
TANH	Seleccionar *TANH*

Como ejercicio de aplicación de las funciones hiperbólicas, verifíquense los siguientes valores:

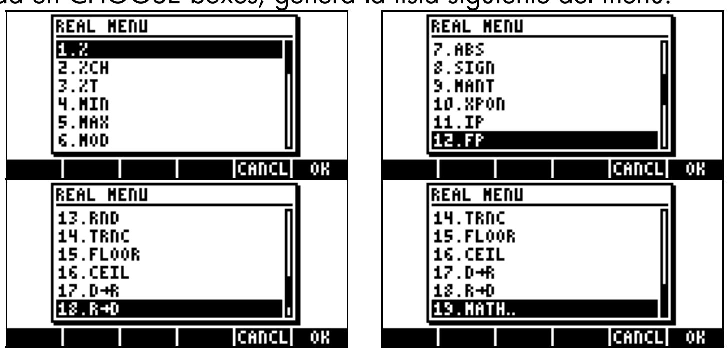
SINH (2.5) = 6.05020..	ASINH(2.0) = 1.4436…
COSH (2.5) = 6.13228..	ACOSH (2.0) = 1.3169…

TANH(2.5) = 0.98661..   ATANH(0.2) = 0.2027…
EXPM(2.0) = 6.38905….   LNP1(1.0) = 0.69314….

De nuevo, el procedimiento general demostrado en esta sección se puede utilizar para seleccionar opciones en cualquier menú de la calculadora.

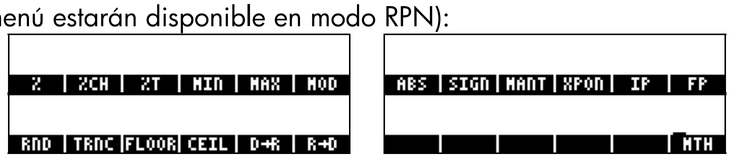
Funciones de números reales

Seleccionar la opción *5. REAL..* en el menú de MTH, con la bandera 117 del sistema fijada en CHOOSE boxes, genera la lista siguiente del menú:



La opción *19. MATH..* recobra el menú MTH. Las funciones restantes se agrupan en seis diversos grupos descritos a continuación.

Si la bandera 117 del sistema se fija a SOFT menus, el menú de las funciones REAL lucirá como se muestra a continuación (en el modo ALG, las mismas teclas del menú estarán disponible en modo RPN):



La opción última, MTH, recobra el menú MTH.

Funciones del porcentaje

Estas funciones se utilizan para calcular porcentajes y valores relacionados como sigue:

% (y,x)   : calcula el porcentaje x de y

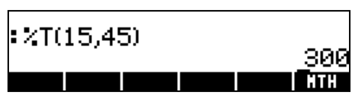
%CH(y,x) : calcula 100(y-x)/x, es decir, el cambio porcentual, La diferencia entre dos números.

%T(y,x) : calcula100 x/y, es decir, La porción que un número (*x*) constituye de otro (*y*).

Estas funciones requieren dos argumentos. A continuación, se ilustra el cálculo de *%T(15,45)*, es decir, calcular el 15% de 45. Asumimos que la calculadora está fijada al modo ALG, y que la bandera 117 del sistema está fijada en CHOOSE boxes. El procedimiento es como sigue:

← MTH	Seleccionar el menú *MTH*
5 OK	Seleccionar el menú *5. REAL..*
3 OK	Seleccionar *5. %T*
1 5	Escriba el primer argumento
→ ,	Escriba una coma para separar argumentos
4 5	Escriba el segundo argumento
ENTER	Calcular función

El resultado es:



En modo RPN, recordar que el argumento y está situada en el segundo nivel de la pantalla, mientras que el argumento x está situada en el primer nivel. Esto significa que usted debe escribir x primero, y después escribir la y, como en modo de ALG. Así, el cálculo de %T(15,45), en modo RPN. Así, el cálculo de *%T(15,45)*, en modo RPN, y con la bandera del sistema 117 fijada a *CHOOSE boxes*, proseguimos de la forma siguiente:

1 5 ENTER	Escriba el primer argumento
4 5 ENTER	Escriba el segundo argumento
← MTH	Seleccionar el menú *MTH*
5 OK	Seleccionar el menú *5. REAL..*
3 OK	Seleccionar *5. %T*

Nota: Los ejercicios en esta sección ilustran el uso general de las funciones de la calculadora que tienen 2 argumentos. La operación de las funciones que tienen 3 o más argumentos se puede generalizar de estos ejemplos.

Como ejercicio para las funciones de porcentajes, verificar los valores siguientes: *%(5,20) = 1, %CH(22,25) = 13.6363.., %T(500,20) = 4*

Mínimo y máximo
Utilizar estas funciones para determinar el valor mínimo o máximo de dos discusiones.

MIN(x,y) : valor mínimo de x y de y
MAX(x,y) : valor máximo de x y de y

Como ejercicio, verificar que *MIN(-2,2) = -2, MAX(-2,2) = 2*

Módulo
MOD: y mod x = residuo de y/x, es decir, si x y y son números enteros, y/x = d + r/x, en la cual d = cociente, r = residuo. En este caso, r = y mod x.

Notar por favor que MOD no es una función, sino un operador, por ejemplo, en modo ALG, MOD se debe utilizar como `y MOD x`, y no como `MOD(y,x)`. Así, la operación de la MOD es similar a la de [+], [−], [×], [÷].

Como ejercicio, verificar que*15 MOD 4 = 15 mod 4 = residuo de 15/4 = 3*

Valor absoluto, signo, mantisa, exponente, parte entera y fraccionaria

ABS(x) : calcula el valor absoluto, |x|
SIGN(x): determina el signo de x, i.e., -1, 0, o 1.
MANT(x): determina la mantisa de un número basado en $\log_{10}$.
XPON(x): determina la potencia de 10 en el número
IP(x) : determina parte entera de un número real
FP(x) : determina la parte fraccionaria de un número real

Como ejercicio, verificar que *ABS(-3) = |-3| = 3, SIGN(-5) = -1, MANT(2540) = 2.540, XPON(2540) = 3, IP(2.35) = 2, FP(2.35) = 0.35.*

Funciones de redondeo, truncado, piso, y techo

RND(x,y) : redondea y a x decimales
TRNC(x,y) : trunca y a x decimales
FLOOR(x) : entero más cercano que es menor igual que x
CEIL(x) : entero más cercano que es mayor o igual que x

Como ejercicio, verificar eso que *RND(1.4567,2) = 1.46, TRNC(1.4567,2) = 1.45, FLOOR(2.3) = 2, CEIL(2,3) = 3*

Funciones para transformar radianes a grados y viceversa

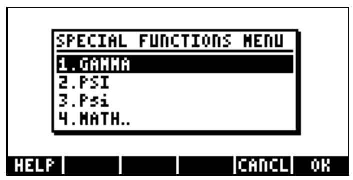
D→R (x) : convierte grados a radianes

R→D (x) : convierte radianes a grados

Como ejercicio, verificar que *D→R(45) = 0.78539* (es decir, 45° = 0.78539^{rad}), *R→D(1.5) = 85.943669..* (es decir, 1.5^{rad} = 85.943669..°).

Funciones especiales

La opción *11. Special functions…* en el menú MTH incluye las funciones siguientes:



GAMMA: La función gamma $\Gamma(\alpha)$

PSI: derivada N de la función digamma

Psi: Función digamma, derivada de ln(Gamma)

La función gamma se define como $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$. Esta función tiene usos en las matemáticas aplicadas para la ciencia y la ingeniería, así como en probabilidad y estadística.

<u>Factorial de un número</u>

El factorial de un número positivo entero *n* se define como *n!=n·(n-1)·(n-2) …3·2·1*, con *0! = 1*. La función factorial está disponible en la calculadora usando [ALPHA][→][2]. En modos ALG y RPN, incorporar el número, primero, seguido por la secuencia [ALPHA][→][2]. Ejemplo: [5][ALPHA][→][2][ENTER].

La función gamma, definida arriba, tiene la siguiente característica

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\ \Gamma(\alpha-1), \text{ con } \alpha > 1.$$

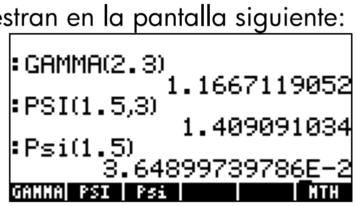
Por lo tanto, puede ser relacionado con el factorial de un número, es decir, $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$, en la cual α es un número entero positivo. Podemos también utilizar la función factorial para calcular la función gamma, y viceversa. Por ejemplo, $\Gamma(5) = 4!$ o, [4][ALPHA][→][2][ENTER]. La función factorial está disponible en el menú MTH, el menú *7. PROBABILITY..*

La función PSI, $\Psi(n,x)$, representa la n derivada de la función digamma, es decir., $\Psi(n,x) = \frac{d^n}{dx^n}\psi(x)$, en la cual $\psi(x)$ se conoce como la función digamma, o función Psi. Para esta función, *n* debe ser un número entero positivo.

La función Psi, $\psi(x)$, o función digamma, se define como $\psi(x) = \ln[\Gamma(x)]$.

Los ejemplos de estas funciones especiales se demuestran aquí usando los modo ALG y RPN. Como ejercicio, verifique que *GAMMA(2.3) = 1.166711…, PSI(1.5,3) = 1.40909..*, y *Psi(1.5) = 3.64899739..E-2.*

Estos cálculos se demuestran en la pantalla siguiente:



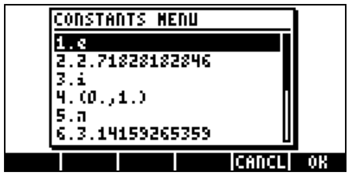
Constantes de la calculadora

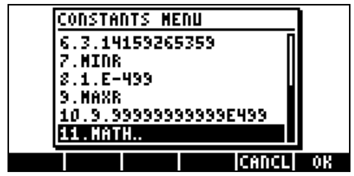
Los siguientes son las constantes matemáticas usadas por su calculadora:

- *e*: la base de logaritmos naturales.
- *i*: la unidad imaginaria, $i^2 = -1$.
- π: el cociente de la longitud del círculo a su diámetro.
- MINR: el número real mínimo disponible en la calculadora.
- MAXR: el número real máximo disponible en la calculadora.

Para tener acceso a estas constantes, seleccione la opción *11. CONSTANTS..* en el menú MTH,

Las constantes se enumeran como sigue:





Seleccionar cualesquiera de estas entradas pondrá el valor seleccionado, ya sea un símbolo (por ejemplo, *e*, *i*, π, *MINR*, o *MAXR*) o un valor (*2.71..*, *(0,1), 3.14.., 1E-499, 9.99..E499*) en la pantalla.

Notar por favor que la *e* está disponible en el teclado como *exp(1)*, es decir, ← e^x 1 ENTER, en modo ALG, o 1 ENTER ← e^x , en modo RPN. Así mismo, π está disponible directamente del teclado como ← π . Finalmente, *i* está disponible usando ← *i* .

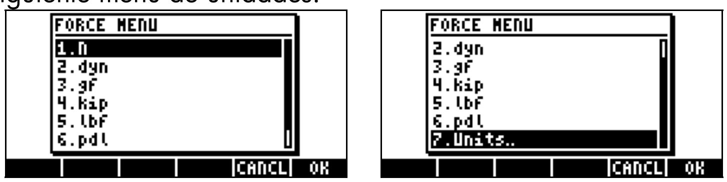
Operaciones con unidades

Los números reales en la calculadora pueden escribirse con unidades de medida. Por lo tanto, es posible calcular resultados que involucren un sistema de unidades consistentes y producir un resultado con la combinación de unidades apropiadas.

El menú de UNIDADES

El menú de unidades (UNITS menu) se obtiene a través de la combinación de teclas → UNITS (asociada con la tecla 6). Con la señal de sistema número 117 indicando listas de menú (*CHOOSE boxes*), el resultado es el siguiente menú:

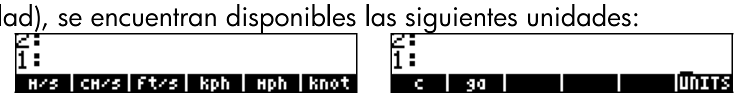
La opción *1. Tools..* (herramientas) contiene las funciones usadas para operar en unidades (se presentan más adelante). Las opciones *3. Length..* a *17.Viscosity..* contiene menús con varias unidades para cada una de las cantidades descritas. Por ejemplo, al seleccionarse la opción *8. Force..* se muestra el siguiente menú de unidades:



El usuario reconocerá la mayoría de estas unidades de sus estudios de física o química (algunas, por ejemplo, la dina (dyne), ya no se utilizan muy comúnmente): *N* = newton, *dyn* = dynes (dinas), *gf* = gramos – fuerza (distinto de gramos-masa, ó simplemente gramos, una unidad de masa), *kip* = kilo-poundal (1000 libras), *lbf* = libra-fuerza (distinto de libra-masa), *pdl* = poundal.

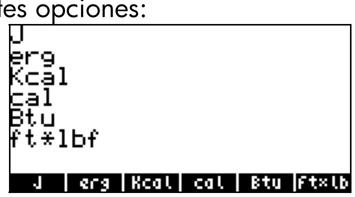
El uso de teclas de menú (SOFT menus) provee una forma más conveniente de agregar unidades cuando se utilizan números con unidades. Cámbiese la señal de sistema número 117 a la opción SOFT menus (véase el Capítulo 1), y utilícese la combinación de teclas ↱ UNITS para obtener los siguientes menús. Presiónese la tecla NXT para activar la siguiente página del menú.

Al presionarse la tecla de menú apropiada se abrirá el sub-menú de unidades para esa selección particular. Por ejemplo, para el menú SPEED (rapidez, velocidad), se encuentran disponibles las siguientes unidades:



Al presionarse la tecla UNITS se reactiva el menú de UNIDADES.

Las opciones de un menú pueden listarse en la pantalla al usar las teclas , por ejemplo, para las unidades (energía) se listan las siguientes opciones:



Nota: Utilícense las teclas NXT ó PREV para navegar a través de los diferentes menús.

Unidades disponibles

Lo que sigue es una lista de las unidades disponibles en el menú de las UNIDADES. El símbolo de la unidad se demuestra primero seguido por el nombre de la unidad en paréntesis:

LONGITUD

m (metro), cm (centímetro), mm (milímetro), yd (yarda), ft (pies), in (pulgada), Mpc (Mega parsec), pc (parsec), lyr (año luz), au (unidad astronómica), km (kilómetro), mi (milla internacional), nmi (milla náutica), miUS (milla estatutaria EE.UU.), chain (cadena), rd (rod), fath (fathom), ftUS (pie de topografía), Mil (Mil), μ (micron), Å (Angstrom), fermi (fermi)

AREA

m^2 (metro cuadrado), cm^2 (centímetro cuadrado), b (barn), yd^2 (yarda cuadrada), ft^2 (pies cuadrados), in^2 (pulgada cuadrada), km^2 (kilómetro cuadrado), ha (hectárea), a (are), mi^2 (milla cuadrada), miUS^2 (milla cuadrada estatutoria), acre (acre)

VOLUMEN

m^3 (metro cúbico), st (stere), cm^3 (centímetro cúbico), yd^3 (yarda cúbica), ft^3 (pies cúbicos), in^3 (pulgada cúbica), l (litro), galUK (galón UK), galC (Galón canadiense), gal (Galón de los E.E.U.U.), qt (cuarta), pt (pinta), ml (mililitro), cu (Taza de los E.E.U.U.), ozfl (Onza líquida de los E.E.U.U.), ozUK (Onza fluida BRITÁNICA), tbsp (cuchara de sopa), tsp (cucharilla), bbl (barril), bu (bushel), pk (peck), fbm (pie de tablero)

TIEMPO
yr (año), d (día), h (hora), min (minuto), s (segundo), Hz (hertz)

VELOCIDAD
m/s (metro por segundo), cm/s (centímetro por segundo), ft/s (pies por segundo), kph (kilómetro por hora), mph (milla por hora), knot (millas náuticas por hora), c (velocidad de la luz), ga (aceleración de la gravedad)

MASA
kg (kilogramo), g (gramo), Lb (libra del sistema de pesos americano), oz (onza), slug (slug), lbt (libra de Troy), ton (tonelada corta), tonUK (tonelada larga), t (tonelada métrica), ozt (onza de Troy), ct (carate), grain (grano), u (masa atómica unificada), mol (mol)

FUERZA
N (newton), dyn (dina), gf (gramo- fuerza), kip (kilopound-fuerza), lbf (libra-fuerza), pdl (poundal)

ENERGÍA
J (julio), erg (ergio), Kcal (kilocaloría), Cal (caloría), Btu (unidad térmica británica internacional), ft×lbf (pie-libra), therm (EEC therm), MeV (mega electrón-voltio), eV (electrón-voltio)

POTENCIA
W (vatio), hp (caballo de fuerza),

PRESIÓN
Pa (pascal), atm (atmósfera), bar (bar), psi (libras por pulgada cuadrada), torr (torr), mmHg (milímetros de mercurio), inHg (pulgadas de mercurio), inH20 (pulgadas de agua),

TEMPERATURA
°C (grado Celsius), °F (grado Fahrenheit), K (Kelvin), °R (grado Rankine),

CORRIENTE ELÉCTRICA (medidas eléctricas)
V (voltio), A (amperio), C (coulombio), Ω (ohmio), F (faradio), W (vatio), Fdy (faraday), H (henry), mho (mho), S (siemens), T (tesla), Wb (weber)

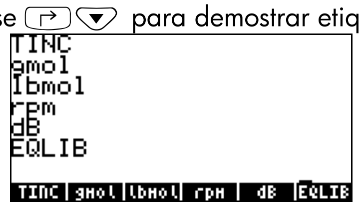
ÁNGULO (medidas angulares planas y sólidas)
° (grado sexagesimal), r (radián), grad (grado centesimal), arcmin (minuto del arco), arcs (segundo de arco), sr (esterradián)

LUZ (medidas de la iluminación)
fc (pie-bujía), flam (footlambert), lx (lux), ph (phot), sb (stilb), lm (lumem), cd (candela), lam (lambert)

RADIACIÓN
Gy (gray), rad (rad), rem (rem), Sv (sievert), Bq (becquerel), Ci (curie), R (roentgen)

VISCOSIDAD
P (poise), St (stokes)

Unidades no enumeradas
Las unidades no enumeradas en el menú de unidades, que sin embargo están disponibles en la calculadora, incluyen: gmol (gramo-mole), lbmol (libra-mole), rpm (revoluciones por minuto), dB (decibelios). Estas unidades son accesibles a través de menú 117.02, accionado usando MENU(117.02) en modo ALG, o 117.02 ENTER MENU en modo RPN. El menú se mostrará en la pantalla como sigue (use ↱ ▼ para demostrar etiquetas en la pantalla):



Estas unidades son también accesibles a través del catálogo, por ejemplo:

gmol:	↱ _CAT ALPHA ↰ G
lbmol:	↱ _CAT ALPHA ↰ L
rpm:	↱ _CAT ALPHA ↰ R
dB:	↱ _CAT ALPHA ↰ D

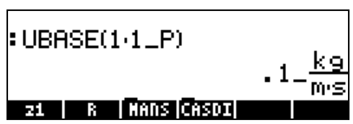
El convertir a las unidades básicas

Para convertir cualesquiera de estas unidades a las unidades básicas en el sistema internacional (SI), utilice la función UBASE. Por ejemplo, para calcular el valor de 1 poise (unidad de viscosidad) en las unidades SI, utilice lo siguiente:

En modo ALG, bandera de sistema 117 fijada a *CHOOSE boxes*:

↱ UNITS	Seleccionar el menú UNITS
OK	Seleccionar el menú TOOLS
▼ OK	Seleccionar la función UBASE
1 ↱ _	Introducir 1 y subrayarlo
↱ UNITS	Seleccionar el menú UNITS
▲ OK	Seleccionar la opción VISCOSITY
OK	Seleccionar el menú UNITS
ENTER	Convertir las unidades

Esto resulta se muestra en la pantalla siguiente (es decir, *1 poise = 0.1 kg/(m·s)*):



En modo RPN, bandera del sistema 117 fija a *CHOOSE boxes*:

1	Introducir 1 (sin subrayado)
↱ UNITS	Seleccionar el menú UNITS
▲ OK	Seleccionar la opción VISCOSITY
OK	Seleccionar la unidad P (poise)
↱ UNITS	Seleccionar el menú UNITS
OK	Seleccionar el menú TOOLS
▼ OK	Seleccionar la función UBASE

En modo ALG, bandera del sistema 117 fijado a *SOFT menus*:

↱ UNITS	Seleccionar el menú UNITS
TOOLS	Seleccionar el menú TOOLS
UBASE	Seleccionar la función UBASE
1 ↱ _	Introducir 1 y subrayarlo

→ UNITS	Seleccionar el menú UNITS
← PREV VISC	Seleccionar la opción VISCOSITY
P	Seleccionar la unidad P (poise)
ENTER	Convertir las unidades

En modo RPN, bandera del sistema 117 fijada a *SOFT menus*:

1	Introducir 1 (sin subrayado)
→ UNITS	Seleccionar el menú UNITS
← PREV VISC	Seleccionar la opción VISCOSITY
P	Seleccionar la unidad P (poise)
→ UNITS	Seleccionar el menú UNITS
TOOLS	Seleccionar el menú TOOLS
UBASE	Seleccionar la función UBASE

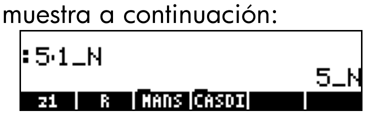
Agregando unidades a los números reales

Para adjuntar unidades a un número, el número debe seguirse de una línea subrayada (→ _ , tecla (8,5)). Por lo tanto, una fuerza de 5 N se escribe como 5_N.

La siguiente secuencia de teclas permite escribir este número con unidades en modo ALG (la señal de sistema número 117 utiliza la opción *CHOOSE boxes*):

5 → _	Incorporar el número y la raya
→ UNITS	Acceder al menú de las UNIDADES
8 OK	Seleccionar unidades de fuerza (*8. Force..*)
OK	Seleccionar Newtons (*N*)
ENTER	Pasar cantidad con unidades al stack

La pantalla lucirá como se muestra a continuación:

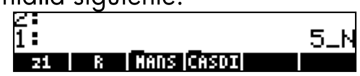


Nota: Si se olvida uno de escribir la línea subrayada, el resultado es la expresión algebraica 5*N, en la cual N representa una variable y no las unidades de fuerza, Newtons.

Para escribir esta misma cantidad, con la calculadora en Modo RPN, utilícense las teclas siguientes:

5	Escribir el número (sin subrayado)
↱ UNITS	Acceder al menú UNITS
8 OK	Seleccionar unidades de fuerza (*8. Force..*)
OK	Seleccionar Newtons (*N*)

Nótese que la línea subrayada se escribe automáticamente al usarse el modo RPN . El resultado es la pantalla siguiente:



Según lo indicado anteriormente, si bandera del sistema 117 se fija a *SOFT menus*, el menú UNITS se mostrará como etiquetas de las teclas del menú. Esta opción es muy conveniente para operaciones extensas con unidades.

La secuencia de teclas para escribir unidades cuando la opción *SOFT menu* ha sido seleccionada, en ambos modos, ALG y RPN, se ilustran a continuación. Por ejemplo, en Modo ALG, para escribir la cantidad 5_N use:

5 ↱ _	Escribir el número y subrayado
↱ UNITS	Acceder al menú UNITS
NXT FORCE	Seleccionar unidades de fuerza
N	Seleccionar Newtons (*N*)
ENTER	Pasar la cantidad con unidades al "stack"

La misma cantidad escrita en Modo RPN utiliza las siguientes teclas:

5	Escribir el número (sin subrayado)
↱ UNITS	Acceder el menú UNITS
NXT FORCE	Seleccionar unidades de fuerza
N	Seleccionar Newtons (*N*)

Nota: Uno puede escribir una cantidad con unidades utilizando el teclado alfanumérico ALPHA, por ejemplo, 5 ↱ _ ALPHA N produce la cantidad: 5_N

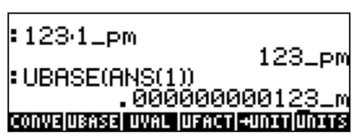
Prefijos de unidades
Uno puede escribir prefijos para las unidades de acuerdo con la siguiente tabla de prefijos del Sistema Internacional (S.I.). La abreviatura del prefijo se muestra primero, seguida del nombre, y del exponente x en el factor 10^x correspondiente a cada prefijo:

Prefijo	Nombre	x	Prefijo	Nombre	x
Y	yotta	+24	d	deci	-1
Z	zetta	+21	c	centi	-2
E	exa	+18	m	milli	-3
P	peta	+15	μ	micro	-6
T	tera	+12	n	nano	-9
G	giga	+9	p	pico	-12
M	mega	+6	f	femto	-15
k,K	kilo	+3	a	atto	-18
h,H	hecto	+2	z	zepto	-21
D(*)	deka	+1	y	yocto	-24

(*) en el sistema SI, este prefijo se escribe *da* en vez de *D*. En la calculadora, sin embargo, utilícese D en vez de deca.

Para escribir estos prefijos, simplemente utilícese el teclado alfanumérico ALPHA. Por ejemplo, para escribir 123 pm (picómetro), use:
1 2 3 ↱ _ ALPHA ↰ P ALPHA ↰ M

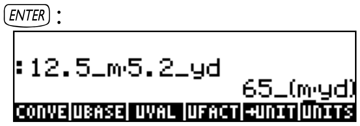
La función UBASE, que se usa para convertir a la unidad base (1 m), produce lo siguiente:



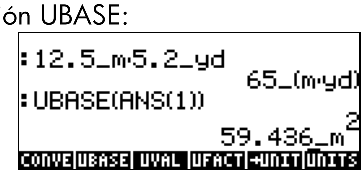
Operaciones con unidades
Una vez que una cantidad acompañada con las unidades se pasa al “stack”, la misma puede ser utilizada en las operaciones matemáticas, excepto que

esas cantidades con unidades no puedan utilizarse como argumentos de funciones (digamos, SQ o SIN). Así, procurando calcular LN(10_m) producirá un mensaje de error: *Error: Bad Argument Type.*

A continuación se presentan algunos ejemplos de cálculos con unidades en el modo ALG. Téngase en cuenta que, cuando se multiplican o dividen cantidades con unidades, uno debe encerrar esas cantidades entre paréntesis. Por lo tanto, para escribir, por ejemplo, el producto 12m × 1.5 yd, úsese (12_m)*(1.5_yd) ENTER :

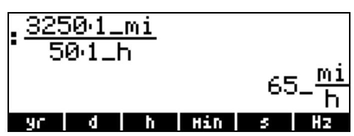


que resulta en 65_(m·yd). Para convertir este resultado a unidades del sistema SI, utilícese la función UBASE:

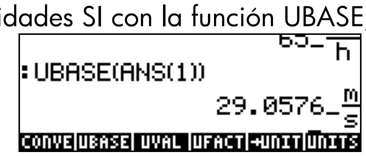


Nota: Recuérdese que la variable ANS(1) se encuentra disponible a través de la secuencia de teclas ← ANS (asociada con la tecla ENTER).

Para calcular una división, por ejemplo, 3250 mi / 50 h, escríbase como (3250_mi)/(50_h) ENTER

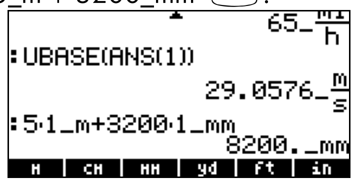


la cual, transformada a unidades SI con la función UBASE, produce:

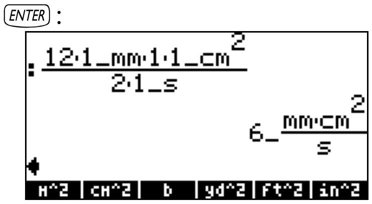


La adición y la substracción pueden ejecutarse, en modo ALG, sin usar paréntesis, por ejemplo, 5 m + 3200 mm, se escribe simplemente como:

5_m + 3200_mm ENTER.



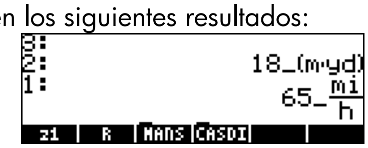
Expresiones más complicadas requieren el uso de paréntesis, por ejemplo, (12_mm)*(1_cm^2)/(2_s) ENTER:



Cálculos en la pantalla (stack) en modo RPN, no requieren que se encierren los términos entre paréntesis, por ejemplo,

12_m ENTER 1.5_yd ENTER ×
3250_mi ENTER 50_h ENTER ÷

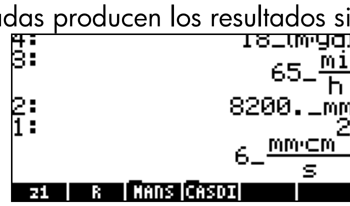
Estas operaciones producen los siguientes resultados:



También, ejecute las operaciones siguientes:

5_m ENTER 3200_mm ENTER +
12_mm ENTER 1_cm^2 ENTER × 2_s ENTER ÷

Estas dos operaciones pasadas producen los resultados siguientes:



Nota: Las unidades no se permiten en las expresiones escritas en el escritor de ecuaciones.

Herramientas para la manipulación de unidades

El menú de unidades (UNITS menu) contiene un sub-menú de herramientas (TOOLS), el cual provee las siguiente funciones:

CONVERT(x,y): convierte unidades x a unidades y
UBASE(x): convierte unidades x a unidades SI
UVAL(x): extrae el valor de la cantidad, x, con unidades
UFACT(x,y): factoriza las unidades y de la cantidad x
→UNIT(x,y): combines valor de x con unidades de y

La función UBASE fue presentada detalladamente en una sección anterior en este capítulo. Para tener acceso cualesquiera de estas funciones siga los ejemplos proporcionados anteriormente para UBASE. Nótese que, mientras que la función UVAL requiere solamente un argumento, las funciones CONVERT, UFACT, y →UNIT requieren dos argumentos.

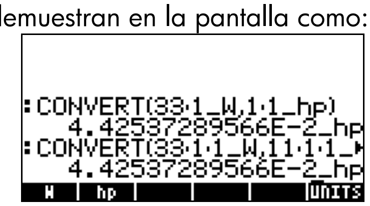
Intentar los ejercicios siguientes, en sus ajustes preferidos de la calculadora. La salida demostrada posteriormente fue desarrollada en modo ALG con la bandera del sistema 117 fijada a *SOFT menu*:

Ejemplos de CONVERT

Estos ejemplos producen el mismo resultado, es decir, convertir 33 vatios a BTU's

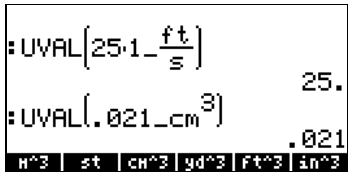
CONVERT(33_W,1_hp) ENTER
CONVERT(33_W,11_hp) ENTER

Estas operaciones se demuestran en la pantalla como:



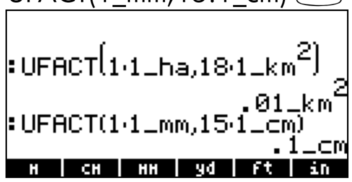
Ejemplos de UVAL:

UVAL(25_ft/s) ENTER
UVAL(0.021_cm^3) ENTER



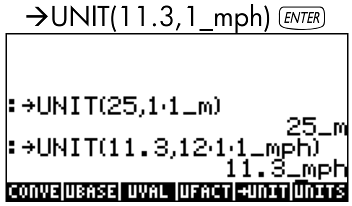
Ejemplos de UFACT

UFACT(1_ha,18_km^2) ENTER
UFACT(1_mm,15.1_cm) ENTER



Ejemplos de →UNIT

→UNIT(25,1_m) ENTER
→UNIT(11.3,1_mph) ENTER



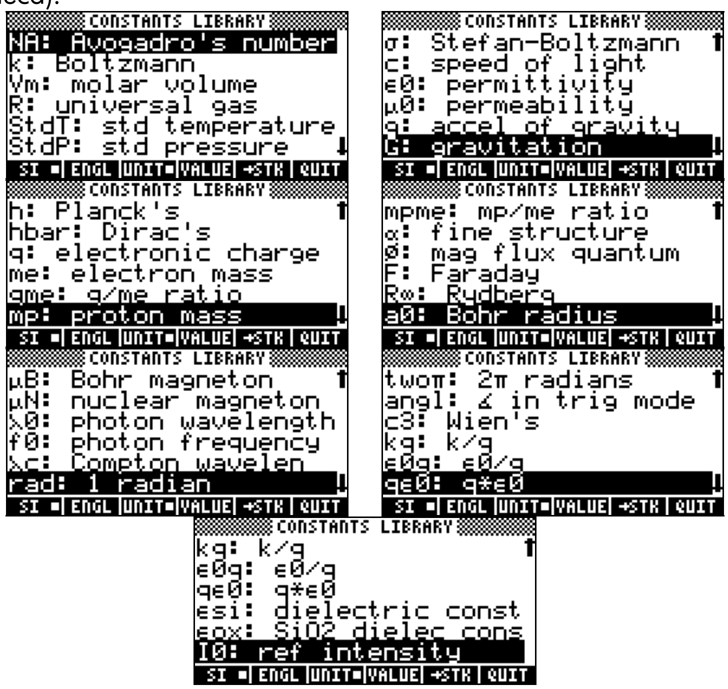
Constantes físicas en la calculadora

Continuando con referencias a unidades, discutimos a continuación el uso de las constantes físicas que están disponibles en la memoria de la calculadora. Estas constantes se localizan en una biblioteca de constantes (*constants library*) que se activa con la función CONLIB. Para activar esta función escríbase en la pantalla el nombre de la función:

ALPHA ALPHA C O N L I B ALPHA ENTER,

o, selecciónese la función CONLIB en el catálogo de funciones siguiendo este procedimiento: Primero, ábrase el catálogo de funciones utilizando: → _CAT ALPHA C . A continuación, utilícense las teclas direccionales verticales ▲ ▼ para seleccionar CONLIB. Finalmente, presiónese la tecla de menú F6 (OK). Presiónese ENTER, de ser necesario. utilícense las teclas direccionales verticales (▲▼) para navegar a través de la lista de constantes en la calculadora.

La pantalla de la biblioteca de las constantes lucirá como se muestra a continuación (utilizar las teclas direccionales verticales para navegar a través de la biblioteca):

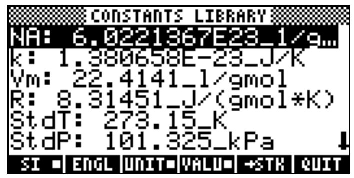


Las teclas de menú correspondientes a la biblioteca de constantes (CONSTANTS LIBRARY) incluyen las siguientes funciones:

SI	cuando se selecciona esta opción, se usan unidades SI (*)
ENGL	cuando se selecciona esta opción, se usan unidades inglesas (*)
UNIT	cuando se selecciona esta opción, se muestran unidades
VALUE	cuando se selecciona esta opción, no se muestran unidades
→STK	copia el valor (con ó sin unidades) a la pantalla
QUIT	abandona la biblioteca de unidades

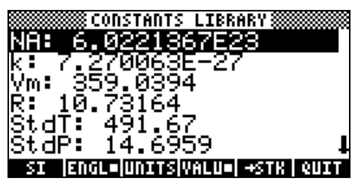
(*) Activada solamente si la opción VALUE (valor) ha sido seleccionada.

La pantalla de la biblioteca de constantes (CONSTANTS LIBRARY) aparece como se muestra a continuación si se ha seleccionado la opción VALUE (unidades en el sistema SI):

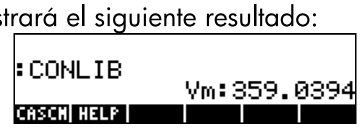


Para ver los valores de las constantes en el sistema inglés (o sistema imperial), presiónese la opción ENGL :

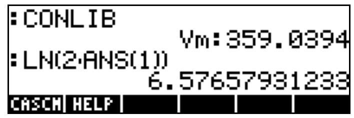
Si se remueve la opción UNITS opción (presiónese UNITS) se muestran solamente los valores de las constantes (en este caso, en unidades inglesas):



Para copiar el valor de Vm a la pantalla, selecciónese el nombre de la constante y presiónese !→STK, después, presiónese QUIT. Cuando se utiliza el modo ALG, la pantalla mostrará el siguiente resultado:



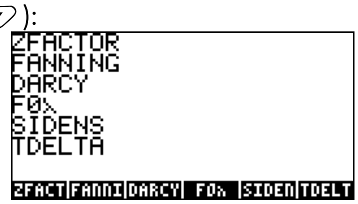
La pantalla muestra lo que se denomina un valor rotulado (*tagged value*), Vm:359.0394. En este resultado, Vm, es el rótulo (*tag*) del resultado. Cualquier operación aritmética que utilice este número simplemente ignora el rótulo en el resultado. Por ejemplo: ↱ LN 2 × ↰ ANS ENTER produce:



Esta misma operación en Modo RPN requiere las siguientes teclas (después de extraer el valor de Vm de la biblioteca de constantes): 2 ENTER × ↱ LN

Funciones físicas especiales

El menú 117, accionado usando MENU(117) en modo de ALG, ó 117 ENTER MENU en modo RPN, produce el menú siguiente (etiquetas enumeradas en la pantalla usando ↱ ▼):



Las funciones incluyen:
ZFACTOR: función del factor de la compresibilidad Z del gas
FANNING: factor de fricción FANNING para el flujo fluido
DARCY: Factor de fricción Darcy-Weisbach para el flujo fluido
F0λ: Función de emisión de potencia para un cuerpo negro
SIDENS: Densidad intrínseca del silicio
TDELTA: Función delta de la temperatura

En la segunda página de este menú (presione NXT) encontramos las opciones siguientes:

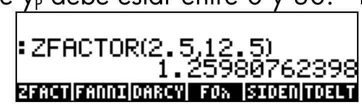
En esta página del menú, hay una función (TINC) y un número de unidades descritas en una sección anterior. La función de interés es:

TINC: función del incremento de la temperatura

De todas las funciones disponibles en este MENÚ (menú UTILITY), a saber, ZFACTOR, FANNING, DARCY, F0λ, SIDENS, TDELTA, y TINC, las funciones FANNING y DARCY se describen en el capítulo 6 en el contexto de solucionar las ecuaciones para el flujo de tuberías. Las funciones restantes se describen a continuación.

Función ZFACTOR

La función ZFACTOR calcula el factor de la corrección de la compresibilidad del gas para el comportamiento no-ideal de hidrocarburos gaseosos. La función se invoca usando ZFACTOR(x_T, y_P), en la cual x_T es la temperatura reducida, es decir, el cociente de la temperatura real a la temperatura pseudo-crítica, y y_P es la presión reducida, es decir, el cociente de la presión real a la presión pseudo-crítica. El valor de x_T debe estar entre 1.05 y 3.0, mientras que el valor de y_P debe estar entre 0 y 30. Ejemplo, en modo ALG:



Función F0λ

La función F0λ (T, λ) calcula la fracción (adimensional) de la potencia emisiva de un cuerpo negro total a la temperatura T entre las longitudes de onda 0 y λ. Si no se usan unidades con T y λ, se implica que T es en K y λ en m. Ejemplo, en modo ALG:

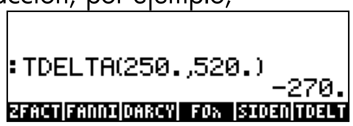
Función SIDENS

La función SIDENS(T) calcula la densidad intrínseca del silicio (en unidades de 1/cm^3) en función de temperatura T (T en K), para T entre 0 y 1685 K. Por ejemplo,

Función TDELTA

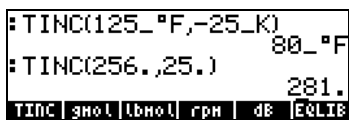
La función TDELTA(T_0,T_f) rinde el incremento de la temperatura $T_f - T_0$. El resultado se produce con las mismas unidades que T_0, si existen. Si no, produce simplemente la diferencia en números. Por ejemplo,

El propósito de esta función es facilitar el cálculo de las diferencias de la temperatura dadas temperaturas en diversas unidades. Si no, se calcula simplemente una substracción, por ejemplo,



Función TINC

La función TINC(T_0,ΔT) calcula T_0+DT. La operación de esta función es similar a la de la función TDELTA en el sentido que produce un resultado en las unidades de T_0. Si no, produce una adición simple de valores, ejemplo del por,



Definiendo y usando funciones

Los usuarios pueden definir sus propias funciones a través de la partícula DEFINE disponible a través de las teclas ⬅ DEF (asociada con la tecla 2). La función deberá escribirse en el siguiente formato:

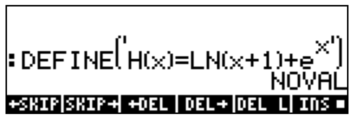
Nombre_de_la_función(argumentos) = expresión_contaniendo_argumentos

Por ejemplo, definamos una función relativamente simple, *H(x) = ln(x+1) + exp(-x)*.

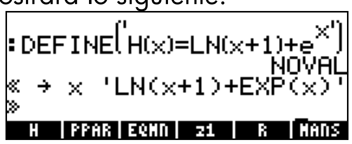
Supóngase que uno tiene que evaluar esta función para un número de valores discretos y que, por lo tanto, se requiere simplemente presionar una tecla para esa evaluación. En el siguiente ejemplo, asumimos que la calculadora opera en modo ALG. Escríbase la siguiente secuencia de teclas:

← DEF ' ALPHA H ← () ALPHA ← X ▶ → =
→ LN ALPHA ← X + 1 ▶ + ← e^x ALPHA ← X ENTER

La pantalla lucirá como se muestra a continuación:



Presiónese la tecla VAR, nótese la existencia de una nueva variable en las teces de menú (H). Para examinar el contenido de esta variable presiónese → H. La pantalla mostrará lo siguiente:



La variable H, por lo tanto, incluye el siguiente programa:

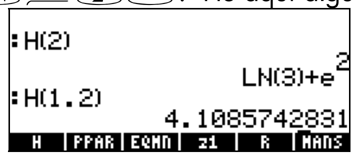
<< → x 'LN(x+1) + EXP(x)' >>

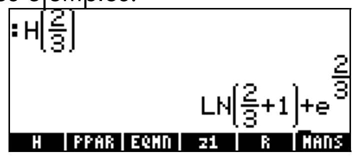
Este es un programa relativamente simple escrito en el lenguaje de programación proveído con las calculadoras de la serie HP 48 G, y también incorporado en la serie de calculadoras HP 49 G. Este lenguaje de programación se denomina UserRPL (Véanse los Capítulos 20 y 21 en la Guía del Usuario de la calculadora). El programa mostrado anteriormente es relativamente simple y consiste de dos partes, contenidas entre los símbolos « » :

- Entrada: → x
- Procesamiento: 'LN(x+1) + EXP(x) '

Estas dos partes se interpretan de esta manera: escríbase un valor que se asigna temporalmente al símbolo *x* (denominado una variable local), evalúese la expresión entre apóstrofes que contiene a la variable local, y muéstrese la expresión evaluada.

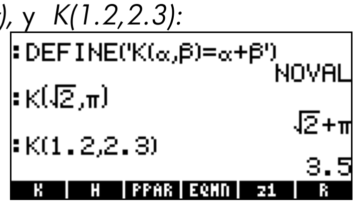
Para activar esta función en modo ALG, escríbase el nombre de la función seguida por los argumentos entre paréntesis, por ejemplo,
H ← () 2 ENTER. He aquí algunos ejemplos:





Para activar la función en modo RPN, escríbase primero el argumento, seguido de la tecla de menú con el nombre de la función, H. Por ejemplo, ejecútese esta operación: 2 ENTER H. Los otros ejemplos mostrados anteriormente pueden escribirse en modo RPN utilizando:
1 . 2 ENTER H, 2 ÷ 3 ENTER H.

Las funciones pueden tener más de 2 argumentos. Por ejemplo, la pantalla abajo demuestra la definición de la función *K(α,β) = α+β,* y su evaluación con argumentos *K(√2,π),* y *K(1.2,2.3):*



El contenido de la variable K es: << → α β 'α+β' >>.

Funciones definidas por más de una expresión

En esta sección discutimos el tratamiento de las funciones que son definidas por dos o más expresiones. Un ejemplo de tales funciones sería

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 2 \cdot x - 1, & x < 0 \\ x^2 - 1, & x > 0 \end{Bmatrix}$$

La calculadora provee la función IFTE (IF-Then-Else) para describir tales funciones.

La función IFTE

Se escribe la función de IFTE como

IFTE(*condición*, *operación_si_verdadera*, *operation_si_falsa*)

Si la condición es verdadera entonces operación_si_verdadera se realiza, sino se realiza la opción operación_si_falsa . Por ejemplo, podemos escribir 'f(x) = IFTE(x>0, x^2-1, 2*x-1)', para describir la función mostrada anteriormente. La función IFTE es accesible a través del catálogo de la función (↱ CAT). El símbolo '>' (mayor que) está disponible asociado a la tecla 1/x. Para definir esta función en modo ALG utilice la instrucción:

DEF(f(x) = IFTE(x>0, x^2-1, 2*x-1))

y presione ENTER. En modo de RPN, escriba la definición de la función entre los apóstrofes:

'f(x) = IFTE(x>0, x^2-1, 2*x-1)'

y presione ↰ DEF .

Presione VAR para recuperar el menú de variables. La función f estará disponible en su menú de teclas. Presione ↱ f para ver el programa que resulta: << → x 'IFTE(x>0, x^2-1, 2*x-1)' >>

Para evaluar la función en modo de ALG, escriba el nombre de la función, f, seguido por el número en el cual usted desea evaluar la función, por ejemplo, f(2), y presione ENTER. En modo de RPN, escriba un número y presione f. Verifique, por ejemplo, que *f(2) = 3*, mientras que *f(-2) = -5*.

Funciones IFTE combinadas

Para programar una función más complicada, por ejemplo,

$$g(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ x+1, & -2 \le x < 0 \\ x-1, & 0 \le x < 2 \\ x^2, & x \ge 2 \end{cases}$$

usted puede combinar varios niveles de la función IFTE, es decir,

'g(x) = IFTE(x<-2, -x, IFTE(x<0, x+1, IFTE(x<2, x-1, x^2)))',

Defina esta función por cualesquiera de los medios presentados arriba, y compruebe que g(-3) = 3, g(-1) = 0, g(1) = 0, g(3) = 9.

Capítulo 4
Cálculos con números complejos

Este Capítulo muestras ejemplos de cálculos y aplicación de funciones a números complejos.

Definiciones

Un *número complejo z* se define como $z = x + iy$, (representación Cartesiana) en la cual x y y son números reales, y la i es la *unidad imaginaria* definida por $i^2 = -1$. El número z posee una *parte real*, $x = Re(z)$, y una *parte imaginaria*, $y = Im(z)$. Podemos imaginar a un número complejo como el punto $P(x,y)$ en el plano, con el eje x designado *el eje real*, y el eje y designado *el eje imaginario*. Así, un número complejo representado en la forma $x+iy$ se dice estar en su *representación cartesiana*. Una representación cartesiana alternativa es el par ordenado $z = (x,y)$. Un número complejo también puede escribirse en su *representación polar* , $z = re^{i\theta} = r\cdot\cos\theta + i\, r\cdot\sin\theta$, en la cual $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la *magnitud* del número complejo z, y $\theta = Arg(z) = \arctan(y/x)$ *es* el *argumento* del número complejo z. La relación entre la representación cartesiana y polar de los números complejos es dada por el fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$. El *conjugado complejo* de un número complejo $z = x + iy = re^{i\theta}$, es $\bar{z} = x - iy = re^{-i\theta}$. El conjugado complejo de z se puede interpretar como la reflexión de z con respecto al eje real. De manera similar, el *negativo* de z, $-z = -x-iy = -re^{i\theta}$, puede visualizarse como la reflexión de z con respecto al origen (0,0).

.

Fijando la calculadora al modo COMPLEJO

Para operaciones con números complejos selecciónese el modo complejo (COMPLEX) del CAS: MODE CAS 2 ˅ ˅ ˃ ✓CHK

El modo COMPLEX estará activo en la forma interactiva denominada CAS MODES si se muestra una marca de aprobado (✓) en la opción _*Complex*:

Presione OK, dos veces, para recobrar la pantalla normal de la calculadora.

Escritura de números complejos

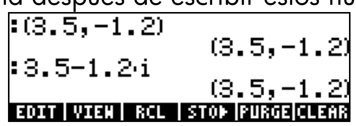
Los números complejos en la calculadora pueden escribirse en una de dos representaciones Cartesianas: *x+iy*, o *(x,y)*. Los resultados complejos en la calculadora se muestran el formato de par ordenado, es decir, *(x,y)*. Por ejemplo, con la calculadora in modo ALG, el número complejo *(3.5,-1.2),* se escribe con las siguientes teclas:

← () 3 . 5 → , +/- 1 . 2 ENTER

Un número complejo puede escribirse también en la forma *x+iy*. Por ejemplo, en modo ALG, *3.5-1.2i* se escribe con las siguientes teclas:

3 . 5 − 1 . 2 × → i ENTER

La pantalla siguiente resulta después de escribir estos números complejos:



En modo RPN, estos números se escriben utilizando las siguientes teclas:

← () 3 . 5 → , 1 . 2 +/- ENTER

(Nótese que la tecla de cambio de signo se escribe después número 1.2, en el orden contrario al del ejercicio anterior realizado en modo ALG), y

' 3 . 5 − 1 . 2 × → i ENTER

(Nótese que se necesita un apóstrofe antes del número 3.5-1.2i en modo RPN). La pantalla RPN que resulta será:

Notar que la última escritura en la pantalla muestra un número complejo en la forma *x+iy*. Esto es así porque el número fue escrito entre apóstrofes, lo que representa una expresión algebraica. Para evaluar esta expresión use la tecla EVAL (EVAL).

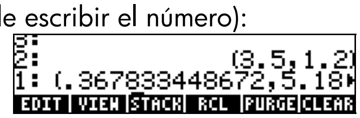
Una vez que se evalúe la expresión algebraica, usted recupera el número complejo (3.5,1.2).

Representación polar de un número complejo

La representación polar del número complejo 3.5-1.2i, que se utilizó anteriormente, se obtiene al cambiar el sistema de coordenadas de Cartesianas (o rectangulares) a cilíndricas (o polares) usando la función CYLIN. Esta función se puede obtener a través del catálogo de funciones (‚N). Presiónese la tecla *μ* antes o después de usar la función CYLIN. Cambiando las coordenadas a polares y las medidas angulares a radianes, produce el siguiente resultado:

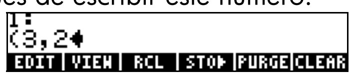
Para este resultado la medida angular se fija a radianes (usted puede cambiar a radianes usando la función RAD). Este formato incluye una magnitud, 3.7, y un ángulo, 0.33029…. El símbolo de ángulo (∠) se muestra delante de la medida angular.

Cámbiense las coordenadas de vuelta a Cartesianas o rectangulares utilizando la función RECT (disponible en el catálogo de funciones, ⟨→⟩ CAT). Un número complejo en representación polar se escribe como $z = r \cdot e^{i\theta}$. Se puede escribir este número complejo utilizando un par ordenado de la forma (r, ∠θ). El símbolo de ángulo (∠) puede escribirse utilizando las teclas ALPHA ⟨→⟩ 6 . Por ejemplo, el número complejo $z = 5.2e^{1.5i}$, puede escribirse como se muestra a continuación (las figuras muestran la pantalla RPN, es decir, el stack, antes y después de escribir el número):



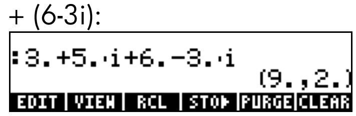
Dado que el sistema de coordenadas activo es el sistema rectangular (o Cartesiano), la calculadora automáticamente convierte el número a Coordenadas Cartesianas, es decir, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, resultando, para este caso, en el valor (0.3678…, 5.18…).

Ahora bien, si el sistema de coordenadas activo es el de coordenadas cilíndricas (utilícese la función CYLIN para activarlo), al escribirse un número complejo (x,y), en el cual x y y son números reales, se producirá una representación polar. Por ejemplo, en coordenadas cilíndricas, escríbase el número (3.,2.). Las figuras siguientes muestran la pantalla RPN (stack), antes y después de escribir este número:



Operaciones simples con números complejos

Los números complejos se pueden combinar usando las cuatro operaciones fundamentales (+ − × ÷). Los resultados siguen las reglas de la álgebra con la advertencia de que $i^2= -1$. Las operaciones con números complejos son similares a las operaciones con números reales. Por ejemplo, con la calculadora en modo ALG y el CAS fijado a *Complex*, procuraremos la suma siguiente: (3+5i) + (6-3i):



Notar que las partes reales (3+6) y las partes imaginarias (5-3) se combinan junto y el resultado dado como un par ordenado con la parte real 9 y la parte imaginaria 2. Intente las operaciones siguientes:

(5-2i) - (3+4i) = (2,-6)
(3-i)·(2-4i) = (2,-14)
(5-2i)/(3+4i) = (0.28,-1.04)
1/(3+4i) = (0.12, -0.16)

Notas:
El producto de dos números se representa por: $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\ (x_1y_2 + x_2y_1)$.
La división de dos números complejos se logra multiplicando numerador y denominador por el conjugado complejo del denominador, esto es,

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\cdot\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

Así, la función inversa INV (activado con la tecla 1/x) se define como

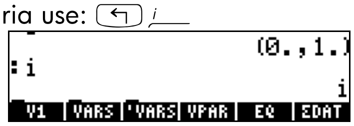
$$\frac{1}{x+iy}=\frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$$

Cambio de signo de un número complejo

Cambiar el signo de un número complejo puede lograrse usando la tecla +/-, por ejemplo, -(5-3i) = -5 + 3i

Escritura de la unidad imaginaria

Para la unidad imaginaria use: ← *i*



Notar que el número *i* se escribe como el par ordenado *(0,1)* si el CAS se fija al modo Aproximado. En modo EXACTO, se escribe la unidad imaginaria como *i*.

Otras operaciones

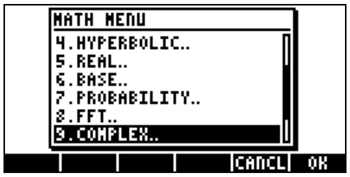
Las operaciones tales como magnitud, discusión, piezas verdaderas e imaginarias, y conjugación del complejo están disponibles a través de los menús CMPLX detallados más adelante.

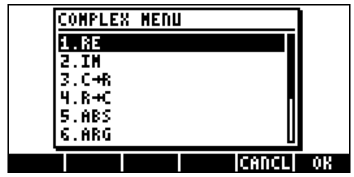
Los menús CMPLX

Hay dos menús CMPLX (CoMPLeX) disponible en la calculadora. Uno está disponible a través del menú MTH (presentado en el capítulo 3) y uno directamente en el teclado (→ CMPLX). Los dos menús de CMPLX se presentan a continuación.

Menú CMPLX a través del menú MTH

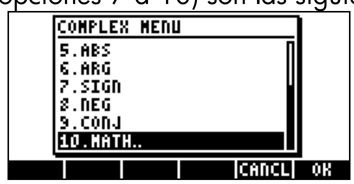
Si se asume que la bandera 117 del sistema está fijada a **CHOOSE boxes** (ver el capítulo 2), el sub-menú CMPLX dentro del menú MTH es activado usando: ← MTH 9 OK . La secuencia siguiente de pantallas ilustra estos pasos:





El primer menú (opciones 1 a 6) demuestra las funciones siguientes:
RE(z) : Parte real de un número complejo
IM(z) : Parte imaginaria de un número complejo
C→R(z) : Separa un número complejo (x,y) en sus partes real e imaginaria
R→C(x,y): Forma el número complejo *(x,y)* dadas las partes real e imaginaria
ABS(z) : Calcula la magnitud de un número complejo o del valor absoluto de un número real.
ARG(z): Calcula el argumento de un número complejo.

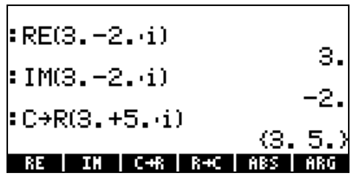
Las opciones restantes (opciones 7 a 10) son las siguientes:



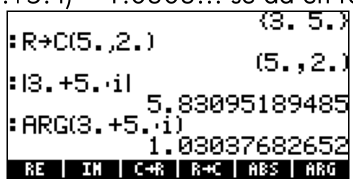
SIGN(z) : Calcula un número complejo de magnitud unitaria como z/|z|.
NEG : Cambia el signo de z
CONJ(z): Produce el conjugado complejo de z

Los ejemplos de usos de estas funciones se demuestran después. Recordar que, para el modo ALG, la función debe preceder la discusión, mientras que en modo RPN, usted incorpora la discusión primero, y en seguida selecciona la función. También, recordar que usted puede conseguir estas funciones como teclas de menús cambiando el ajuste de la bandera 117 del sistema (Ver el Capítulo 3).

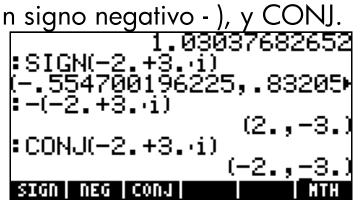
Esta primera pantalla muestra las funciones RE, IM, y C→R. Notar que la última función, C→R, produce una lista {3. 5.} representando las partes real e imaginaria del número complejo:



La pantalla siguiente demuestra las funciones R→C, ABS, y ARG. Nótese que la función ABS se traduce a |3.+5.·i|, la notación del valor absoluto. También, el resultado de la función ARG, que representa un ángulo, será dado en las unidades de la medida del ángulo seleccionadas actualmente. En este ejemplo, ARG(3.+5.·i) = 1.0303… se da en radianes.

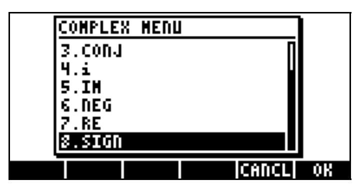


En la pantalla siguiente presentamos ejemplos de las funciones SIGN, NEG (que se muestra como un signo negativo -), y CONJ.



Menú CMPLX en el teclado

Un segundo menú de CMPLX es accesible usando la función secundaria asociada con la tecla /, esto es, → CMPLX. Con el sistema de la bandera 117 del sistema a CHOOSE boxes, el menú del teclado CMPLX muestra las pantallas siguientes:

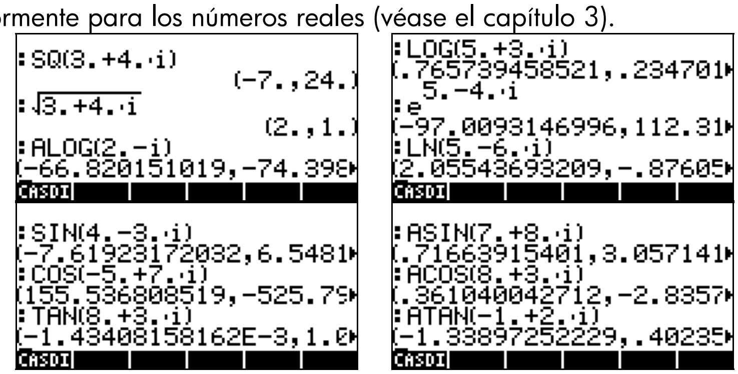


El menú que resulta incluye algunas de las funciones presentadas ya en la sección anterior, a saber, ARG, ABS, CONJ, IM, NEG, RE, y SIGN. También incluye la función *i* cuál responde al mismo propósito que la combinación ⬅ *i* , es decir, escribir la unidad imaginaria *i* en una expresión.

El menú de teclado CMPLX es una alternativa al menú CMPLX de MTH que contiene las funciones básicas de los números complejos. Ejecute los ejemplos demostrados anteriormente usando el menú de teclado CMPLX para practicar su uso.

Funciones aplicadas a los números complejos

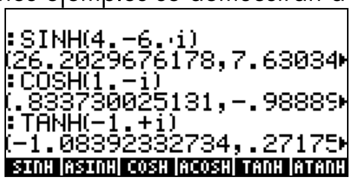
Muchas de las funciones de teclado definidas en el capítulo 3 para los números reales, por ejemplo, SQ, ,LN, e^x, LOG, 10^X, SIN, COS, TAN, ASIN, ACOS, ATAN, puede ser aplicadas a los números complejos. El resultado es otro número complejo, según lo ilustrado en los ejemplos siguientes. La aplicación de estas funciones sigue el mismo procedimiento presentado anteriormente para los números reales (véase el capítulo 3).

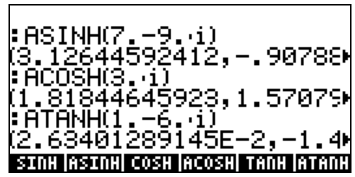


Nota: Al usar funciones trigonométricas y sus inversas con números complejos, los argumentos no son ya ángulos. Por lo tanto, la medida angular seleccionada para la calculadora no tiene ningún efecto en el cálculo de estas funciones con argumentos complejos. Para entender la manera en que las funciones trigonométricas, y otras funciones, se definen para los números complejos consulte un libro sobre variables complejas.

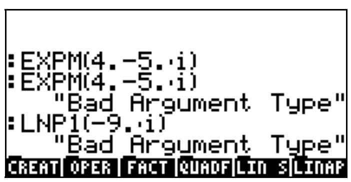
Funciones del menú de MTH

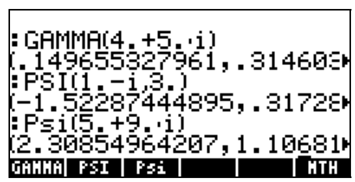
Las funciones hiperbólicas y sus lo contrario, así como las funciones Gamma, PSI, y Psi (funciones especiales) fueron presentadas y aplicadas a los números reales en el capítulo 3. Estas funciones se pueden también aplicar a los números complejos siguiendo los procedimientos presentados en el capítulo 3. Algunos ejemplos se demuestran a continuación:





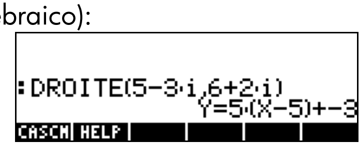
Las pantallas siguientes muestran que las funciones EXPM y LNP1 no se aplican a los números complejos. Sin embargo, las funciones GAMMA, PSI, y Psi sí aceptan números complejos como argumentos:



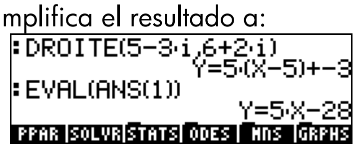


Función DROITE: ecuación de una línea recta

La función DROITE tomas como argumentos dos números complejos, digamos, x_1+iy_1 y x_2+iy_2, y produce la ecuación de una línea recta, digamos, $y = a+bx$, eso contiene los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2). Por ejemplo, la línea entre los puntos A(5,-3) y B(6,2) puede determinarse como se muestra a continuación (ejemplo en modo algebraico):



La función DROITE se encuentra en el catálogo de funciones (→ CAT).
El usar EVAL(ANS(1)) simplifica el resultado a:



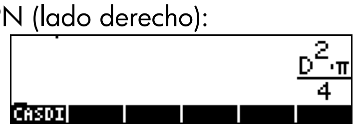
Capítulo 5
Operaciones algebraicas y aritméticas

Un objeto algebraico es cualquier número, nombre de variable, o expresión algebraica sobre el que se pueden efectuar operaciones, que puede manipularse, o combinarse de acuerdo a las reglas del álgebra. Algunos ejemplos de objetos algebraicos se presentan a continuación:

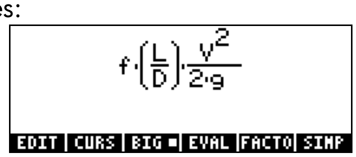
- Un número: 12.3, 15.2_m, 'π', 'e', 'i'
- Un nombre de variable: 'a', 'ux', 'ancho', etc.
- Una expresión: 'p*D^2/4','f*(L/D)*(V^2/(2*g))',
- Una ecuación: 'p*V = n*R*T', 'Q=(Cu/n)*A(y)*R(y)^(2/3)*√So'

Escritura de los objetos algebraicos

Los objetos algebraicos pueden crearse al escribir el objeto entre apóstrofes directamente en la pantalla, o utilizando el escritor de ecuaciones (EQW). Por ejemplo, para escribir el objeto algebraico 'π*D^2/4' directamente en la pantalla utilícese: ' ← π × ALPHA D y^x 2 ÷ 4 ENTER. La pantalla que resulta se muestra a continuación para el modo ALG (lado izquierdo) y el modo RPN (lado derecho):



Un objeto algebraico puede construirse en el escritor de ecuaciones (Equation Writer) y después enviado a la pantalla, o manipulado en el Escritor de ecuaciones mismo. La operación del Escritor de ecuaciones se describió en el Capítulo 2. Como ejercicio, constrúyase el siguiente objeto algebraico en el Escritor de ecuaciones:



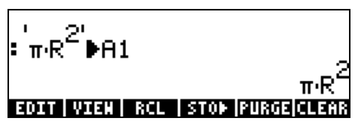
Después de construir el objeto algebraico, presiónese ENTER para mostrarlo en la pantalla (las pantallas en modos ALG y RPN se muestran a continuación):

Operaciones elementales con objetos algebraicos

Los objetos algebraicos pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse (excepto por cero), elevarse a una potencia, usarse como argumentos de funciones (por ejemplo, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, hiperbólicas, etc.), como se haría con cualquier número real o complejo. Para demostrar las operaciones básicas con objetos algebraicos, constrúyanse un par de objetos algebraicos, por ejemplo, 'π*R^2' y 'g*t^2/4', y almacénense en las variables A1 y A2 (véase el Capítulo 2 para aprender como crear variables y almacenar valores en ellas). He aquí el procedimiento para almacenar la variable A1 en modo ALG:

' ← π × ALPHA R y^x 2 ▶ STO▶ ALPHA A 1 ENTER ,

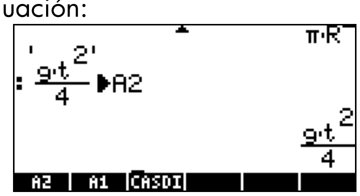
El resultado es:



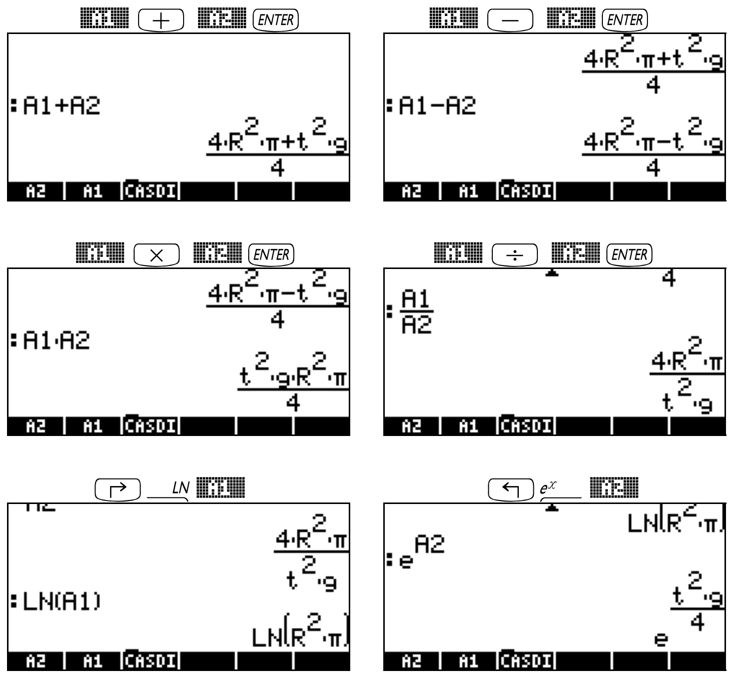
Las instrucciones correspondientes en modo RPN son:

' ← π × ALPHA R y^x 2 ENTER ALPHA A 1 STO▶

Después de almacenar la variable A2, la pantalla mostrará las variables como se muestra a continuación:



En modo ALG, las siguientes instrucciones muestran varias operaciones elementales con los objetos algebraicos contenidos en las variables A1 y A2 (presiónese VAR para recobrar el menú de variables):

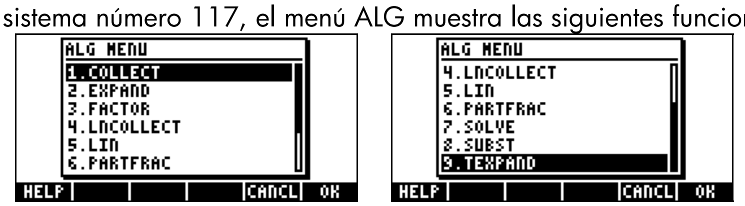


Los mismos resultados se obtienen en modo RPN si se utilizan las instrucciones siguientes:

A1 ENTER A2 +	A1 ENTER A2 −
A1 ENTER A2 ×	A1 ENTER A2 ÷
A1 ENTER ⇨ LN	A2 ENTER ⇦ e^x

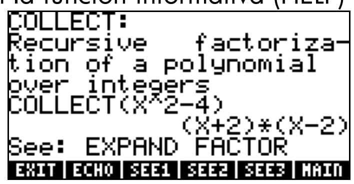
Funciones en el menú ALG

El menú ALG (Algebraico) se activa utilizando las teclas ⇨ ALG (asociado con la tecla 4). Habiendo escogido la opción *CHOOSE boxes* para la señal de sistema número 117, el menú ALG muestra las siguientes funciones:



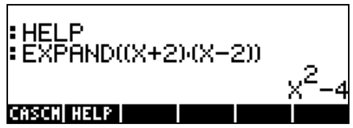
Utilícese la función informativa (HELP) de la calculadora para ver la explicación de las diferentes funciones del menú ALG. Para activar la función informativa (HELP) utilícense las siguientes teclas: TOOL NXT HELP ENTER . Para localizar una función particular en la función informativa, escríbase la primera letra del nombre de la función. Por ejemplo, para localizar la función COLLECT, utilícense las teclas ALPHA C , y después utilícense las teclas direccionales verticales ▲▼ para localizar la palabra COLLECT dentro de la lista de la función informativa.

Para completar la operación presiónese la tecla OK. He aquí la definición de la función COLLECT en la función informativa (HELP) de la calculadora:



Nótese que la última línea contiene el texto “See: EXPAND FACTOR” (traducción: Véase: EXPAND FACTOR). Esta línea sugiere enlaces a otras definiciones dentro de la función informativa (HELP): las funciones EXPAND y FACTOR. Para acceder esas funciones directamente, presiónese la tecla de menú SEE1 o SEE2. Presiónese SEE1 para la definición de la función EXPAND.

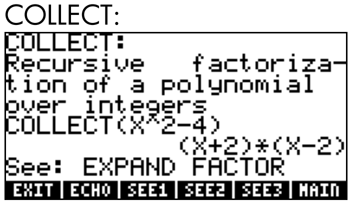
La función informativa de la calculadora provee no solamente la información en cada instrucción, sino que también proporciona un ejemplo de su uso. Para copiar a la pantalla el ejemplo mostrado en la definición presiónese la tecla de menú ECHO. Por ejemplo, presiónese la tecla ECHO en la definición de la función EXPAND, mostrada anteriormente, para obtener el ejemplo que se muestra a continuación (presiónese ENTER para ejecutar el ejemplo):



Se invita al usuario a explorar las diferentes funciones en el menú ALG (o ALGB) utilizando la función informativa (HELP). Las siguientes listas muestra todas las funciones en ese menú:

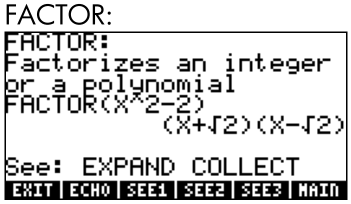
La función informativa (HELP) provee las siguientes definiciones para diversas instrucciones:

COLLECT:

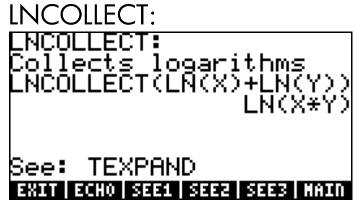


EXPAND:

FACTOR:

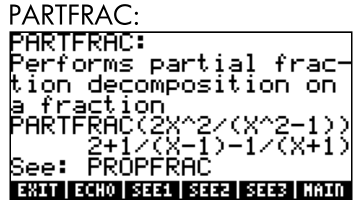


LNCOLLECT:

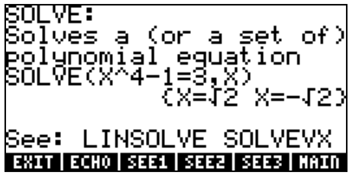


LIN:

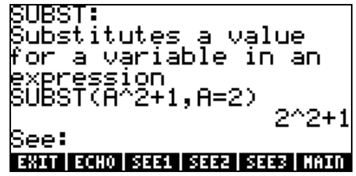
PARTFRAC:



SOLVE:



SUBST:



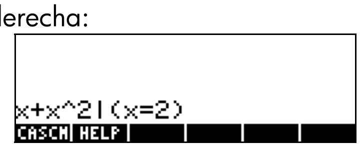
TEXPAND:

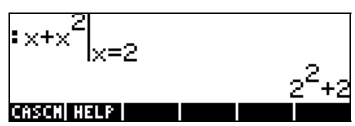
Nota: Recuérdese que para utilizar estas, y otras, funciones en el modo RPN, debe escribirse primero el argumento de la función y después activarse la misma. Por ejemplo, para el caso de la función TEXPAND, mostrado anteriormente, utilícese: ['] [←] e^x [+] [ALPHA] [X] [+] [ALPHA] [Y] [ENTER]

A continuación, actívese la función TEXPAND en el menú ALG (o, directamente, en el catálogo de funciones [→] CAT), para completar la operación.

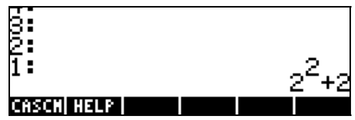
Otras formas de substitución en expresiones algebraicas

La función SUBST, mostrada anteriormente, se utiliza para sustituir una variable en una expresión. Una segunda forma de substitución puede ser lograda usando [→] | (asociado a la tecla I). Por ejemplo, en modo ALG, la entrada siguiente substituirá el valor $x = 2$ en la expresión $x+x^2$. La figura a la izquierda demuestra la manera de incorporar la expresión (el valor substituido, x=2, se debe incluir en paréntesis) antes de presionar [ENTER]. Después de que la tecla [ENTER] se presiona, el resultado se muestra en la figura de la derecha:





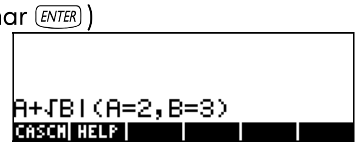
En modo RPN, esto se logra incorporando primero la expresión donde la substitución será realizada ($x+x^2$), seguido por una lista (véase el capítulo 8) conteniendo la variable de la substitución, un espacio, y el valor que se substituirá, es decir, {x 2}. El paso final es presionar la combinación del golpe de teclado: ↱ | .

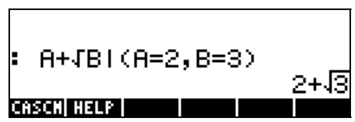


Las teclas requeridas son los siguientes:

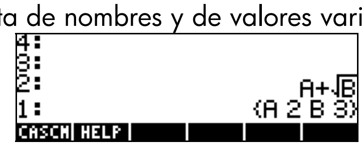
' ALPHA ↰ X + ALPHA ↰ X y^x 2 ENTER
↰ {} ALPHA ↰ X SPC 2 ENTER ↱ | ENTER

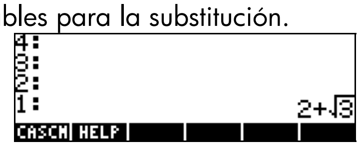
En modo ALG, la substitución de más de una variable es posible según lo ilustrado en el ejemplo siguiente (se muestra la pantalla antes y después el presionar ENTER)





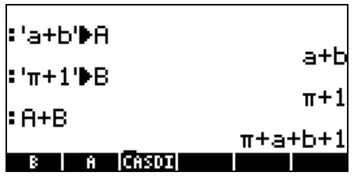
En modo RPN es también posible sustituir más que uno variable a la vez, según lo ilustrado en el ejemplo abajo. Recuérdese que el modo RPN utiliza una lista de nombres y de valores variables para la substitución.





Un proceso diferente para la substitución consiste en definir las expresiones de la substitución en variables de la calculadora y poner el nombre de las variables en la expresión original. Por ejemplo, en modo de ALG, almacene las variables siguientes:

Entonces, escriba la expresión A+B:



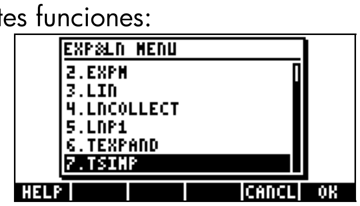
La expresión última se evalúa automáticamente después de presionar ENTER, produciendo el resultado demostrado arriba.

Operaciones con funciones transcendentales

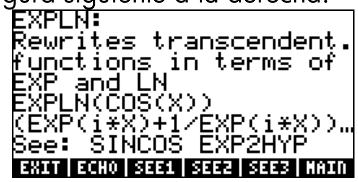
La calculadora ofrece un número de funciones que se puedan utilizar para sustituir funciones logarítmicas, exponenciales, trigonométricas, e hiperbólicas en expresiones en términos de identidades trigonométricas o en términos de funciones exponenciales. Los menús que contienen funciones para sustituir funciones trigonométricas se pueden obtener directamente del teclado la función secundaria de la tecla 8, es decir, ↱ TRIG. La combinación siguiente ↱ EXP&LN, produce un menú que le permite sustituir expresiones en términos de las funciones exponenciales o logaritmo natural. En las secciones siguientes cubrimos esos menús más detalladamente.

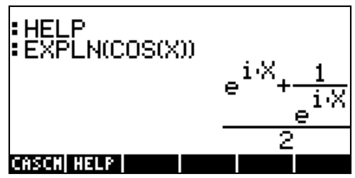
Expansión y factorización utilizando las funciones log-exp

El menú ↰ EXP&LN contiene las siguientes funciones:



Las definiciones de estas funciones, así como los ejemplos correspondientes, se encuentran disponibles en la función informativa (HELP) de la calculadora (TOOL NXT HELP ENTER). Algunas de las funciones enumerada en el menú EXP&LN, esto es, LIN, LNCOLLECT, y TEXPAND también se contienen en el menú ALG presentado anteriormente. Las funciones LNP1 y EXPM se introdujeron en el menú HYPERBOLIC, bajo el menú MTH (Ver El Capítulo 2). La única función restante es EXPLN. Su descripción se muestra en la figura siguiente a la izquierda, mientras que el ejemplo correspondiente se muestra en la figura siguiente a la derecha:





Expansión y factorización utilizando funciones trigonométricas

El menú TRIG, que se obtiene utilizando ‹→› TRIG, muestra las siguientes funciones:

Estas funciones permiten la simplificación de expresiones al reemplazar ciertas categorías de funciones trigonométricas por otras categorías. Por ejemplo, la función ACOS2S permite reemplazar la función *arco coseno* (acos(x)) por una expresión que involucra la función *arco seno* (asin(x)).

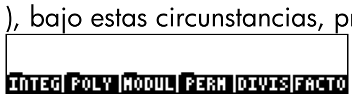
Las definiciones de estas funciones, así como los ejemplos correspondientes, se encuentran disponibles en la función informativa (HELP) de la calculadora (TOOL NXT HELP ENTER). Se invita al usuario a investigar esa información por su propia cuenta.

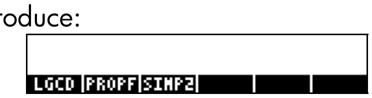
Notése que la primera opción en el menú TRIG es el menú HYPERBOLIC, de cuyas funciones fueron introducidas en capítulo 2.

Funciones en el menú ARITHMETIC

El menú ARITHMETIC contiene un número de sub-menús para aplicaciones específicas en la teoría de los números (números enteros, polinomios, etc.), así como un número de funciones que se aplican a las operaciones aritméticas generales. El menú ARITHMETIC se activa utilizando ← ARITH (asociada con la tecla /). Con la opción *CHOOSE boxes* seleccionada para la señal de sistema número 117, la combinación ← ARITH muestra el siguiente menú:

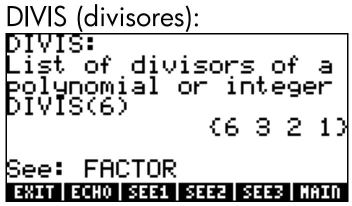
De esta lista, las opciones 5 a 9 (*DIVIS, FACTORS, LGCD, PROPFRAC, SIMP2*) corresponden a funciones que aplican a números enteros o a polinomios. Las opciones restantes (*1. INTEGER*, *2. POLYNOMIAL*, *3. MODULO*, y *4. PERMUTATION*) son en realidad sub-menús de funciones que aplican a objetos matemáticos específicos. Esta distinción entre los sub-menús (opciones 1 a 4) y funciones (opciones 5 a 9) es aparente cuando la bandera de sistema 117 se fija a *SOFT menus*. Activando el menú ARITHMETIC (← ARITH), bajo estas circunstancias, produce:



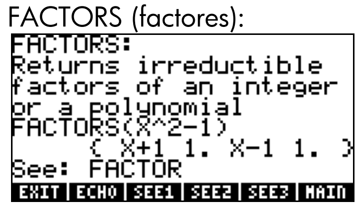


A continuación, presentamos pantallas de la función informativa del CAS para las funciones de las opciones 5 a 9 en el menú ARITHMETIC:

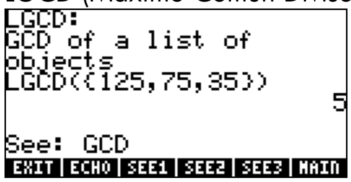
DIVIS (divisores):



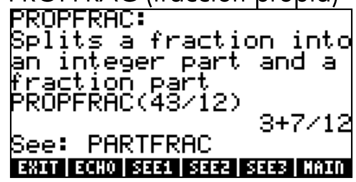
FACTORS (factores):



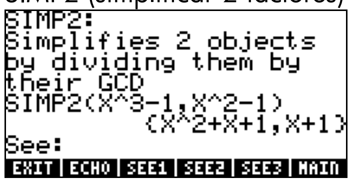
LGCD (Máximo Común Divisor):



PROPFRAC (fracción propia)



SIMP2 (simplificar 2 factores)



Las funciones asociadas con los sub-menús del menú ARITHMETIC: INTEGER, POLYNOMIAL, MODULO, y PERMUTATION, son las siguientes:

Menú INTEGER

EULER Número de enteros < n, co - primos con n
IABCUV Resuelve au + bv = c, con a,b,c = enteros
IBERNOULLI n Número de Bernoulli
ICHINREM Residuo chino para los enteros
IDIV2 División euclidiana de dos números enteros
IEGCD Produce u,v, tales que au + bv = mcd(a,b)
IQUOT Cociente euclidiano de dos números enteros
IREMAINDER Residuo euclidiano de dos números enteros
ISPRIME? Determina si un número entero es primo
NEXTPRIME El siguiente número primo para un número entero dado
PA2B2 Número primo como norma cuadrada de un complejo
PREVPRIME El previo número primo para un número entero dado

Menú POLYNOMIAL

ABCUV Ecuación polinómica de Bézout (au+bv=c)
CHINREM Residuo chino para los polinomios
CYCLOTOMIC n polinomio ciclotómico
DIV2 División euclidiana de dos polinomios

EGDC Produce u,v, a partir de au+bv=mcd(a,b)
FACTOR Factoriza un número entero o un polinomio
FCOEF Genera raíces y multiplicidad dada una fracción
FROOTS Produce raíces y multiplicidad dada una fracción
GCD El máximo común divisor de 2 números o polinomios
HERMITE Polinomio de Hermite de orden n
HORNER Evaluación de Horner de un polinomio
LAGRANGE Interpolación del polinomio de Lagrange
LCM Mínimo común múltiplo de 2 números o polinomios
LEGENDRE Polinomio de Legendre de orden n
PARTFRAC descomposición de una fracción en fracciones parciales
PCOEF (no referencia en la función informativa del CAS)
PTAYL Produce Q(x-a) en Q(x-a) = P(x), Polinomio de Taylor
QUOT Cociente euclidiano de dos polinomios
RESULTANT Determinante de la matriz Sylvester de 2 polinomios
REMAINDER Residuo euclidiano de dos polinomios
STURM Secuencias de Sturm para un polinomio
STURMAB Signo en el límite inferior y número de raíces entre límites

Menú MODULO

ADDTMOD Agregar dos expresiones módulo actual módulo
DIVMOD Divide 2 polinomios módulo actual módulo
DIV2MOD División euclidiana de 2 polinomios con coeficientes modulares
EXPANDMOD Expande/simplifica polinomio con módulo actual módulo
FACTORMOD Factorizar un polinomio módulo actual módulo
GCDMOD MCD de 2 polinomios módulo actual módulo
INVMOD inverso entero módulo actual módulo
MOD (no referencia en la función informativa del CAS)
MODSTO Cambia el valor del modulo al valor especificado
MULTMOD Multiplicación de dos polinomios módulo actual módulo
POWMOD Eleva polinomio a una potencia módulo actual módulo
SUBTMOD Substracción de 2 polinomios módulo actual módulo

Aplicaciones del menú ARITHMETIC

En esta sección se presentan los conceptos necesarios para la aplicación de las funciones del menú ARITHMETIC. Las definiciones con respecto a los temas de polinomios, de fracciones polinómicas y de la aritmética modular se presentan posteriormente. Los ejemplos mostrados abajo se presentan independientemente del ajuste de la calculadora (ALG o RPN)

Aritmética modular

Considere un sistema de cuenta de números entero que complete un ciclo periódicamente y comienza otra vez, por ejemplo las horas del reloj. Tal sistema de cuenta se llama un *anillo*. Porque el número de los números enteros usados en un anillo es finito, la aritmética en este anillo se llama *aritmética finita*. Supóngase que el sistema números enteros finitos consiste de los números *0, 1, 2, 3, …, n-1, n*. Podemos también referirnos a la aritmética de este sistema de cuenta como *aritmética modular de módulo n*. En el caso de las horas de un reloj, el módulo es 12. (Si se trabaja con aritmética modular usando las horas del reloj, sin embargo, tendríamos que utilizar los números enteros 0, 1, 2, 3, …, 10, 11, en vez de 1, 2, 3,…,11, 12).

Operaciones en aritmética modular

Adición en la *aritmética modular del módulo n,* el cuál es un número entero positivo, que sigue las reglas que si *j* y *k* son dos números enteros no negativos, ambos menores que *n*, si $j+k \geq n$, entonces $j+k$ se define como $j+k-n$. Por ejemplo, en el caso del reloj, es decir, para n = 12, 6+9 "=" 3. Para distinguir esta ' igualdad ' de igualdades aritméticas infinitas, se usa el símbolo ≡ en lugar del igual, y la relación entre los números se refiere como una *congruencia* más bien que una igualdad. Así, para el ejemplo anterior escribimos *6+9 ≡ 3 (mod 12),* e interpretamos esta expresión como "*seises más nueve es congruentes a tres, módulo doce*." Si los números representan las horas desde la medianoche, por ejemplo, la congruencia 6+9 ≡ 3 (mod 12), puede ser interpretado como diciendo que "seis horas más de las nueve después de la medianoche serán tres horas más del mediodía." Otras sumas que se pueden definir en aritmética del módulo 12 son: 2+5 ≡ 7 (mod 12); 2+10 ≡ 0 (mod 12); 7+5 ≡ 0 (mod 12); etcétera.

La regla para la *substracción* será tal que si $j - k < 0$, entonces j-k se define como j-k+n. Por lo tanto, $8\text{-}10 \equiv 2 \pmod{12}$, se interpreta como "*ocho menos diez es congruentes a dos, módulo doce.*" Otros ejemplos de la substracción en aritmética del módulo 12 serían 10-5 ≡ 5 (mod 12); 6-9 ≡ 9 (mod 12); 5 – 8 ≡ 9 (mod 12); 5 –10 ≡ 7 (mod 12); etcétera.

La multiplicación sigue la regla que *si* $j \cdot k > n$, de modo que $j \cdot k = m \cdot n + r$, donde m y r son enteros no negativos, ambos menos que n, entonces $j \cdot k \equiv r$ (mod n). El resultado de multiplicar j por k en aritmética modular de módulo es, esencialmente, el residuo entero de $j \cdot k/n$ en aritmética infinita, si $j \cdot k>n$. Por ejemplo, en aritmética del módulo 12 tenemos 7·3 = 21 = 12 + 9, (o, 7·3/12 = 21/12 = 1 + 9/12, es decir, el residuo entero de 21/12 es 9). Podemos ahora escribir 7·3 ≡ 9 (mod 12), e interpretar este resultado como "*siete por tres es congruentes a nueve, módulo doce.*"

La operación de la división se puede definir en términos de la multiplicación como sigue, $r/k \equiv j$ (mod n), si, $j \cdot k \equiv r$ (mod n). Esto significa que r debe ser el residuo de $j \cdot k/n$. Por ejemplo, 9/7 ≡ 3 (mod 12), porque 7·3 ≡ 9 (mod 12). Algunas divisiones no se permiten en aritmética modular. Por ejemplo, en aritmética del módulo 12 usted no puede definir 5/6 (mod 12) porque la tabla de la multiplicación de 6 no muestra el resultado 5 en aritmética del módulo 12. Esta tabla de la multiplicación se demuestra abajo:

6*0 (mod 12)	0	6*6 (mod 12)	0
6*1 (mod 12)	6	6*7 (mod 12)	6
6*2 (mod 12)	0	6*8 (mod 12)	0
6*3 (mod 12)	6	6*9 (mod 12)	6
6*4 (mod 12)	0	6*10 (mod 12)	0
6*5 (mod 12)	6	6*11 (mod 12)	6

Definición formal de un anillo aritmético finito

La expresión $a \equiv b \pmod{n}$ se interpreta como "<u>*a es congruente a b, modulo n*</u>," y es verdadero si $(b\text{-}a)$ es un múltiplo de n. Con esta definición las reglas de la aritmética se simplifican a las siguientes:

Si $a \equiv b \pmod{n}$ y $c \equiv d \pmod{n}$, entonces

$$a+c \equiv b+d \ (mod\ n),$$
$$a\text{-}c \equiv b - d \ (mod\ n),$$
$$a \times c \equiv b \times d \ (mod\ n).$$

Para la división, seguir las reglas presentadas anteriormente. Por ejemplo, 17 ≡ 5 (mod 6), y 21 ≡ 3 (mod 6). Usando estas reglas, podemos escribir:

17 + 21 ≡ 5 + 3 (mod 6) => 38 ≡ 8 (mod 6) => 38 ≡ 2 (mod 6)
17 – 21 ≡ 5 - 3 (mod 6) => -4 ≡ 2 (mod 6)
17 × 21 ≡ 5 × 3 (mod 6) => 357 ≡ 15 (mod 6) => 357 ≡ 3 (mod 6)

Notar eso, siempre que un resultado en el lado derecho del símbolo de la "congruencia" produce un resultado que sea mayor que el modulo (en este caso, *n* = 6), usted puede restar un múltiplo del modulo de ese resultado y simplificarlo siempre a un número menor que el modulo. Así, el resultado en el primer caso *8 (mod 6)* se simplifica a *2 (mod 6*), y el resultado del tercer caso, *15 (mod 6)* se simplifica a *3 (mod 6).* ¿Confusión? Bien, no si usted permite que la calculadora ejecute esas operaciones. De manera que, léase la sección siguiente para entender cómo los anillos aritméticos finitos se operan en su calculadora.

Anillos aritméticos finitos en la calculadora

Hasta ahora hemos definido nuestra operación aritmética finita de modo que los resultados sean siempre positivos. El sistema aritmético modular en la calculadora se fija de modo que el anillo del módulo n incluya los números *-n/2+1, …,-1, 0, 1,…,n/2-1, n/2*, si n es par, y *–(n-1)/2, -(n-3)/2,…,-1,0,1,…,(n-3)/2, (n-1)/2*, si n es impar. Por ejemplo, para n = 8 (par), el anillo aritmético finito en la calculadora incluye los números: (-3,-2,-1,0,1,3,4), mientras que para n = 7 (impar), el anillo aritmético finito de la calculadora correspondiente incluye (-3,-2,-1,0,1,2,3).

Aritmética modular en la calculadora

Para activar el menú aritmético modular en la calculadora seleccione el sub-menú MODULO dentro del menú ARITHMETIC (← ARITH). El menú disponible incluye las funciones: ADDTMOD, DIVMOD, DIV2MOD, EXPANDMOD, FACTORMOD, GCDMOD, INVMOD, MOD, MODSTO, MULTMOD, POWMOD, y SUBTMOD. Breve descripciones de estas funciones fueron proveídas en una sección anterior. Presentamos a continuación algunas aplicaciones de estas funciones.

Fijando el módulo (o MODULO)

La calculadora contiene una variable llamada MODULO que se ubica en el directorio {HOME CASDIR} y que almacenará la magnitud del módulo que se utilizará en aritmética modular.

El valore pre-determinado de la variable MODULO es 13. Para cambiar el valor de MODULO, usted puede almacenar el nuevo valor directamente en la variable MODULO en el sub-directorio {HOME CASDIR}. Alternativamente, usted puede almacenar un nuevo MODULO utilizando la función MODSTO.

Operaciones aritméticas modulares con números

Para sumar, restar, multiplicar, dividirse, y elevar a una potencia en aritmética modular usted utilizará las funciones ADDTMOD, SUBTMOD, MULTMOD, DIV2MOD y DIVMOD (para la división), y POWMOD. En modo de RPN usted necesita incorporar los dos números para funcionar sobre, separado por [ENTER] o un espacio [SPC], y entonces presionar la función aritmética modular correspondiente. Por ejemplo, con un módulo de 12, ejecute las operaciones siguientes:

Ejemplos de ADDTMOD

$6+5 \equiv -1$ (mod 12)	$6+6 \equiv 0$ (mod 12)	$6+7 \equiv 1$ (mod 12)
$11+5 \equiv 4$ (mod 12)	$8+10 \equiv -6$ (mod 12)	

Ejemplos de SUBTMOD

$5 - 7 \equiv -2$ (mod 12)	$8 – 4 \equiv 4$ (mod 12)	$5 –10 \equiv -5$ (mod 12)
$11 – 8 \equiv 3$ (mod 12)	$8 - 12 \equiv -4$ (mod 12)	

Ejemplos de MULTMOD

$6\cdot8 \equiv 0$ (mod 12)	$9\cdot8 \equiv 0$ (mod 12)	$3\cdot2 \equiv 6$ (mod 12)
$5\cdot6 \equiv 6$ (mod 12)	$11\cdot3 \equiv -3$ (mod 12)	

Ejemplos de DIVMOD

12/3 ≡ 4 (mod 12)   12/8 (mod 12) no existe
25/5 ≡ 5 (mod 12)   64/13 ≡ 4 (mod 12)
66/6 ≡ -1 (mod 12)

Ejemplos de DIV2MOD

2/3 (mod 12) no existe
26/12 (mod 12) no existe
125/17 (mod 12) ≡ 1 con residuo = 0
68/7 ≡ -4 (mod 12) con residuo = 0
7/5 ≡ -1 (mod 12) con residuo = 0

> **Nota**: DIVMOD proporciona el cociente de la división modular j/k (mod n), mientras que DIMV2MOD proporciona no solamente el cociente sino también el residuo de la división modular j/k (mod n).

Ejemplos de POWMOD

$2^3 \equiv -4$ (mod 12)	$3^5 \equiv 3$ (mod 12)	$5^{10} \equiv 1$ (mod 12)
$11^8 \equiv 1$ (mod 12)	$6^2 \equiv 0$ (mod 12)	$9^9 \equiv -3$ (mod 12)

En los ejemplos de las operaciones aritméticas modulares demostradas anteriormente, hemos utilizado los números que no necesariamente pertenecer al anillo, es decir, por ejemplo los números 66, 125, 17, etc. La calculadora convertirá esos números a los números del anillo antes de operar en ellos. Usted puede también convertir cualquier número en un número del anillo usando la función EXPANDMOD. Por ejemplo,

EXPANDMOD(125) ≡ 5 (mod 12)
EXPANDMOD(17) ≡ 5 (mod 12)
EXPANDMOD(6) ≡ 6 (mod 12)

El inverso modular de un número

Suponga que el número *k* pertenece a un anillo aritmético finito de módulo *n*, entonces la inversa modular de *k*, es decir, *1/k (*mod *n),* es un número *j*, tal que $j \cdot k \equiv 1$ (mod *n*). El inverso modular de un número se puede obtener al usar la función INVMOD en el sub-menú MODULO del menú ARITHMETIC. Por ejemplo, en aritmética del módulo 12:

1/6 (mod 12) no existe. 1/5 ≡ 5 (mod 12)
1/7 ≡ -5 (mod 12) 1/3 (mod 12) no existe
1/11 ≡ -1 (mod 12)

El operador MOD

Utilice el operador MOD para obtener el número del anillo de un módulo dado que corresponde a un número entero. En el papel se escribe esta operación como *m* mod *n* = *p*, y se interpreta como "*m* modulo *n* es igual a *p*". Por ejemplo, para calcular 15 mod 8, escriba:

- modo ALG: 1 5 MOD 8 ENTER
- modo RPN: 1 5 ENTER 8 ENTER MOD

El resultado es 7, esto es, 15 mod 8 = 7. Intentar los ejercicios siguientes:

18 mod 11 = 7 23 mod 2 =1 40 mod 13 = 1
23 mod 17 = 6 34 mod 6 = 4

Un uso práctico de la función MOD para la programación es para determinar cuando un número entero es impar, dado que *n* mod 2 = 0, si *n* es par, y *n* mod 2 = 1, si *n* es impar. Puede también ser utilizado para determinar cuando un número entero m es un múltiplo de otro número entero *n*, porque si ése es el caso *m* mod *n* = 0.

Nota: Referirse a la función informativa de la calculadora para la descripción y los ejemplos en la aritmética modular. Muchas de estas funciones son aplicables a los polinomios. Para la información sobre aritmética modular con polinomios refiérase a un libro sobre teoría de los números.

Polinomios

Los polinomios son expresiones algebraicas consistente de uno o más términos que contienen potencias decrecientes de una variable o función. Por ejemplo, 'X^3+2*X^2-3*X+2' es un polinomio del tercer orden (cúbico) de la variable X, mientras que 'SIN(X)^2-2' es un polinomio de segundo orden (cuadrático) de la función SIN(X). Un listado de funciones de polinomios en el menú ARITHMETIC fue presentada anteriormente. Algunas definiciones generales sobre polinomios se proporcionan a continuación. En estas definiciones *A(X), B(X), C(X), P(X), Q(X), U(X), V(X),* etc., son polinomios.

- Fracción polinómica: una fracción en la cual numerador y denominador son polinomios, digamos, C(X) = A(X)/B(X)
- Raíces, o ceros, de un polinomio: valores de X para los cuales P(X) = 0
- Polos de una fracción: raíces del denominador
- Multiplicidad de raíces o de polos: el número de veces que una raíz existe, por ejemplo, $P(X) = (X+1)^2(X-3)$ tiene raíces {-1, 3} con multiplicidades {2,1}
- Polinomio ciclotómico ($P_n(X)$): un polinomio de orden EULER(*n*) cuyas raíces son las *n* raíces primitivas de la unidad, por ejemplo, $P_2(X) = X+1$, $P_4(X) = X^2+1$
- Ecuación polinómica de Bézout: A(X) U(X) + B(X)V(X) = C(X)

Ejemplos específicos de aplicaciones polinómicas se presentan a continuación.

Aritmética modular con polinomios

De la misma manera que definimos un anillo de aritmética finita para números en la sección anterior, podemos definir un anillo de aritmética finita para los polinomios con un polinomio dado como módulo. Por ejemplo, podemos escribir cierto polinomio *P(X)* como $P(X) = X \pmod{X^2}$, u otro polinomio como $Q(X) = X + 1 \pmod{X-2}$.

Un polinomio, *P(X)* pertenece a un anillo aritmético finito de módulo polinómico *M(X),* si existe un tercer polinomio *Q(X),* tales que *(P(X) – Q(X)) es un múltiplo de M(X).* Entonces escribiríamos: $P(X) \equiv Q(X) \pmod{M(X)}$. Se interpreta la última expresión como "*P(X) es congruente a Q(X), módulo M(X)*".

La función CHINREM

CHINREM significa CHINese REMainder (residuo chino). La operación programada en este comando soluciona un sistema de dos congruencias usar el teorema chino del residuo . Este comando se puede utilizar con polinomios, así como con números enteros (la función ICHINREM). La entrada consiste en dos vectores *[expresión_1, modulo_1]* y *[expresión_2, modulo_2]*. La salida es el vector *[expression_3, modulo_3]*, en el cual *modulo_3* se relaciona con el producto *(modulo_1)·(modulo_2)*. Ejemplo: CHINREM(['X+1', 'X^2-1'],['X+1','X^2']) = ['X+1',-(X^4-X^2)]

Enunciado del teorema chino del residuo para los números enteros

Si $m_1, m_2, \ldots, m_r$ son números naturales de manera que cada par constituye números primos relativos, y $a_1, a_2, \ldots, a_r$ son números enteros, entonces existe un número entero *x* que satisface simultáneamente las congruencias: $x \equiv a_1 \pmod{m_1}$, $x \equiv a_2 \pmod{m_2}$, …, $x \equiv a_r \pmod{m_r}$. Además, si $x = a$ es cualquier solución entonces el resto de las soluciones son congruentes a un modulo igual al producto $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots m_r$.

La función EGCD

EGCD significa, en inglés, Extended Greatest Common Divisor (Máximo Común Divisor Extendido). Dados dos polinomios, A(X) y B(X), la función EGCD produce los polinomios C(X), U(X), y V(X), de forma que C(X) = U(X)*A(X) + V(X)*B(X). Por ejemplo, para A(X) = X^2+1, B(X) = X^2-1, EGCD(A(X),B(X)) = {2, 1, -1}. Esto es, 2 = 1*(X^2+1')-1*(X^2-1). Así mismo, EGCD('X^3-2*X+5','X') = { 5, '-(X^2-2)', 1}, es decir, 5 = – (X^2-2)*X + 1*(X^3-2*X+5).

La función GCD

La función GCD (en inglés, Greatest Common Denominator, o Máximo Común Denominador) puede ser utilizada para obtener el máximo denominador común de dos polinomios o de dos listas de polinomios de la misma longitud. Los dos polinomios o listas de polinomios serán puestos en los niveles 2 y 1 del "stack" antes de usar GCD. Los resultados serán un polinomio o una lista que representa el máximo común denominador de los dos polinomios o de cada lista de polinomios. Ejemplos, en modo RPN, se presentan a continuación (calculadora fijada en modo Exacto):

'X^3-1' ENTER 'X^2-1' ENTER GCD produce: 'X-1'

{'X^2+2*X+1','X^3+X^2'} ENTER {'X^3+1','X^2+1'} ENTER GCD produce {'X+1' 1}

La función HERMITE

La función HERMITE [HERMI] usa como argumento un número entero, k, y produce el polinomio de Hermite de grado k. Un polinomio de Hermite, $He_k(x)$ se define como

$$He_0 = 1, \quad He_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2}), \quad n = 1,2,...$$

Una definición alterna de los polinomios de Hermite es

$$H_0{*} = 1, \quad H_n{*}(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), \quad n = 1,2,...$$

en las cuales d^n/dx^n = n derivada con respecto a x. Ésta es la definición usada en la calculadora.

Ejemplos: Los polinomios de Hermite de órdenes 3 y 5 se calculan como:

HERMITE(3) = '8*X^3-12*X' ,

Y HERMITE(5) = '32*x^5-160*X^3+120*X'.

La función HORNER

La función HORNER produce la división de Horner, o división sintética, de un polinomio P(X) por el factor (X-*a*). La entrada a la función es el polinomio P(X) y el número *a*. La función vuelve el polinomio del cociente Q(X) que resulta al dividir P(X) por (X-*a*), el valor de *a*, y el valor de P(*a*), en esa orden. En otras palabras, P(X) = Q(X)(X-a)+P(a). Por ejemplo, HORNER('X^3+2*X^2-3*X+1',2) = {'X^2+4*X+5', 2, 11}. Podríamos, por lo tanto, escribir $X^3+2X^2-3X+1 = (X^2+4X+5)(X-2)+11$. Un segundo ejemplo: HORNER('X^6-1',-5)= {'X^5-5*X^4+25*X^3-125*X^2+625*X-3125',-5, 15624} esto es, $X^6-1 = (X^5-5*X^4+25X^3-125X^2+625X-3125)(X+5)+15624$.

La variable VX

Existe, en el directorio {HOME CASDIR} de la calculadora, una variable denominada VX cuyo valor preseleccionado es 'X'. Este es el nombre de la variable independiente preferida para aplicaciones en el álgebra y en el cálculo. Evítese utilizar la variable VX en programas y ecuaciones, de manera que no se confunda con la variable VX del CAS (Computer Algebraic System, o Sistema Algebraico Computacional). Para obtener información adicional sobre las variables del CAS véase el Apéndice C en la Guía del Usuario de la calculadora.

La función LAGRANGE

La función LAGRANGE requiere como argumento una matriz que tiene dos filas y *n* columnas. La matriz almacena datos de la forma [[x_1,x_2, …, x_n] [y_1, y_2, …, y_n]]. La aplicación de la función LAGRANGE produce el polinomio

$$p_{n-1}(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\prod_{k=1,k\neq j}^{n}(x-x_k)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{n}(x_j-x_k)}\cdot y_j.$$

Por ejemplo, para n = 2, escribiremos:

$$p_1(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\cdot y_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot y_2=\frac{(y_1-y_2)\cdot x+(y_2\cdot x_1-y_1\cdot x_2)}{x_1-x_2}$$

Comprobar este resultado con su calculadora:
LAGRANGE([[x1,x2],[y1,y2]]) = '((y1-y2)*X+(y2*x1-y1*x2))/(x1-x2)'.

Otros ejemplos: LAGRANGE([[1, 2, 3][2, 8, 15]]) = '(X^2+9*X-6)/2'
LAGRANGE([[0.5,1.5,2.5,3.5,4.5][12.2,13.5,19.2,27.3,32.5]]) =
'-(.1375*X^4+ -.7666666666667*X^3+ - .74375*X^2 =
1.991666666667*X-12.92265625)'.

Nota: Las matrices se introducen en el Capítulo 10.

La función LCM

La función LCM (en inglés, Least Common Multiple, ó Mínimo Común Múltiplo) obtiene el mínimo común múltiplo de dos polinomios o de listas de polinomios de la misma longitud. Ejemplos:

LCM('2*X^2+4*X+2' ,'X^2-1') = '(2*X^2+4*X+2)*(X-1)'.
LCM('X^3-1','X^2+2*X') = '(X^3-1)*(X^2+2*X)'

La función LEGENDRE

Un polinomio de Legendre de la orden n es una función polinómica que soluciona la ecuación diferencial

$$(1-x^2)\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-2\cdot x\cdot\frac{dy}{dx}+n\cdot(n+1)\cdot y=0$$

Para obtener el polinomio de Legendre de orden n, por ejemplo,

LEGENDRE(3) = '(5*X^3-3*X)/2'
LEGENDRE(5) = '(63*X ^5-70*X^3+15*X)/8'

La función PCOEF

Dado un vector que contiene las raíces de un polinomio, la función PCOEF genera un vector que contiene los coeficientes del polinomio correspondiente. Los coeficientes corresponden al orden decreciente de las potencias de la variable independiente. Por ejemplo: PCOEF([-2,–1,0,1,1,2]) = [1. –1. –5. 5. 4. –4. 0.], representa el polinomio X^6-X^5-5X^4+5X^3+4X^2-4X.

La función PROOT

Dado un vector que contiene lo coeficientes de un polinomio en orden decreciente de las potencias, la función PROOT provee las raíces del polinomio. Por ejemplo, para el polinomio X^2+5X-6 =0, PROOT([1, –5, 6]) = [2. 3.].

La función PTAYL

Dado un polinomio P(X) y un número *a*, la función PTAYL se utiliza obtener una expresión Q(X-*a*) = P(X), esto es, para expandir un polinomio en potencias de (X- *a*). Esto también se conoce como polinomio de Taylor, de cuyo nombre sigue el de la función, Polinomio y TAYLor.

Por ejemplo, PTAYL('X^3-2*X+2',2) = 'X^3+6*X^2+10*X+6'.

En realidad, usted debe interpretar este resultado como:
'(X-2) ^3+6*(X-2) ^2+10*(X-2) +6'.

Verifiquemos esta aserción al sustituir: 'X = x – 2'. Recuperamos el polinomio original, pero en términos de x minúscula más bien que de x mayúscula.

Las funciones QUOTIENT y REMAINDER

Las funciones QUOTIENT (cociente) y REMAINDER (residuo) proveen, respectivamente, el cociente Q(X) y el residuo R(X), que resulta de la división de dos polinomios, $P_1(X)$ y $P_2(X)$. Es decir, estas funciones proveen los valores de Q(X) y R(X) en la expresión $P_1(X)/P_2(X) = Q(X) + R(X)/P_2(X)$. Por ejemplo,

QUOTIENT('X^3-2*X+2', 'X-1') = 'X^2+X-1'
REMAINDER('X^3-2*X+2', 'X-1') = 1.

Para este caso, por lo tanto: $(X^3-2X+2)/(X-1) = X^2+X-1 + 1/(X-1)$.

Nota: Este último resultado se puede obtener usando la función PARTFRAC:
PARTFRAC('(X^3-2*X+2)/(X-1)') = 'X^2+X-1 + 1/(X-1)'.

La función EPSX0 la variable EPS del CAS

La variable ε (epsilon) se utiliza típicamente en libros de textos matemáticos para representar un número muy pequeño. El CAS de la calculadora crea una variable EPS, con el valor prefijado 0.0000000001 = 10^{-10}, cuando usted utiliza la función EPSX0. Usted puede cambiar este valor, una vez que esté creado, si usted prefiere un valor diferente para EPS. La función EPSX0, cuando se aplica a un polinomio, substituirá todos los coeficientes que valor absoluto sea menos que EPS con un cero. La función EPSX0 no está disponible en el menú ARITHMETIC, sino que se accede con el catálogo de funciones (↱ CAT). Ejemplo:

EPSX0('X^3-1.2E-12*X^2+1.2E-6*X+6.2E-11)=
'X^3-0*X^2+.0000012*X+0'.

Con EVAL: 'X^3+.0000012*X'.

La función PEVAL

Las funciones PEVAL (en inglés, Polynomial EVALuation) puede ser utilizado para evaluar un polinomio $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$, dado un arreglo de coeficientes [a_n, a_{n-1}, … a_2, a_1, a_0] y un valor de x_0. El resultado es la evaluación $p(x_0)$. La función PEVAL no está disponible en el menú ARITHMETIC, debe activarse desde el catálogo de funciones (↱ CAT). Ejemplo:

PEVAL([1,5,6,1],5) = 281.

La función TCHEBYCHEFF

La función TCHEBYCHEFF(*n*) genera el polinomio de Tchebycheff (o Chebyshev) de primera clase, orden n, definido como $T_n(X) = \cos(n \cdot \arccos(X))$. Si el número entero n es negativo (n < 0), la función TCHEBYCHEFF(*n*) genera el polinomio de Tchebycheff de segunda clase, orden n, definido como $T_n(X) = \sin(n \cdot \arccos(X))/\sin(\arccos(X))$. Ejemplos:

TCHEBYCHEFF(3) = 4*X^3-3*X
TCHEBYCHEFF(-3) = 4*X^2-1

Fracciones

Las fracciones pueden expandirse y factorizarse utilizando las funciones EXPAND y FACTOR, localizadas en el menú ALG (↱ ALG). Por ejemplo:

EXPAND('(1+X)^3/((X-1)(X+3))') = '(X^3+3*X^2+3*X+1)/(X^2+2*X-3)'
EXPAND('(X^2*(X+Y)/(2*X-X^2)^2') = '(X+Y)/(X^2-4*X+4)'
EXPAND('X*(X+Y)/(X^2-1)') = '(X^2+Y*X)/(X^2-1)'
EXPAND('4+2*(X-1)+3/((X-2)*(X+3))-5/X^2') =
'(2*X^5+4*X^4-10*X^3-14*X^2-5*X)/(X^4+X^3-6*X^2)'

FACTOR('(3*X^3-2*X^2)/(X^2-5*X+6)') = 'X^2*(3*X-2)/((X-2)*(X-3))'
FACTOR('(X^3-9*X)/(X^2-5*X+6)') = 'X*(X+3)/(X-2)'
FACTOR('(X^2-1)/(X^3*Y-Y)') = '(X+1)/((X^2+X+1)*Y)'

La función SIMP2

Las funciones SIMP2 y PROPFRAC se utilizan para simplificar una fracción y producir una fracción apropiada, respectivamente. La función SIMP2 utiliza como argumentos dos números o dos polinomios, los cuales representan el numerador y el denominador de una fracción racional, y produce, como resultados, el numerador y denominador simplificados. Por ejemplo:

SIMP2('X^3-1','X^2-4*X+3') = { 'X^2+X+1','X-3'}.

La función PROPFRAC

El función PROPFRAC convierte una función racional en una función "propia", es decir, una parte entera sumada a una parte fraccional, si tal descomposición es posible. Por ejemplo:

PROPFRAC('5/4') = '1+1/4'

PROPFRAC('(x^2+1)/x^2') = '1+1/x^2'

La función PARTFRAC

La función PARTFRAC descompone una fracción racional en fracciones parciales que, al sumarse, producen la fracción original. Por ejemplo:

PARTFRAC('(2*X^6-14*X^5+29*X^4-37*X^3+41*X^2-16*X+5)/(X^5-7*X^4+11*X^3-7*X^2+10*X)') =

'2*X+(1/2/(X-2)+5/(X-5)+1/2/X+X/(X^2+1))'

Esta técnica es útil en calcular integrales (véase el capítulo sobre cálculo) de fracciones racionales.

Si usted tiene el modo complejo activo, el resultado será:

'2*X+(1/2/(X+i)+1/2/(X-2)+5/(X-5)+1/2/X+1/2/(X-i))'

La función FCOEF

La función FCOEF se utiliza par obtener una fracción racional dados las raíces y los polos de la misma.

Nota: Si la expresión F(X) = N(X)/D(X) representa una función racional, las raíces de la fracción se encuentran al resolver la ecuación N(X) = 0, mientras que los polos de la fracción se encuentran al resolver la ecuación D(X) = 0.

El argumento de esta función es un vector que incluye las raíces de la fracción seguidas de su multiplicidad (es decir, cuantas veces la raíz se repite), y los polos de la fracción, también seguidos de su multiplicidad, esta última representada como un número negativo. Por ejemplo, si queremos formar la fracción que tiene las raíces 2 con multiplicidad 1, 0 con multiplicidad 3, y -5 con multiplicidad 2, y los polos 1 con multiplicidad 2 y –3 con multiplicidad 5, utilícese:

FCOEF([2 1 0 3 –5 2 1 -2 -3 -5]) = '(X--5)^2*X^3*(X-2)/(X--3)^5*(X-1)^2'

Si se presiona la tecla EVAL se obtiene:
'(X^6+8*X^5+5*X^4-50*X^3)/(X^7+13*X^6+61*X^5+105*X^4-45*X^3-297*X^2-81*X+243)'

La función FROOTS

La función FROOTS se utiliza para obtener las raíces y los polos de una fracción. Por ejemplo, al aplicar la función FROOTS a la fracción racional obtenida en el ejemplo anterior, se obtiene el resultado: [1 –2. –3 –5. 0 3. 2 1. –5 2.]. Este vector muestra primero los polos seguidos de su multiplicidad (representada por un número negativo), y, a continuación, las raíces seguidas por su multiplicidad (representada por un número positivo). En este caso, los polos son (1, -3) con multiplicidades (2,5)\, respectivamente, y las raíces son (0, 2, -5) con multiplicidades (3, 1, 2), respectivamente.
Considérese también este segundo ejemplo: FROOTS('(X^2-5*X+6)/(X^5-X^2)') = [0 –2. 1 –1. 3 1. 2 1.]. En este caso, los polos son 0 (2), 1(1), y las raíces son 3(1), 2(1). Si se hubiese seleccionado la opción Complex para el CAS, el resultado de este ejemplo hubiese sido:
[0 –2. 1 –1. '-[1+i*√3]/2' –1. '-((1-i*√3)/2' –1.]

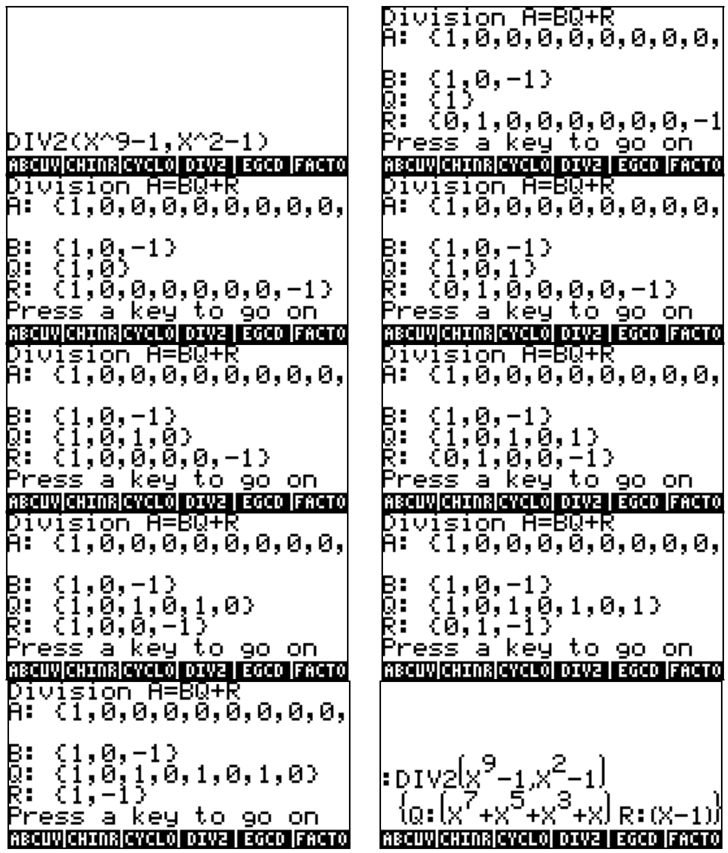
Operaciones con polinomios y fracciones, paso a paso

Cuando se selecciona la opción Step/step en el CAS, la calculadora mostrará las simplificaciones de fracciones o la operaciones con polinomios detalladas paso a paso. Esta selección es útil, por ejemplo, para ver los diferentes pasos de una división sintética. La división

$$\frac{X^3 - 5X^2 + 3X - 2}{X - 2}$$

se muestra en detalle en el Apéndice C la Guía del Usuario de la calculadora. El siguiente ejemplo muestra otra división sintética, paso a paso. Presiónese ENTER para ejecutar los pasos consecutivos.

$$\frac{X^9 - 1}{X^2 - 1}$$



El menú CONVERT y las operaciones algebraicas

El menú CONVERT se activa al utilizar ← CONVERT (tecla 6). Este menú resume todos los menús de la conversión en la calculadora. La lista de estos menús se demuestra a continuación:

Las funciones disponibles en cada uno de los sub-menus se demuestran después.

Menú de conversión de unidades (UNITS - Opción 1)

Este menú es igual que el menú UNITS obtenido usando ⮣ UNITS . Los usos de este menú se discuten detalladamente en el capítulo 3.

Menú de conversión de bases (BASE - Opción 2)

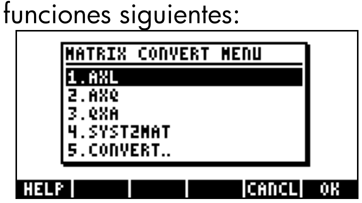
Este menú es igual que el menú BASE obtenido usando ⮣ BASE . Los usos de este menú se discuten detalladamente en el capítulo 19.

Menú de conversión trigonométrica (TRIGONOMETRIC - Opción 3)

Este menú es igual que el menú TRIG obtenido usando ⮣ TRIG . Los usos de este menú se discuten detalladamente en este capítulos.

Menú de conversión matricial (MATRICES - Opción 5)

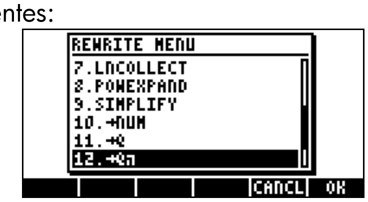
Este menú contiene las funciones siguientes:

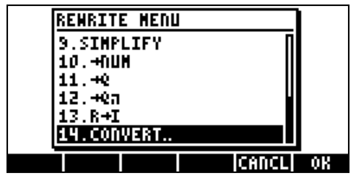


Estas funciones se discuten detalladamente en el Capítulo 10.

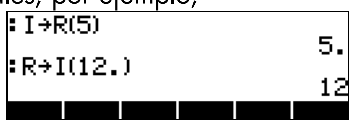
Menú de re-escritura de expresiones (REWRITE - Opción 4)

Este menú contiene las funciones siguientes:

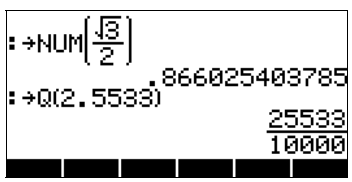


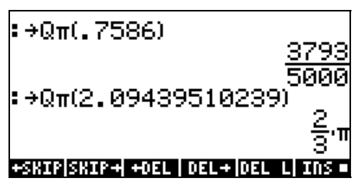


Las funciones I→R y R→I se utilizan para convertir un número entero (I) a número real (R), o viceversa. Los números enteros se muestran sin puntos decimales, mientras que los números reales que representan números enteros muestran puntos decimales, por ejemplo,



La función →NUM tiene el mismo efecto que la combinación de teclas →NUM (asociado a la tecla ENTER). La función →NUM convierte un resultado simbólico a su valor numérico. La función →Q convierte un valor numérico en una fracción. La función →Qπ convierte un valor numérico a una fracción de π, si una fracción de π puede ser encontrado para el número; si no, la función convierte el número a una fracción. Los ejemplos de estas tres funciones se muestran a continuación.

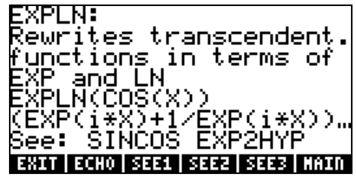




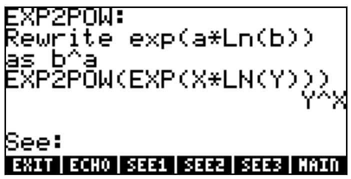
De las funciones en el menú REWRITE, las funciones DISTRIB, EXPLN, EXP2POW, FDISTRIB, LIN, LNCOLLECT, POWEREXPAND, y SIMPLIFY se aplican a las expresiones algebraicas. Muchas de estas funciones se presentan en este capítulo. Sin embargo, para completar la colección presentamos aquí las referencias de la función informativa para estas funciones.

DISTRIB

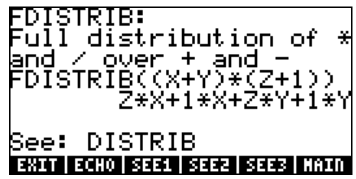
EXPLN



EXP2POW

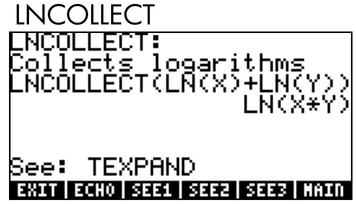


FDISTRIB



LIN

LNCOLLECT



POWEREXPAND

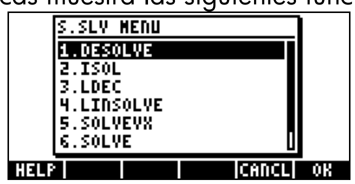
SIMPLIFY

Capítulo 6
Solución de ecuaciones únicas

En este capítulo se presentan funciones que la calculadora provee para solucionar las ecuaciones de la forma f(X) = 0. Asociados con la tecla 7 existen dos menús de funciones para la solución de ecuaciones, el Symbolic SOLVer (← S.SLV), o soluciones simbólicas, y el NUMerical SoLVer (→ NUM.SLV), o soluciones numéricas. A continuación se presentan algunas de las funciones disponibles en estos menús. Cambie el modo del CAS a complejo para estos ejercicios (véase el capítulo 2).

Solución simbólica de las ecuaciones algebraicas

En esta sección se utiliza el menú de soluciones simbólicas (Symbolic Solver). Actívese el menú utilizando las teclas ← S.SLV . Con la opción CHOOSE boxes activa en la señal de sistema número 117, el menú de soluciones simbólicas muestra las siguientes funciones:

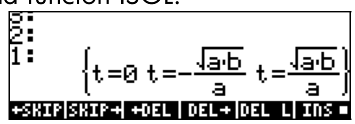


Las funciones DESOLVE y LDEC se utilizan para la solución de ecuaciones diferenciales, el tema de un capítulo diferente, y por lo tanto no serán presentadas aquí. De manera similar, la función LINSOLVE se relaciona con la solución de ecuaciones lineares múltiples, y será presentada en otro capítulo. Las funciones ISOL y SOLVE se utilizan para obtener la incógnita de una ecuación polinómica. La función SOLVEVX se utiliza para resolver una ecuación polinómica en la que la incógnita es la variable independiente del CAS VX (usualmente la 'X'). Finalmente, la función ZEROS provee los ceros o raíces de una ecuación polinómica. Información sobre todas las funciones en el menú de S.SLV, excepto ISOL, está disponibles a través de la función informativa del CAS (TOOL NXT HELP).

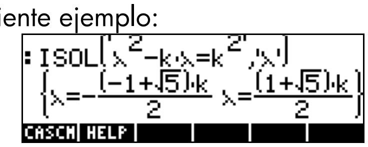
La función ISOL

La función ISOL(Ecuación, variable) produce la solución(es) de la *Ecuación* al despejar la *variable*. Por ejemplo, con la calculadora en modo ALG, para despejar *t* en la ecuación at^3-bt = 0 utilícese:

Cuando la calculador usa el modo RPN, la solución se obtiene escribiendo primero la ecuación en la pantalla (stack), seguida por la variable, antes de activarse la función ISOL. La figura de la izquierda muestra la pantalla RPN antes de aplicar la función ISOL, mientras que la figura de la derecha muestra la pantalla después de aplicar la función ISOL.

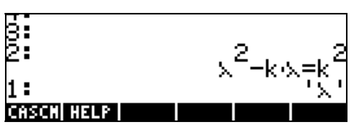
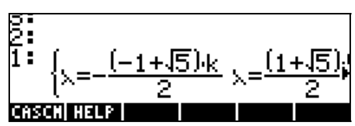



El primer argumento en la función ISOL puede ser una expresión (sin el signo igual), como en el ejemplo anterior, o una ecuación. Por ejemplo, en modo ALG, ejecútese el siguiente ejemplo:



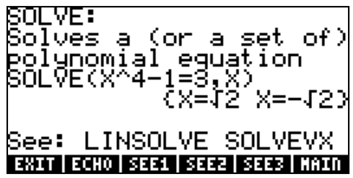
Nota: Para escribir el signo igual (=) en una ecuación, utilícense las teclas ⮣ = (asociada con la tecla +/-).

El mismo problema puede resolverse en modo RPN como se ilustra a continuación (las figuras siguientes muestran la pantalla RPN antes y después de aplicar la función ISOL):

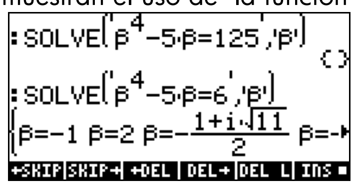



La función SOLVE

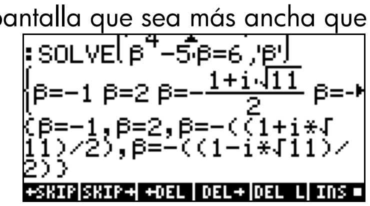
La función SOLVE tiene la misma sintaxis que la función ISOL, excepto que SOLVE puede utilizarse para resolver un sistema de ecuaciones polinómicas La función informativa de la calculadora (función HELP, que se activa utilizando TOOL NXT HELP) muestra la siguiente referencia para la función SOLVE, incluyendo la solución de la ecuación X^4 – 1 = 3:



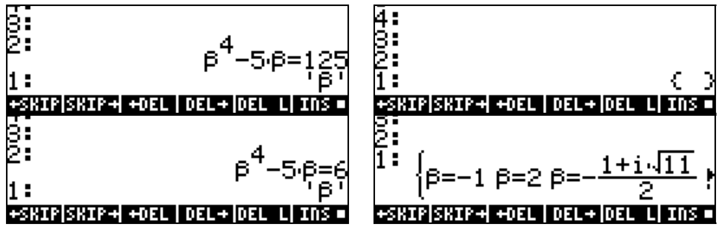
Los siguientes ejemplos muestran el uso de la función SOLVE en modo ALG:



La figura anterior muestra dos soluciones. En la primera, SOLVE(β^4-5β =125), no produce soluciones { }. En la segunda solución, SOLVE(β^4 - 5β = 6), produce cuatro soluciones, que se muestran en la línea inferior de la pantalla. La última solución en la línea no es visible porque el resultado ocupa más caracteres que el ancho de la pantalla. Sin embargo, uno puede ver todas las soluciones al activar el editor de línea utilizando la tecla direccional vertical ▼ (Esta operación puede utilizarse para acceder a cualquier línea de la pantalla que sea más ancha que la pantalla misma):



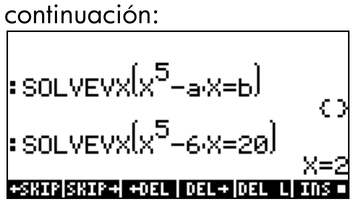
Las pantallas RPN correspondientes a los dos ejemplos anteriores, antes y después de aplicar la función SOLVE, se muestran a continuación:



Use la tecla ▽ en este modo para activar el editor de línea:

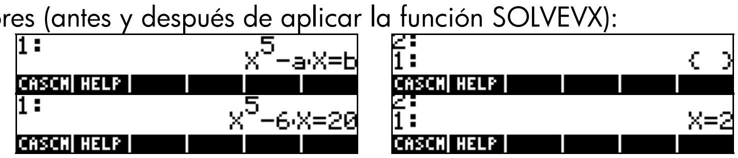
La función SOLVEVX

La función SOLVEVX se utiliza para resolver una ecuación cuando la incógnita es la variable CAS contenida en el registro VX. El valor predefinido de VX es el símbolo 'X'. Algunos ejemplos, en el modo ALG y con la variable VX = 'X', se muestran a continuación:

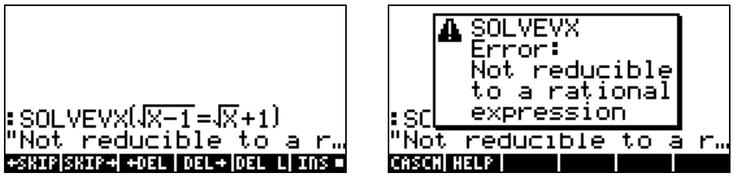


En el primer caso, SOLVEVX no pudo encontrar una solución. En el segundo caso, SOLVEVX encontró una solución única, X = 2.

Las siguientes figuras muestran la pantalla RPN en la solución de los ejemplos anteriores (antes y después de aplicar la función SOLVEVX):

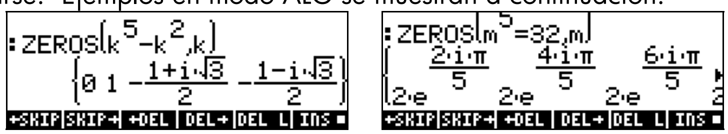


La ecuación usada como argumento para la función SOLVEVX debe ser reducible a una expresión racional. Por ejemplo, la ecuación siguiente no será procesada por SOLVEVX:

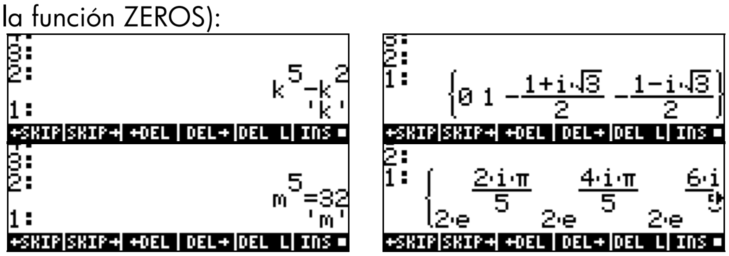


La función ZEROS

La función ZEROS se utiliza para encontrar las raíces (o ceros) de una ecuación polinómica, sin mostrar la multiplicidad de las mismas. La función ZEROS requiere como argumentos una ecuación o expresión y la variable a despejarse. Ejemplos en modo ALG se muestran a continuación:



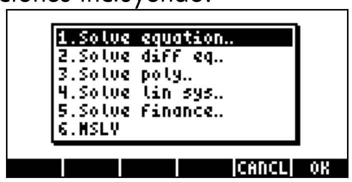
Para utilizar la función ZEROS en modo RPN, escríbase primero la expresión o ecuación polinómica, seguida de la variable a ser despejada. Después de esto, se deberá activar la función ZEROS. Las siguientes figuras muestran la pantalla RPN en la solución de los ejemplos anteriores (antes y después de aplicar la función ZEROS):



Las funciones de soluciones simbólicas (Symbolic Solver) presentadas anteriormente producen soluciones para ecuaciones racionales (principalmente, ecuaciones polinómicas). Si la ecuación a resolverse tiene solamente coeficientes numéricos, es posible obtener una solución numérica utilizando las funciones de soluciones numéricas (Numerical Solver) en la calculadora.

Menú de soluciones numéricas

La calculadora provee un ambiente para la solución numérica de ecuaciones algebraicas o trascendentes. Para activar este ambiente, actívese primero el menú de soluciones numéricas (NUM.SLV) utilizando ↱ NUM.SLV . Esta acción produce una lista de opciones incluyendo:



Ítem *2. Solve diff eq..* será discutido en un capítulo posterior sobre ecuaciones diferenciales Ítem *4. Solve lin sys..* será discutido en un capítulo posterior sobre matrices. Ítem *6. MSLV* (inglés, Multiple equation SoLVer, o solución de ecuaciones múltiples) será presentado en el capítulo siguiente. A continuación se presentan aplicaciones de las opciones *3. Solve poly..*, *5. Solve finance*, y *1. Solve equation..*, en ese orden. El Apéndice A, en la Guía del Usuario, contiene instrucciones para el uso de las formas interactivas con ejemplos basados en las soluciones numéricas de las ecuaciones. La opción *6. MSLV* (solución de ecuaciones múltiples, o Mutiple equation SoLVer) se presentará más adelante en este Capítulo.

Notas:
1. Cuando se resuelve una ecuación utilizando las soluciones numéricas en el menú NUM.SLV, la solución se mostrará en la pantalla después de terminarse la operación. Esta acción es útil si se requiere utilizar la solución numérica más reciente en otras operaciones de la calculadora.
2. Las aplicaciones de soluciones numéricas (NUM.SLV) usualmente crean una o más variables en la calculadora.

Ecuaciones polinómicas

Cuando se utiliza la opción *Solve poly…* en el ambiente *SOLVE* de la calculadora uno puede:

(1) Encontrar la(s) solución(es) de una ecuación polinómica;
(2) Obtener los coeficientes de un polinomio, dadas las raíces; y

(3) Obtener una expresión algebraica para un polinomio como función de la variable CAS, usualmente 'X'.

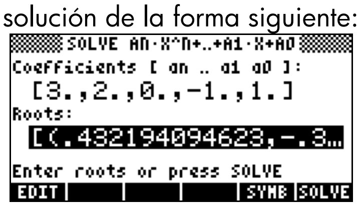
Solución(es) de una ecuación polinómica

Una ecuación polinómica es una ecuación de la forma: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$. El teorema fundamental de la álgebra indica que hay n soluciones en cualquier ecuación polinómica de orden n. Algunas de las soluciones podían ser números complejos, sin embargo. Por ejemplo, resuélvase la ecuación: $3s^4 + 2s^3 - s + 1 = 0$.

Los coeficientes de la ecuación deberán escribirse como el siguiente vector: [3,2,0,-1,1]. Para resolver esta ecuación polinómica, utilícese lo siguiente:

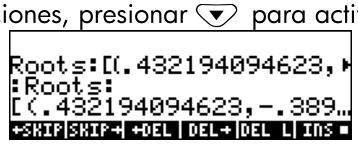
↱ NUM.SLV ▼ ▼ OK	Seleccionar *Solve poly…*
↰ [] 3 ↱ , 2 ↱ , 0	Vector de coeficientes
↱ , 1 +/- ↱ , 1 OK	
SOLVE	Resolver la ecuación

La pantalla mostrará la solución de la forma siguiente:



Presiónese ENTER para recobrar la pantalla normal. La pantalla mostrará los siguientes resultados en modo ALG o en modo RPN:

Para ver todas las soluciones, presionar ▼ para activar el editor de línea:



Todas las soluciones o raíces son números complejos para este caso:
(0.432,-0.389), (0.432,0.389), (-0.766, 0.632), (-0.766, -0.632).

Nota: Recuerde que los números complejos en la calculadora están representados como pares ordenados, con el primer número en el par siendo la parte real, y el segundo número, la parte imaginaria. Por ejemplo, el número (0.432,-0.389), un número complejo, será escrito normalmente como 0.432 - 0.389i, donde i es la unidad imaginaria, es decir, i^2 = -1.

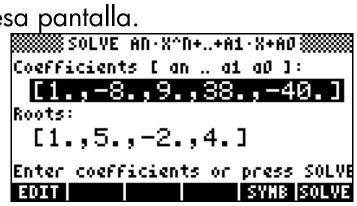
Nota: El teorema fundamental de la álgebra indica que hay n soluciones para cualquier ecuación polinómica de orden n. Existe otro teorema del álgebra que indica que si una de las soluciones a una ecuación polinómica con coeficientes reales es un número complejo, entonces el conjugado complejo de ese número es también una solución. Es decir, las soluciones complejas a una ecuación polinómica con coeficientes verdaderos se dan en pares. Eso significa que las ecuaciones polinómicas con coeficientes reales de orden impar tendrán por lo menos una solución real.

Generación de coeficientes de un polinomio dadas las raíces

Supóngase que se desean generar los coeficientes de un polinomio cuyas raíces son los números [1, 5, -2, 4]. Para utilizar la calculadora con este propósito, síganse las siguientes instrucciones:

↱ NUM.SLV ▼ ▼ OK	Seleccionar *Solve poly…*
▼ ↰ [] 1 ↱ , 5	Vector de raíces
↱ , 2 +/- ↱ , 4 OK	
SOLVE	Calcular coeficientes

Presiónese ENTER para recuperar la pantalla normal. Los coeficientes se mostrarán también en esa pantalla.



Presiónese la tecla ▼ para activar el editor de línea y poder ver el vector de coeficientes en su totalidad.

Nota: Si usted desea crear un polinomio con coeficientes verdaderos, pero con raíces complejas, usted debe incluir las raíces complejas en pares de conjugados complejos. Para ilustrar el punto, genere un polinomio que tiene las raíces [1 (1,2) (1,-2)]. Verificar que el polinomio que resulta tenga solamente coeficientes verdaderos. También, genere un polinomio con las raíces [1 (1,2) (-1,2)], y verifique que el polinomio que resulta tiene coeficientes complejos.

Generación de una expresión algebraica para el polinomio

Uno puede utilizar la calculadora para generara una expresión algebraica de un polinomio dados los coeficientes o las raíces del polinomio. La expresión que resulta está dada en términos de la variable CAS, usualmente 'X'.(**Nota**: Ud. puede sustituir X por otras variables usando la función |.)

El siguiente ejemplo muestra como obtener la expresión algebraica de un polinomio dados los coeficientes. Asúmase que los coeficientes del polinomio son [1,5,-2,4]. Utilícense las siguientes instrucciones:

↱ NUM.SLV ▼ ▼ OK	Seleccionar *Solve poly…*
↰ [] 1 ↱ , 5	Vector de coeficientes
↱ , 2 +/- ↱ , 4 OK	
▲ SYMB	Generar expresión simbólica
ENTER	Recobrar pantalla normal

La expresión generada se muestra en la pantalla como: 'X^3+5*X^2-2*X+4'.

El siguiente ejemplo muestra como obtener la expresión algebraica de un polinomio dadas las raíces del mismo. Asúmase que las raíces del polinomio son [1,3,-2,1]. Utilícense las siguientes instrucciones:

↱ NUM.SLV ▼ ▼ OK	Seleccionar *Solve poly…*
▼ ↰ [] 1 ↱ , 3	Vector de raíces
↱ , 2 +/- ↱ , 1 OK	
▼ SYMB	Generar expresión simbólica
ENTER	Recobrar pantalla normal

La expresión generada se muestra en la pantalla como: '(X-1)*(X-3)*(X+2)*(X-1)'. Para ejecutar las multiplicaciones en esta expresión, utilícese la función EXPAND. La expresión que resulta es: 'X^4+-3*X^3+ -3*X^2+11*X-6'.

Una técnica diferente para obtener la expresión para el polinomio es generar los coeficientes primero, y después generar la expresión algebraica con los coeficientes obtenidos. Por ejemplo, para este caso:

⟶ NUM.SLV ▼ ▼ OK	Seleccionar Solve poly…
▼ ⟵ [] 1 ⟶ , 3	Escriba el vector de raíces
⟶ , 2 +/- ⟶ , 1 OK	
SOLVE	Calcular coeficientes
▼ SYMB	Generar la expresión simbólica
ENTER	Volver a la pantalla normal.

La expresión generada así se muestra en la pantalla como: 'X^4+-3*X^3+ -3*X^2+11*X+-6*X^0'. Los coeficientes se listan en el nivel 2 de la pantalla.

Cálculos financieros

Los cálculos en la opción *5. Solve finance..* en el menú de soluciones numéricas (Numerical Solver, *NUM.SLV*) se utilizan para determinar el valor del dinero con el tiempo. Este tipo de cálculos es de interés en la disciplina de la ingeniería económica y otras aplicaciones financieras. Los cálculos financieros se activan a través de las teclas ⟶ FINANCE (asociada con la tecla 9). Antes de discutir detalladamente la operación de los cálculos financieros, presentamos algunas definiciones necesarias para entender las operaciones financieras en la calculadora.

Definiciones

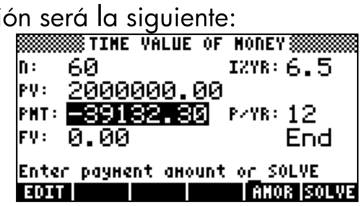
A menudo, en el desarrollo de proyectos, es necesario solicitar préstamos de instituciones financieras o de fondos públicos. La cantidad de dinero prestada se refiere como el valor presente (inglés, *Present Value*, PV). Este dinero debe ser compensado a través *n* períodos (típicamente múltiplos o submúltiplos de un mes) sujeto a una tasa de interés anual de I%YR. El número de períodos por año (inglés, Periods per year, P/YR) es un número entero de los períodos en los cuales el año será dividido con el fin de compensar el dinero del préstamo. Los valores típicos de P/YR son 12 (un pago por mes), 24 (pago dos veces al mes), o 52 (pagos semanales). El pago (inglés, *payment*, PMT) es la cantidad que el prestatario debe pagar al prestamista al principio o al final de cada uno de los n períodos del préstamo. El valor futuro del dinero (inglés, Future Value, FV) es el valor que la cantidad prestada de dinero valdrá al final de los n períodos. El pago ocurre típicamente en el final de cada período, de modo que el prestatario comience a pagar en el final del primer período, y paga la misma cantidad fija en el final del segundo, del tercer, del etc., hasta el final del período n.

Ejemplo 1 – Calculando el pago de un préstamo

¿Si $2 millones se piden prestados en una tasa de interés anual de 6.5% que se compensará en 60 cuotas, qué debe ser la cuota (pago)? Para que la deuda sea compensada totalmente en 60 meses, los valores futuros del préstamo deben ser cero. Así pues, con el fin de usar los cálculos financieros utilizaremos los valores siguientes: n = 60, I%YR = 6.5, PV = 2000000, FV = 0, P/YR = 12. Para escribir los datos y calcular el pago, PMT, use:

← FINANCE	Comenzar la forma interactiva para finanzas
60 OK	Escriba n = 60
6.5 OK	Escriba I%YR = 6.5 %
2000000 OK	Escriba PV = 2,000,000
▼	Ignore PMT
0 OK	Escriba FV = 0, seleccionar la opción End
▲ ◄ SOLVE	Seleccione PMT y calcule

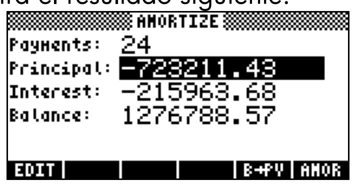
La pantalla de la solución será la siguiente:



La pantalla muestra el valor de PMT como –39,132.30, es decir, el prestatario debe pagar al prestamista los $ 39.132.30 al final de cada mes los 60 meses próximos para compensar la cantidad entera. La razón por la cual el valor de PMT resulta ser negativo es porque la calculadora está mirando el flujo de dinero desde el punto de vista del prestatario. El prestatario tiene + US $ 2,000,000.00 en el período t = 0, entonces él comienza pagar, es decir, agregando -US $ 39132.30 en los períodos t = 1, 2, …, 60. Al alcanzar t = 60, el valor neto en las manos del prestatario es cero. Ahora, si usted toma el valor los $ 39.132.30 y lo multiplica por los 60 pagos, el total pagado por el prestatario es $ 2.347.937.79. Así, el prestamista obtiene un beneficio neto de $ 347.937.79 en los 5 años que su dinero está utilizado para financiar el proyecto del prestatario.

Ejemplo 2 – Calculando la amortización de un préstamo

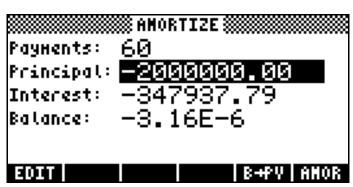
La misma solución al problema en el ejemplo 1 puede ser encontrada presionando AMOR, que significa AMORTIZATION. Esta opción se utiliza para calcular cuánto del préstamo se ha amortizado en el final de cierto número de pagos. Suponer que utilizamos 24 períodos en la primera línea de la pantalla de la amortización, es decir, 2 4 OK. Entonces, presione AMOR. Usted conseguirá el resultado siguiente:



El prestatario todavía tiene que pagar un balance de $1.276.788.57 en los 36 meses próximos.

Se interpreta esta pantalla como indicando que después de 24 meses de pagar la deuda, el prestatario ha pagado $ 723.211.43 de principal, y $ 215.963.68 de interés. El prestatario todavía tiene que pagar un balance de $1.276.788.57 en los 36 meses próximos.

Verifique qué sucede si usted substituye 60 en el ítem *Payments:* de la pantalla de la amortización, y presiona OK AMOR. La pantalla ahora muestra:



Esto significa que al final de 60 meses se han pagado $ 2.000.000.00 se ha pagado de principal, junto con $ 347.937.79 de interés, con el balance siendo que el prestamista debe el prestatario $ 0.000316. Por supuesto, el balance debe ser cero. El valor mostrado en la pantalla arriba es simplemente un error que resulta de la solución numérica.

Presione ON o ENTER, dos veces, volver a la pantalla normal de la calculadora.

Ejemplo 3 – Calculando pago con pagos al principio del período
Resolvamos el mismo problema que en los ejemplos 1 y 2, pero usando la opción de que el pago ocurre al principio del período de pago. Use:

← FINANCE	Activar cálculos financieros
60 OK	Escriba n = 60
6.5 OK	Escriba I%YR = 6.5 %
2000000 OK	Escriba PV = 2,000,000
▼	Ignore PMT
0 OK	Escriba FV = 0, opción End seleccionada
CHOOS ▲ OK	Cambiar la opción del pago a *Begin*
▲ ◄ SOLVE	Seleccionar PMT y calcular

La pantalla ahora muestra que el valor de PMT es $-38.921.47, es decir, el prestatario deben pagar al prestamista $ 38.921.48 al principio de cada mes, los 60 meses próximos. Note que la cantidad que el prestatario paga mensualmente, si paga al principio de cada período de pago, es levemente menor que lo pagado al final de cada período de pago. La razón de esa diferencia que el prestamista consigue ganancias de interés de los pagos hechos al principio del período, aliviando así la carga en el prestamista.

Notas:
1. Los cálculos de finanzas de la calculadora permiten que usted calcule cualquiera de los términos implicados, es decir, n, I%YR, PV, FV, P/Y, dados los términos restantes en el cálculo del préstamo. Simplemente seleccione el valor que usted desea calcular, y presione SOLVE. El resultado será mostrado en la localidad seleccionada.

2. Los valores calculados en el ambiente financiero de la calculadora se copian a la pantalla con su etiqueta correspondiente.

Borrando las variables

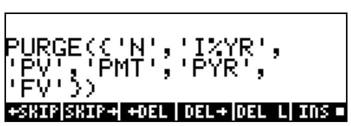
Cuando usted utiliza el ambiente financiero de la calculadora por la primera vez dentro el directorio HOME, o cualquier sub-directorio, generará las variables n I%YR PV PMT PYR FV para almacenar los términos correspondientes en los cálculos. Usted puede ver el contenido de estas variables usando:

→ n → I%YR → PV → PMT → PYR → FV.

Usted puede guardar estas variables para uso futuro, o utilizar la función PURGE para borrarlas de su directorio. Para borrar todas las variables inmediatamente, si usa modo de ALG, intente lo siguiente:

TOOL PURGE VAR ← {}	Escriba PURGE, prepare lista de variables
' → n	Escriba el nombre de la variable N
▶ → ,	Escriba una coma
' → I%YR	Escriba el nombre de la variable I%YR
▶ → ,	Escriba una coma
' → PV	Escriba el nombre de la variable PV
▶ → ,	Escriba una coma
' → PMT	Escriba el nombre de la variable PMT
▶ → ,	Escriba una coma
' → PYR	Escriba el nombre de la variable PYR
▶ → ,	Escriba una coma
' → FV.	Escriba el nombre de la variable FV
ENTER	Ejecute la instrucción PURGE

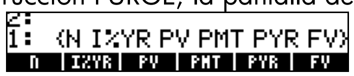
Las pantallas siguientes muestran la instrucción PURGE para eliminar todas las variables en el directorio, y el resultado después de ejecutar la instrucción.



En modo RPN, la instrucción se ejecuta de esta manera:

[VAR] [←] { }	Elaborar una lista de variables a remover
[N]	Escriba nombre de la variable N
[I%YR]	Escriba nombre de la variable I%YR
[PV]	Escriba nombre de la variable PV
[PMT]	Escriba nombre de la variable PMT
[PYR]	Escriba nombre de la variable PYR
[FV]	Escriba nombre de la variable FV
[ENTER]	Escriba lista de variables en la pantalla
[TOOL] [PURGE]	Elimine las variables en la lista

Antes de ejecutar la instrucción PURGE, la pantalla de RPN lucirá así:



Solución de ecuaciones con una sola incógnita con el NUM.SLV

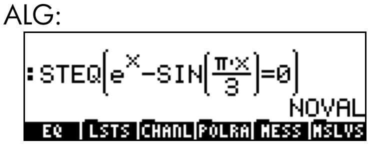
El menú NUM.SLV provee la opción *1. Solve equation..* para resolver ecuaciones de una sola incógnita, incluyéndose ecuaciones algebraicas no-lineales, y ecuaciones trascendentes. Por ejemplo, resuélvase la ecuación: e^x-$\sin(\pi x/3) = 0$.

Simplemente escríbase la expresión como un objeto algebraico y almacénese la misma en la variable EQ. Los pasos a seguir en modo ALG son los siguientes:

['] [←] e^x [ALPHA] [←] [X] [▶] [—] [SIN] [←] π
[×] [ALPHA] [←] [X] [÷] [3] [▶] [→] = [0] [▶]
[STO▶] [ALPHA] [E] [ALPHA] [Q] [ENTER]

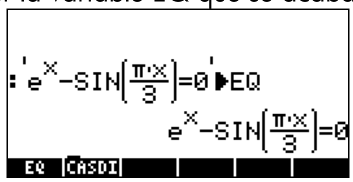
La función STEQ

La función STEQ se utiliza para almacenar el argumento en la variable EQ, por ejemplo, en modo ALG:

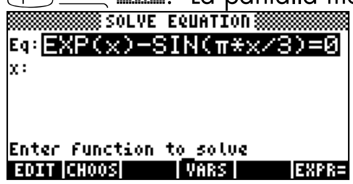


En modo RPN, escríbase primero la ecuación entre apóstrofes y actívese la función STEQ. La función STEQ puede utilizarse, por lo tanto, como una forma simple de almacenar expresiones en la variable EQ.

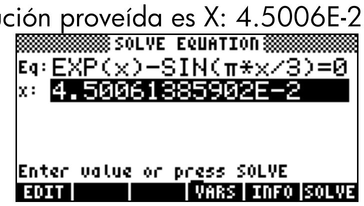
Presiónese VAR para ver la variable EQ que se acaba de crear:



A continuación, actívese el ambiente SOLVE y selecciónese la opción *Solve equation…*, utilizando: ↱ NUM.SLV OK. La pantalla mostrará lo siguiente:



La ecuación almacenada en la variable EQ se muestra en la opción *Eq* de la forma interactiva denominada SOLVE EQUATION. Así mismo, se provee una opción denominada *x*, que representa la incógnita a resolverse. Para encontrar una solución a la ecuación es necesario seleccionar la región de la forma interactiva correspondiente a la x: utilizando la tecla ▼, y presionar la tecla SOLVE. La solución proveída es X: 4.5006E-2:



Esta, sin embargo, no es la única solución posible para esta ecuación. Para obtener, por ejemplo, una solución negativa, escríbase un número negativo en la opción x: antes de resolver la ecuación. Por ejemplo, 3 +/- OK ▼ SOLVE. La nueva solución es x: -3.045.

Procedimiento de la solución para *Equation Solve…*

Las soluciones numéricas de las ecuaciones trabajan como sigue:

- Permite al usuario escribir o escoger (CHOOS) una ecuación para resolver.

- Crea una forma interactiva con localidades correspondientes a todas las variables incluidas en la ecuación almacenada en la variable EQ.
- El usuario necesita incorporar los valores para todas las variables incluidas, excepto una.
- El usuario entonces destaca la localidad que corresponde a la incógnita para que resolver la ecuación, y presiona SOLVE
- El usuario puede forzar una solución proporcionando un valor inicial en la localidad apropiado antes de resolver la ecuación

La calculadora utiliza un algoritmo de búsqueda para establecer claramente un intervalo para el cual la función cambia de signo, lo que indica la existencia de una raíz o de una solución. Entonces utiliza un método numérico para converger en la solución.

La solución que la calculadora busca se determina por el valor inicial presente en el localidad de la incógnita. Si no hay valor presente, la calculadora utiliza un valor prefijado de cero. Así, usted puede buscar más de una solución a una ecuación cambiando el valor inicial en el localidad de la incógnita. Ejemplos de las soluciones de las ecuaciones se muestran posteriormente.

Ejemplo 1 – Ley de Hooke para la deformación y el esfuerzo
La ecuación a utilizar es ley de Hooke para la deformación normal en la dirección x para una partícula sólida sujeta a un estado de esfuerzos dado por

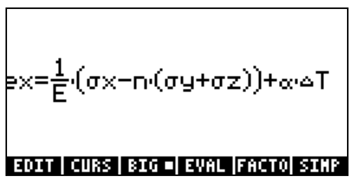
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

La ecuación es $e_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - n \cdot (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha \cdot \Delta T,$ en la cual e_{xx} es el esfuerzo unitario en la dirección x, σ_{xx}, σ_{yy}, y σ_{zz}, son los esfuerzos normales sobre la partícula en las direcciones x, y, y z, *E* es el módulo de Young o módulo de elasticidad del material, *n* es el cociente de Poisson del material, α es el coeficiente de la extensión termal del material, y ΔT es un incremento de temperatura.

Suponer que se dan los datos siguientes: σ_{xx}= 2500 psi, σ_{yy} =1200 psi, y σ_{zz} = 500 psi, E = 1200000 psi, *n* = 0.15, α = 0.00001/°F, ΔT = 60 °F. Para calcular la deformación e_{xx} use lo siguiente:

↱ NUM.SLV OK	Activa soluciones numéricas
↱ EQW	Activa el escritor de ecuaciones

A este punto siga las instrucciones del capítulo 2 en cómo utilizar el Escritor de ecuaciones para construir una ecuación. La ecuación a entrar en la localidad *Eq* debe lucir como se muestra a continuación (notar que utilizamos solamente un subíndice para referir a las variables, i.e., e_{xx} se traduce como *ex*, etc. -- esto se hace para ahorrar tiempo de escritura):

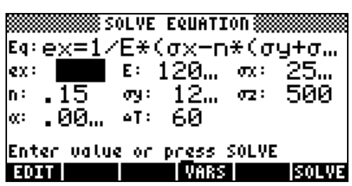


Utilizar los atajos siguientes para los caracteres especiales:

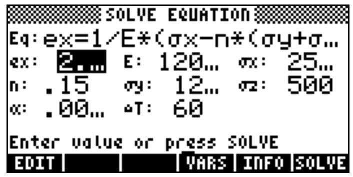
σ: ALPHA ↱ S α: ALPHA ↱ A Δ: ALPHA ↱ C

y recuerde que las letras minúsculas son incorporadas usando ALPHA ↰ antes de la tecla de la letra, así, x se escribe como ALPHA ↰ X .

Presione ENTER para volver a la pantalla de la solución. Escriba los valores propuestos arriba en las localidades correspondientes, de modo que la pantalla de la solución se muestren de esta manera:



Con la localidad *ex:* seleccionada, presione SOLVE para encontrar *ex*:



La solución se puede resolver dentro de la forma interactiva SOLVE EQUATION al presionar EDIT mientras que la localidad *ex:* esté seleccionada. El valor que resulta es 2.470833333333E-3. Presione OK para cerrar el editor.

Suponer que usted desea determinar el módulo de Young el cual producirá una deformación e_{xx} = 0.005 bajo el mismo estado de esfuerzos, despreciando la extensión termal. En este caso, usted debe escribir un valor de 0.005 en la localidad *ex:*, y un cero en la localidad *ΔT:* (con ΔT = 0, no hay efectos termales incluidos). Para calcular E, seleccione la localidad *E:* y presione SOLVE. El resultado, visto con el editor EDIT es, E ≈449000 psi. Presione SOLVE ENTER para regresar a la pantalla normal.

Note que los resultados de los cálculos que se realizaron dentro de la pantalla de las soluciones numéricas se han copiado a la pantalla:

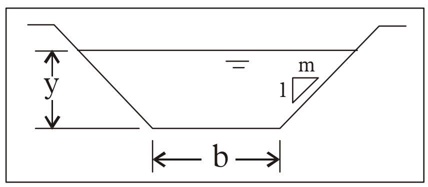
También, usted verá todas las variables correspondientes a esas variables en la ecuación almacenada en EQ (presione NXT para ver todas las variables en su directorio), esto es, las variables *ex, ΔT, α, σz, σy, n, σx,* y *E*.

Ejemplo 2 – Energía específica en flujo de canal abierto

La energía específica en un canal abierto se define como la energía por unidad de peso medido con respecto al fondo del canal. Sea E = energía específica, y = profundidad del canal, V = velocidad del flujo, g = aceleración de la gravedad, entonces escribimos

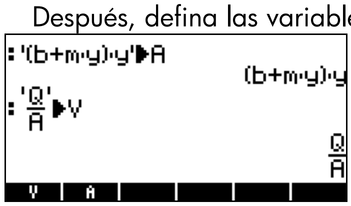
$$E = y + \frac{V^2}{2g}.$$

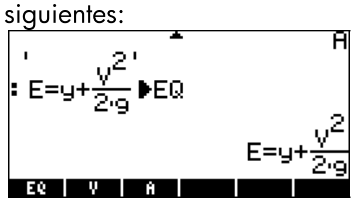
La velocidad del flujo se escribe como V = Q/A, donde Q = caudal, A = área de la sección transversal. El área depende de la sección transversal utilizada, por ejemplo, para una sección transversal trapezoidal, como se muestra en la figura inferior, A = (b+m·y) ·y, donde b = ancho del fondo, y m = pendiente lateral de la sección transversal.



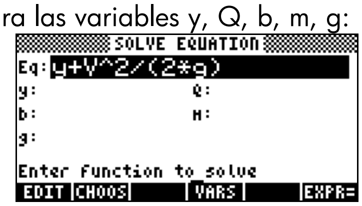
Podemos escribir la ecuación para E según se mostró anteriormente y utilizar las variables auxiliares A y V, de modo que la forma interactiva que resulta tenga localidades para las variables fundamentales y, Q, g, m, y b, como sigue:

- Primero, cree un sub-directorio llamado SPEN (inglés, SPecific ENergy) y trabaje dentro de ese sub-directorio.
- Después, defina las variables siguientes:

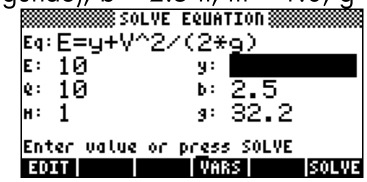




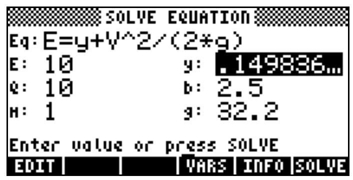
- Active las soluciones numéricas para resolver ecuaciones: NUM.SLV OK. Note que la forma interactiva contiene las localidades para las variables y, Q, b, m, g:



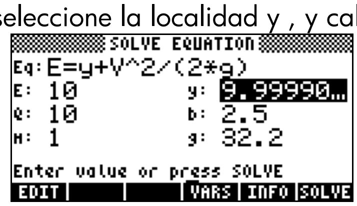
- Use los datos de entrada siguientes: E = 10 ft, Q = 10 cfs (pies cúbicos por segundo), b = 2.5 ft, m = 1.0, g = 32.2 ft/s^2:



- Calcule y.



  El resultado es 0.149836.., es decir, y = 0.149836.
- Se sabe, sin embargo, que hay realmente dos soluciones disponibles para y en la ecuación de la energía específica. La solución que acabamos de encontrar corresponde a una solución numérica con un valor inicial de 0 (el valor prefijado para y, es decir, siempre que la localidad de la incógnita esté vacía, el valor inicial es cero). Para encontrar la otra solución, necesitamos escribir un valor mayor para y, digamos 15, seleccione la localidad y , y calcule y una vez más:



  El resultado ahora es 9.99990, es decir, y = 9.99990 ft.

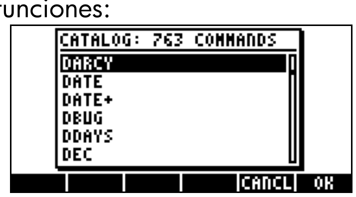
Este ejemplo ilustra el uso de variables auxiliares de escribir ecuaciones complicadas. Cuando se activa NUM.SLV, las substituciones implicadas por las variables auxiliares se activan, y la pantalla de la solución para la ecuación proporciona las localidades para las variables primitivas o fundamentales que resultan de las substituciones. El ejemplo también ilustra una ecuación que tiene más de una solución, y cómo la elección del valor inicial puede producir esas diversas soluciones.

En el ejemplo siguiente utilizaremos la función DARCY para encontrar factores de fricción en tuberías. Así, definimos la función en la sección siguiente.

Función especial para el flujo de tuberías: DARCY (ε/D,Re)

La ecuación de Darcy-Weisbach se utiliza para calcular la pérdida de energía (por unidad de peso), h_f, en un flujo a través de una tubería de diámetro D, rugosidad absoluta ε, y longitud L, cuando la velocidad del flujo en la tubería es V. Se escribe la ecuación como $h_f = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$. La cantidad *f* se sabe pues el factor de la fricción del flujo y del él se ha encontrado para ser una función de la rugosidad relativa de la pipa, ε/D, y un número de Reynolds (adimensional), Re. Se define el número de Reynolds como Re = ρVD/μ = VD/ν, donde ρ y μ son la densidad y la viscosidad dinámica del líquido, respectivamente, y ν = μ/ρ es la viscosidad cinemática del líquido.

La calculadora proporciona una función llamada DARCY que usa como entrada la rugosidad relativa ε/D y el número de Reynolds, en ese orden, para calcular el factor de fricción f. La función DARCY puede encontrarse a través del catálogo de funciones:



Por ejemplo, para ε/D = 0.0001, Re = 1000000, usted puede encontrar el factor de la fricción usando: DARCY(0.0001,1000000). En la pantalla siguiente, la función →NUM ()fue utilizado obtener un valor numérico de la función:

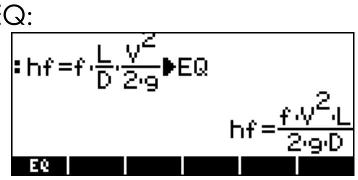
El resultado es f = DARCY(0.0001,1000000) = 0.01341…

La función FANNING(ε/D,Re)

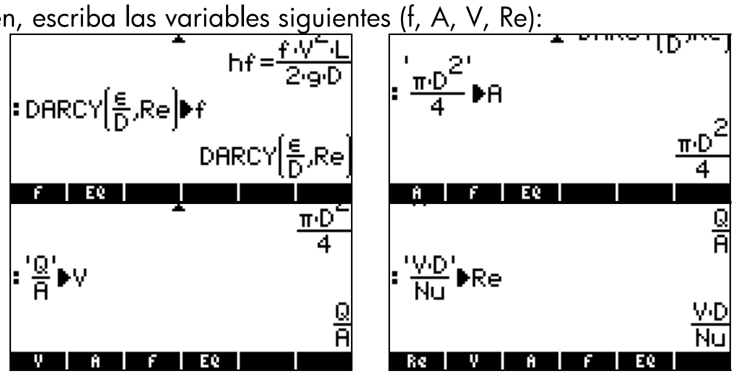
En usos de la aerodinámica se utiliza un diverso factor de fricción, el factor de fricción de Fanning. El factor de fricción de Fanning, f_F, se define como 4 veces el factor de fricción de Darcy-Weisbach, *f*. La calculadora también proporciona una función llamada FANNING que usa los mismos argumentos que DARCY, esto es, ε/D y Re, y proporciona factor de fricción de FANNING. Verificar que FANNING(0.0001,1000000) = 0.0033603589181s.

Ejemplo 3 – Flujo en una tubería

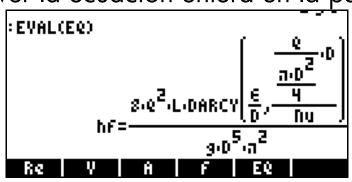
Usted puede desear crear un sub-directorio separado (PIPELINES) para intentar este ejemplo. El flujo que gobierna de la ecuación principal en una tubería es, por supuesto, la ecuación de Darcy-Weisbach . Así, escriba la ecuación siguiente en EQ:



También, escriba las variables siguientes (f, A, V, Re):



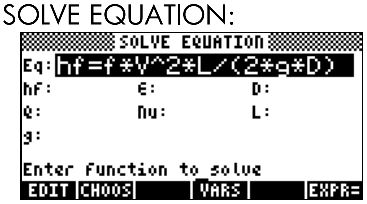
En este caso almacenamos la ecuación principal (ecuación de Darcy-Weisbach) en EQ, y después substituimos varias de sus variables por otras expresiones con la definición de las variables f, A, V, y Re. Para ver la ecuación combinada, use EVAL(EQ). En este ejemplo cambiamos el ajuste de la pantalla para poder ver la ecuación entera en la pantalla:



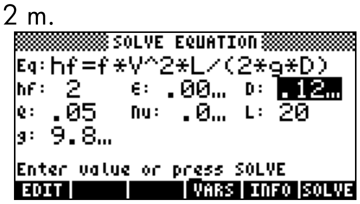
Así, la ecuación que estamos solucionando, después de combinar las diversas variables en el directorio, es:

$$h_f = \frac{8Q^2L}{\pi^2 gD^5} \cdot DARCY\left(\frac{\varepsilon}{D}, \frac{\frac{QD}{\pi D^2/4}}{Nu}\right)$$

La ecuación combinada tiene variables primitivas: h_f, Q, L, g, D, ε, y Nu. Active las soluciones numéricas (NUM.SLV) ver las variables primitivas listadas en la pantalla SOLVE EQUATION:

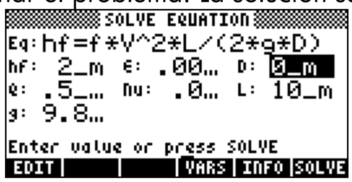


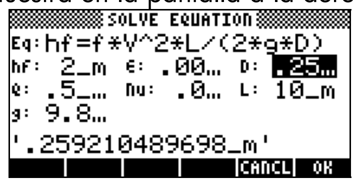
Suponer que utilizamos los valores hf = 2 m, ε = 0.00001 m, Q = 0.05 m^3/s, Nu = 0.000001 m^2/s, L = 20 m, y g = 9.806 m/s^2, encontrar el diámetro D. Escriba los valores conocidos, y calcule D, La solución es: 0.12, esto es, D = 0.12 m.



Si la ecuación es dimensionalmente consistente, usted puede agregar unidades a los valores de entrada, según se muestra en la figura siguiente.

Sin embargo, usted debe agregar esas unidades al valor inicial en la solución. Así, en el ejemplo siguiente colocamos 0_m en la localidad D: antes de solucionar el problema. La solución se muestra en la pantalla a la derecha:



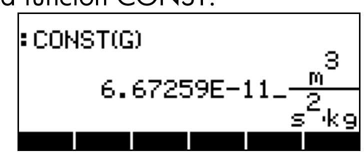


Presione ENTER para volver a la pantalla normal de la calculadora. La solución para D será enumerada en la pantalla.

Ejemplo 4 – Gravitación universal

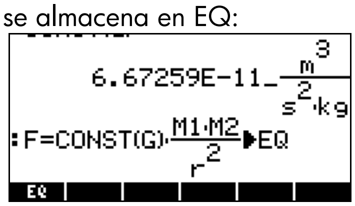
La ley de Newton de la gravitación universal indica que la magnitud de la fuerza atractiva entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 separados por una distancia r se calcula por la ecuación $F = G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2}$.

Aquí, G es la constante de gravitacional universal, cuyo valor se puede obtener con el uso de la función CONST:

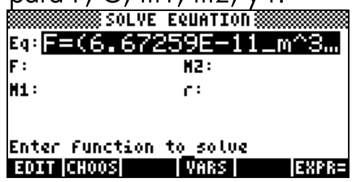


Podemos calcular cualquier término en la ecuación (excepto G) escribiendo la ecuación como:

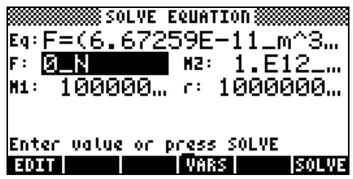
Esta ecuación entonces se almacena en EQ:



Activando las soluciones numéricas para esta ecuación da lugar a una forma interactiva que contiene para F, G, m1, m2, y r.



Solucionemos este problema usando unidades con los valores siguientes para las variables conocidas m1 = 1.0×10^{6} kg, m2 = 1.0×10^{12} kg, r = 1.0×10^{11} m. También, escriba un valor de 0_N en la localidad F para asegurar la solución apropiada usando unidades en la calculadora:

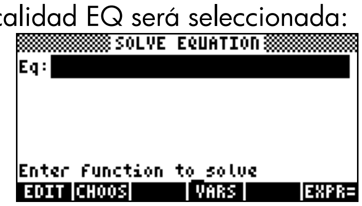


Calcule F, y presione ON para volver a la pantalla normal de la calculadora. La solución es F : 6.67259E-15_N, o F = 6.67259×10^{-15} N.

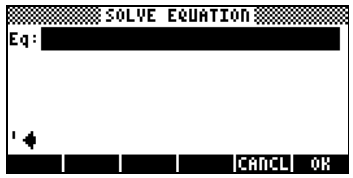
Nota: Al usar unidades en las soluciones numéricas cerciorarse de que todas las variables tengan las unidades apropiadas, que las unidades son compatibles, y que la ecuación es dimensionalmente homogénea.

Diversas maneras de incorporar ecuaciones en EQ

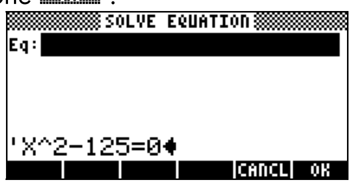
En todos los ejemplos mostrados anteriormente hemos incorporado la ecuación que se solucionará directamente en la variable EQ antes de activar las soluciones numéricas. Usted puede escribir la ecuación que se solucionará directamente en el ambiente de soluciones numéricas al editar el contenido de la localidad EQ en la forma interactiva. Si la variable EQ no se ha definido previamente, cuando usted active las soluciones numéricas (↱ NUM.SLV OK), la localidad EQ será seleccionada:

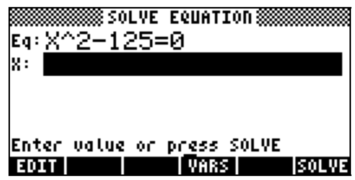


A este punto usted puede escribir una nueva ecuación presionando EDIT. Se proporcionarán un par de apóstrofes de modo que usted pueda escribir la expresión entre ellos:



Escriba una ecuación, digamos, X^2 - 125 = 0, directamente en la pantalla, y presione OK .

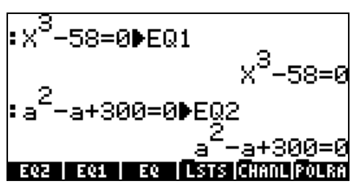




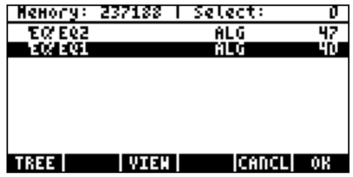
A este punto la ecuación es lista para la solución.

Alternativamente, usted puede activar al escritor de la ecuación después de presionar EDIT para escribir su ecuación. Presione ENTER para volver a la pantalla de soluciones numéricas.

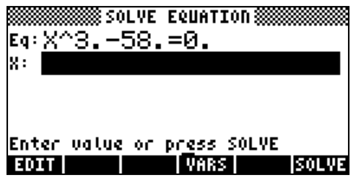
Otra manera de incorporar una ecuación en la variable de EQ es seleccionar una variable que existe ya en su directorio y que se almacenará en EQ. Esto significa que su ecuación tendría que haber sido almacenada en una variable previamente a activar las soluciones numéricas. Por ejemplo, suponer que hemos almacenado las ecuaciones siguientes en las variables EQ1 y EQ2:



Ahora, active las soluciones numéricas (↱ NUM.SLV OK) y seleccione la localidad EQ. A este punto presione la tecla CHOOS. Use las teclas ▲▼ para seleccionar, digamos, la variable EQ1:



Presione OK después de seleccionar EQ1 para cargarla en la variable EQ en el ambiente de soluciones. La nueva ecuación es lista ser solucionado.

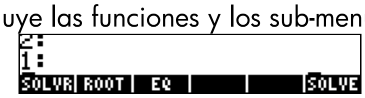


El menú SOLVE

El menú SOLVE permite el acceso a alguno de las funciones de soluciones numéricas a través de las teclas de menú. Para tener acceso a este menú use, en modo RPN: 74 MENU, o en modo ALG: MENU(74). Alternativamente, usted puede utilizar ↱(mantener) 7 para activar el menú SOLVE. Los sub-menús proporcionados por SOLVE son los siguientes:

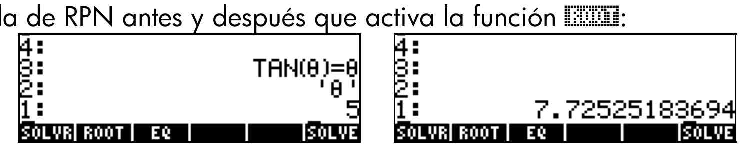
El sub-menú ROOT

El sub-menú ROOT incluye las funciones y los sub-menús siguientes:

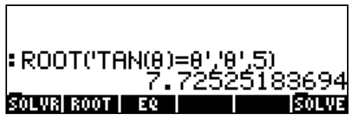


La función ROOT

La función ROOT se utiliza para resolver una ecuación para una variable dada con un valor inicial aproximado. En modo RPN la ecuación estará en el nivel 3 de la pantalla, mientras que el nombre de la variable estará situado en el nivel 2, y la el valor inicial en el nivel 1. La figura siguiente muestra la pantalla de RPN antes y después que activa la función ROOT:



En modo ALG, usted utilizaría ROOT(‘TAN(θ)=θ’,’θ’,5) para activar la función ROOT:



Variable EQ

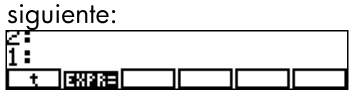
La tecla EQ en este sub-menú se utiliza como referencia a la variable EQ. Presionar esta tecla del menú es equivalente a usar la función RCEQ (inglés, ReCall EQ, o ReCobrar EQ).

El sub-menú SOLVR

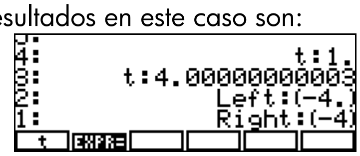
El sub-menú SOLVR activa la función de solución (solver) para la ecuación almacenada actualmente en EQ. Algunos ejemplos se demuestran después:

Ejemplo 1 - Solucionar la ecuación t^2-5t = -4

Por ejemplo, si usted almacena la ecuación ‘t^2-5*t=-4’ en EQ, y presiona SOLVR, activará el menú siguiente:

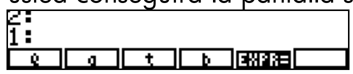


Este resultado indica que usted puede calcular t para la ecuación listada en la parte superior de la pantalla. Si usted intenta, por ejemplo, [t], le dará el resultado t: 1., después de mostrar brevemente el mensaje “Solving for t” (Calculando t). Hay una segunda raíz a esta ecuación, que puede ser encontrada cambiando el valor de t, antes de calcularlo nuevamente. Siga estas instrucciones: 10 [t], después presione [t]. El nuevo resultado es t: 4.0000000003. Para verificar este resultado, presione la tecla del menú etiquetada EXPR=, cuál evalúa la expresión en EQ para el valor actual de t. Los resultados en este caso son:



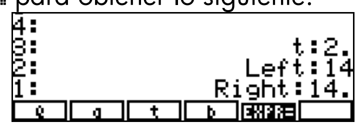
Para abandonar el ambiente SOLVR, presione VAR. El acceso al menú SOLVE se pierde a este punto, así que usted tiene que activarlo una vez más según se indicó anteriormente, para continuar con los ejercicios siguientes.

Ejemplo 2 - Resolver la ecuación $Q = at^2+bt$
Es posible almacenar en EQ una ecuación que implica más que una variable, digamos, 'Q = at^2 + bt'. En este caso, después de activar el menú SOLVE, y presionar ROOT SOLVR, usted conseguirá la pantalla siguiente:



Dentro de este ambiente de SOLVR usted puede proporcionar los valores para cualquiera de las variables enumeradas escribiendo el valor en la pantalla y presionando las teclas correspondientes del menú. Por ejemplo, suponga que usted escribe los valores Q = 14, a = 2, y b = 3. Use:
14 [Q], 2 [a], 3 [b].

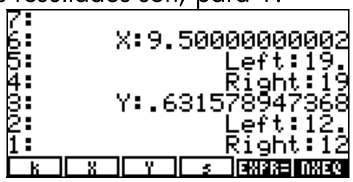
A medida que las variables Q, a, y b, aceptan los valores numéricos asignados, las asignaciones se enumeran en la esquina superior izquierda de la pantalla. A este punto podemos calcular t, usando ← [t]. El resultado es t: 2. Presione EXPR= para obtener lo siguiente:



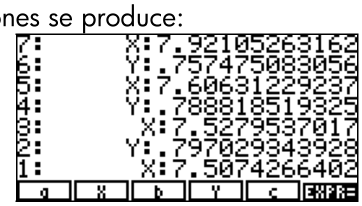
Ejemplo 3 - Resolver dos ecuaciones simultáneas, una a la vez
Usted puede también resolver más de una ecuación usando una ecuación a la vez, y repitiendo el proceso hasta que se encuentra una solución al sistema. Por ejemplo, si usted almacena la siguiente lista de ecuaciones en la variable EQ: { 'a*X+b*Y = c', 'k*X*Y=s'}, las teclas ROOT SOLVR, en el menú SOLVE, producirá la pantalla siguiente:

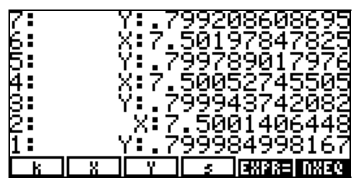
La primera ecuación, a saber, a*X + b*Y = c, será enumerado en la parte superior de la pantalla. Usted puede escribir los valores para las variables a, b, y c, digamos: 2 [a] 5 [b] 19 [c]. También, puesto que podemos solucionar solamente una ecuación a la vez, escribamos un valor inicial para Y, digamos, 0 [Y], y calcule X, usando ← [X]. Esto produce el valor, X: 9.4999…. Para verificar el valor de la ecuación a este punto, presione EXPR=. Los resultados son: Left (izquierda): 19, Right (derecha): 19. Para solucionar la ecuación siguiente, presione NXT NEXQ. La pantalla muestra las teclas del menú como:

Digamos que escribimos los valores k = 2, s = 12. Entonces se calcula Y, y presionamos EXPR=. Los resultados son, para Y:



Entonces continuamos moviéndonos de la primera a la segunda ecuación, hacia adelante y hacia atrás, solucionando la primera ecuación para X y la segunda para Y, hasta que los valores de X y de Y convergen a una solución. Para moverse de ecuación a ecuación, use NXEQ. Para calcular X y Y, use [X], y [Y], respectivamente. La secuencia siguiente de soluciones se produce:





Después de resolver las dos ecuaciones, una a la vez, notamos que, hasta el tercer decimal, X es convergente a un valor de 7.500, mientras que Y es convergente a un valor de 0.799.

Usando unidades con el sub-menú SOLVR

Éstas son algunas reglas en el uso de unidades con el sub-menú SOLVR:

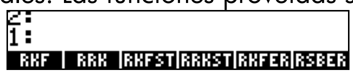
- Al escribir un valor inicial con unidades para una variable dada, introducirá el uso de esas unidades en la solución.
- Si un nuevo valor inicial se da sin unidades, las unidades almacenadas previamente para esa variable particular serán utilizadas en la solución.
- Para remover unidades, escriba un número sin unidades en una lista como el nuevo valor inicial, es decir, use el formato { número }.
- Una lista de números se puede dar como valores iniciales para una variable. En este caso, las unidades toman las unidades que pertenecen al último número en la lista. Por ejemplo, al escribir

{ 1.41_ft 1_cm 1_m } las unidades de metro (m) se utilizarán para esa variable.

- La expresión usada en la solución debe tener unidades consistentes, o resultará en un error al intentar la solución.

El sub-menú DIFFE

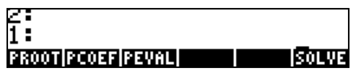
El sub-menú DIFFE provee un número de funciones para la solución numérica de ecuaciones diferenciales. Las funciones proveídas son las siguientes:



Estas funciones se presentan detalladamente en el capítulo 16.

El sub-menú POLY

El sub-menú POLY realiza operaciones en polinomios. Las funciones incluidas son las siguientes:



Función PROOT

Esta función se utiliza para encontrar las raíces de un polinomio dado un vector que contiene los coeficientes polinómicos en orden decreciente de las potencias de la variable independiente. Es decir si es el polinomio es $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, el vector de coeficientes se debe escribir como $[a_n, a_{n-1}, \ldots , a_2, a_1 , a_0]$. Por ejemplo, las raíces del polinomio cuyos coeficientes son [1, -5, 6] son [2, 3].

Función PCOEF

Esta función produce los coeficientes $[a_n, a_{n-1}, \ldots , a_2, a_1 , a_0]$ de un polinomio $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, dado un vector de sus raíces $[r_1, r_2, \ldots, r_n]$. Por ejemplo, un vector cuyas raíces se dan por [-1, 2, 2, 1, 0], producirá los coeficientes siguientes: [1, -4, 3, 4, -4, 0]. El polinomio es $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 4x$.

Función PEVAL

Esta función evalúa un polinomio, dado un vector de sus coeficientes, $[a_n, a_{n-1}, \ldots , a_2, a_1 , a_0]$, y un valor x_0, es decir, PEVAL calcula $a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots$

+ $a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0$. Ejemplo de Por, para los coeficientes [2, 3, -1, 2] y un valor de 2, PEVAL calcula el valor 28.

El sub-menú SYS

El sub-menú SYS contiene un listado de las funciones usadas para solucionar sistemas lineares. Las funciones enumeradas en este sub-menú son:

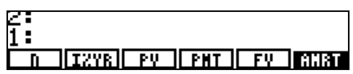
Estas funciones se presentan detalladamente en el capítulo 11.

El sub-menú TVM

El sub-menú de TVM (inglés, Time Value of Money, o valor temporal del dinero) contiene las funciones para calcular el valor temporal del dinero. Esto es una manera alternativa de solucionar problemas de finanzas (véase el capítulo 6). Las funciones disponibles se demuestran aquí:

El sub-menú de SOLVR

El sub-menú de SOLVR en el sub-menú de TVM activa las soluciones de problemas de TVM. Por ejemplo, presionando SOLVR, a este punto, accionará la pantalla siguiente:

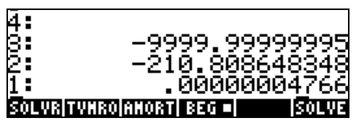


Como ejercicio, intente usar los valores n = 10, I%YR = 5.6, PV = 10000, y FV = 0, y use ⬅ [PMT] para encontrar PMT = -1021.08…. Presionando NXT, produce la pantalla siguiente:

Presione VAR para salir del ambiente SOLVR. Regrese al sub-menú de TVM dentro del sub-menú SOLVR para probar las otras funciones disponibles.

Función TVMROOT
Esta función requiere como argumentos el nombre de una de las variables en el problema de TVM.   La función produce la solución para esa variable, dado que las otras variables existen y tienen valores que fueron almacenados previamente. Por ejemplo, después de resolver el problema anterior de TVM, podemos calcular 'N', como sigue: ['] ALPHA N ENTER TVMRO. El resultado es 10.

Función AMORT
Esta función toma un valor que representa un período del pago (entre 0 y n) y produce el principal, el interés, y el balance para los valores almacenados actualmente en las variables de TVM. Por ejemplo, con los datos usados anteriormente, si activamos la función AMORT para un valor de 10, se obtiene:



Función BEG
Si se selecciona esta opción, los cálculos de TMV utilizan pagos al principio de cada período. Si no se selecciona esta opción, los cálculos de TMV utilizan pagos al final de cada período.

Capítulo 7
Solución de ecuaciones múltiples

Muchos problemas en la ciencia y la ingeniería requieren las soluciones simultáneas de más de una ecuación. La calculadora proporciona varios procedimientos para solucionar ecuaciones múltiples según lo presentado abajo. Los sistemas de ecuaciones lineares no se presentan en este capítulo. Estos serán presentados detalladamente en el capítulo sobre matrices y álgebra linear.

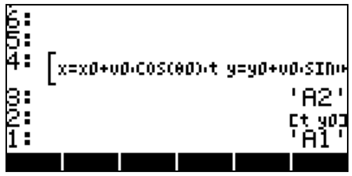
Sistemas de ecuaciones racionales

Las ecuaciones que se pueden escribir como polinomios o expresiones algebraicas racionales se pueden solucionar directamente con la calculadora usando la función SOLVE. Usted necesita proporcionar la lista de ecuaciones como elementos de un vector. La lista de las variables a calcular debe también proporcionarse como un vector. Cerciórese que el CAS esté fijado al modo Exact antes de procurar una solución usando este procedimiento. También, cuanto más complicadas las expresiones, el CAS toma más tiempo en resolver un sistema particular de ecuaciones. Los ejemplos de esta aplicación se presentan a continuación:

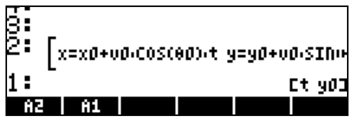
Ejemplo 1 – Movimiento de proyectiles

Utilice la función SOLVE con los siguientes argumentos vectoriales, el primer siendo la lista de ecuaciones: ['x = x0 + v0*COS(θ0)*t' 'y = y0 + v0*SIN(θ0)*t – g*t^2/2'] ENTER , y el segundo las variables a calcular, digamos t y y0, es decir, ['t' 'y0'].

La solución en este caso se obtendrá usando el modo RPN. En RPN, podemos construir la solución gradualmente. Sin embargo, la solución en el modoALG es muy similar. Primero, almacenamos el primer vector (ecuaciones) en la variable A2, y el vector de variables en la variable A1. La pantalla siguiente demuestra la pantalla RPN antes de almacenar las variables.



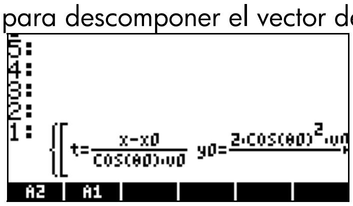
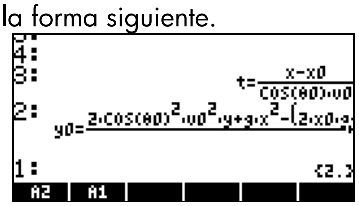
A este punto, necesitamos solamente presionar STO▸, dos veces, para almacenar estas variables. Para resolver el problema, primero cambiamos el modo del CAS a Exact, y después, listar el contenido de A2 y de A1, en ese orden: A2 A1 .



Use la instrucción SOLVE (en el menú S.SLV: ← S.SLV). Después de unos 40 segundos, quizá más, usted consigue como resultado la siguiente lista:

{ ‘t = (x-x0)/(COS(θ0)*v0)’
‘y0 = (2*COS(θ0)^2*v0^2*y+(g*x^2(2*x0*g+2*SIN(θ0))*COS(θ0)*v0^2)*x+
(x0^2*g+2*SIN(θ0)*COS(θ0)*v0^2*x0)))/(2*COS(θ0)^2*v0^2)’]}

Presione EVAL para remover el vector de la lista, y después utilice la función OBJ→, para descomponer el vector de la forma siguiente.

Nota: Este método funciona muy bien en este ejemplo porque las incógnitas t y y0 son términos algebraicos en las ecuaciones. Este método no funcionaría para calcular θ0, puesto que θ0 pertenece a un término trascendente en las ecuaciones.

Ejemplo 2 – Esfuerzos en un cilindro de pared gruesa

Considere un cilindro de pared gruesa con radios interno y externo a y b, respectivamente, sujeto a una presión interna P_i y a una presión externa P_o.

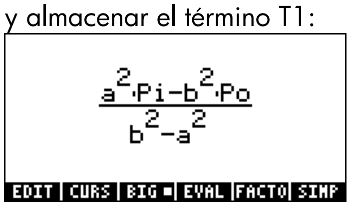
A cualquier distancia radial r del eje del cilindro el esfuerzo normal en las direcciones radial y transversal, σ_{rr} y $\sigma_{\theta\theta}$, respectivamente, se escriben:

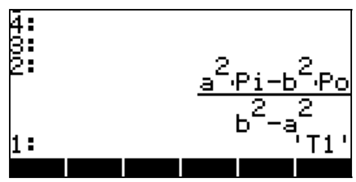
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{a^2 \cdot P_i - b^2 \cdot P_o}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot (P_i - P_o)}{r^2 \cdot (b^2 - a^2)},$$

$$\sigma_{rr} = \frac{a^2 \cdot P_i - b^2 \cdot P_o}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot (P_i - P_o)}{r^2 \cdot (b^2 - a^2)}.$$

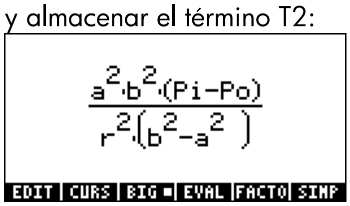
Note que los lados derechos de las dos ecuaciones difieren solamente en el signo entre los dos términos. Por lo tanto, para escribir estas ecuaciones en la calculadora, se sugiere escribir el primer término y almacenarlo en una variable T1, después escribir el segundo término, y almacenarlo en T2. La escritura de las ecuaciones posteriormente consistirá en colocar el contenido de T1 y T2 en la pantalla y sumarlos y restarlos. Aquí es cómo se hace con el escritor de ecuaciones:

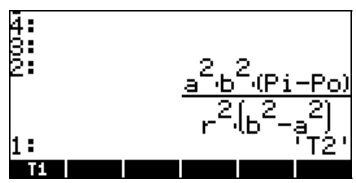
Escribir y almacenar el término T1:





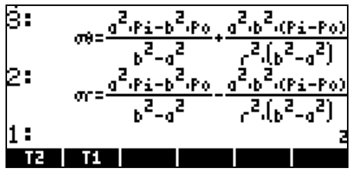
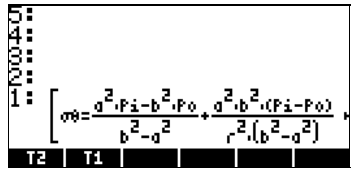
Escribir y almacenar el término T2:



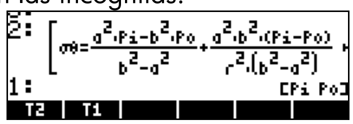


Note que se utiliza el modo RPN en este ejemplo, sin embargo, el procedimiento en modo ALG es muy similar. Cree la ecuación para $\sigma_{\theta\theta}$:
VAR T1 T2 + ALPHA ↱ S ALPHA ↱ T ENTER ▶ ↱ =
Cree la ecuación para σ_{rr}: VAR T1 T2 − ALPHA ↱ S ALPHA ↰ R ENTER
▶ ↱ =

Produzca un vector con las dos ecuaciones, usando la función →ARRY (accesible en el catálogo de funciones ↱ CAT) después de escribir un 2 :

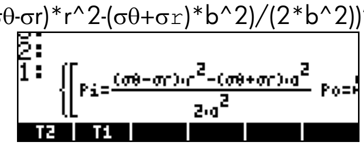
 

Ahora, suponga que deseamos calcular P_i y P_o, dados a, b, r, σ_{rr}, y $\sigma_{\theta\theta}$. Escribimos un vector con las incógnitas:

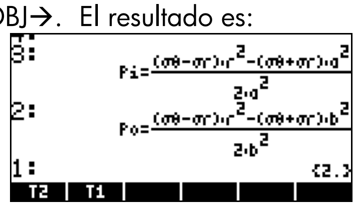


Para calcular P_i y P_o, use la función SOLVE en el menú S.SLV (⬅ S.SLV), puede tomar a la calculadora un minuto para producir el resultado:

{['Pi=-(((σθ-σr)*r^2-(σθ+σr)*a^2)/(2*a^2))'
'Po=-(((σθ-σr)*r^2-(σθ+σr)*b^2)/(2*b^2))'] }, i.e.,



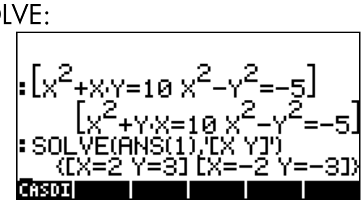
Note que el resultado incluye un vector [ ] contenido dentro de una lista { }. Para quitar el símbolo de la lista, use EVAL. Finalmente, para descomponer el vector, use la función OBJ→. El resultado es:



Estos dos ejemplos constituyen sistemas de ecuaciones lineales que se pueden resolver con la función LINSOLVE (ver el capítulo 11). El ejemplo siguiente muestra la función SOLVE aplicada a un sistema de ecuaciones polinómicas.

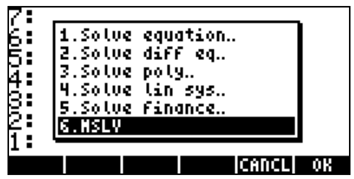
Ejemplo 3 - Sistema de ecuaciones polinómicas

La pantalla siguiente muestra la solución del sistema $X^2+XY=10$, $X^2-Y^2=-5$, usando la función SOLVE:

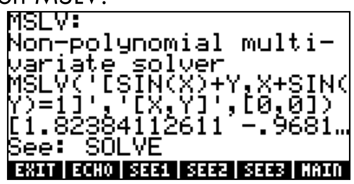


Solución a las ecuaciones simultáneas con MSLV

La función MSLV está disponible como la última opción en el menú
→ NUM.SLV :



La función informativa de la calculadora (TOOL NXT HELP) muestra la siguiente referencia para la función MSLV:

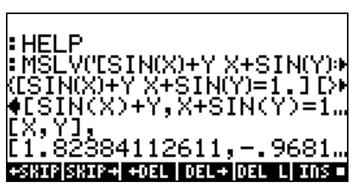


Ejemplo 1 - Ejemplo dado por la función informativa del CAS

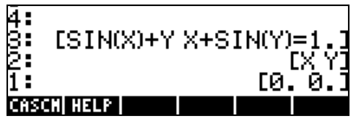
La función informativa del CAS presenta un ejemplo de la función MSLV según se mostró anteriormente. Obsérvese que la función MSLV requiere tres argumentos:

1. Un vector que contiene las ecuaciones, Vg., '[SIN(X)+Y,X+SIN(Y)=1]'
2. Un vector que contiene las incógnitas, Vg., '[X,Y]'
3. Un vector que contiene valores iniciales de la solución, Vg., los valores iniciales de X y Y son ambos cero en este ejemplo.

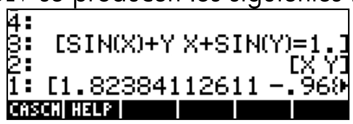
En modo ALG, presiónese ECHO para copiar el ejemplo a la pantalla, presiónese ENTER para ejecutar el ejemplo. Para ver todos los elementos de la solución, es necesario activar el editor de línea al presionar la tecla direccional vertical ▼ :



En modo RPN, la solución de este ejemplo requiere lo siguiente antes de activar MSLV:



Al activar la función MSLV se producen los siguientes resultados:



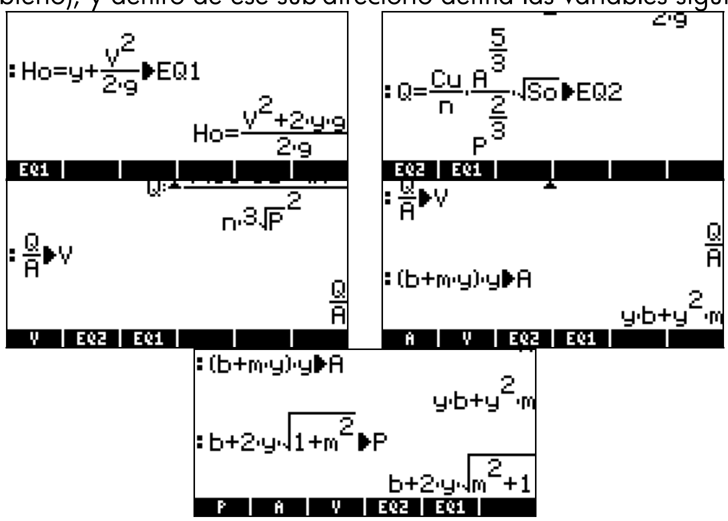
Se habrá observado que, mientras se produce la solución, la pantalla muestra información intermedia relacionada a la solución en la esquina superior izquierda. Como la solución proveída por la función MSLV es numérica, la información en la esquina superior izquierda muestra los resultados del proceso iterativo utilizado en la solución del sistema de ecuaciones. La solución producida por MSLV para este caso es *X = 1.8238, Y = -0.9681*.

Ejemplo 2 - Entrada de un lago a un canal abierto

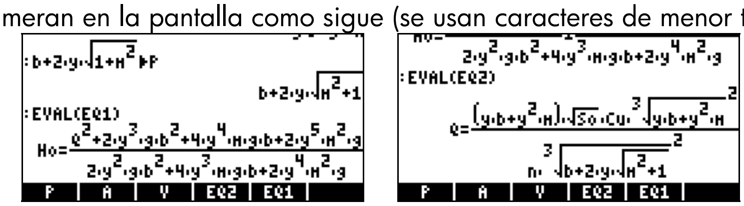
Este problema particular en flujo de canales abiertos requiere la solución simultánea de dos ecuaciones, la ecuación de la energía: $H_o = y + \frac{V^2}{2g}$, y la ecuación de Manning: $Q = \frac{Cu}{n} \cdot \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} \cdot \sqrt{S_o}$. En estas ecuaciones, H_o representa la altura de energía (m, o ft) disponible para un flujo en la entrada a un canal, y es la profundidad de flujo (m o ft), V = Q/A es la velocidad del flujo (m/s o ft/s), Q es la descarga volumétrica (m^3/s o ft^3/s), A es el área de la sección transversal (m^2 o ft^2), C_u es un coeficiente que depende del sistema de unidades (C_u = 1.0 en el sistema SI, C_u = 1.486 para el sistema de unidades inglés), n es el coeficiente de Manning, una medida de la rugosidad de la superficie del canal (por ejemplo, para una superficie de concreto u hormigón, n = 0.012), P es el perímetro mojado de la sección transversal (m o ft), S_o es la pendiente del fondo del canal expresada como fracción decimal. Para un canal trapezoidal, según lo demostrado abajo, el área se calcula con $A = (b + my)y$, mientras que el perímetro mojado se calcula con $P = b + 2y\sqrt{1+m^2}$, donde b es el ancho del fondo de la sección (m o ft), y m es la pendiente lateral (1V:mH) de la sección.

Típicamente, uno tiene que resolver las ecuaciones de la energía y de Manning simultáneamente para y y Q. Una vez que estas ecuaciones se escriban en términos de las variables primitivas b, m, y, g, S_o, n, Cu, Q, y H_o, tendremos un sistema de ecuaciones de la forma $f_1(y,Q) = 0$, $f_2(y,Q) = 0$. Podemos construir estas dos ecuaciones como sigue.

Asumimos que utilizaremos los modos ALG y Exact en la calculadora, aunque el definir las ecuaciones y solucionarlas con MSLV es muy similar en el modo RPN. Cree un sub-directorio, digamos CHANL (inglés, open CHANneL, o canal abierto), y dentro de ese sub-directorio defina las variables siguientes:

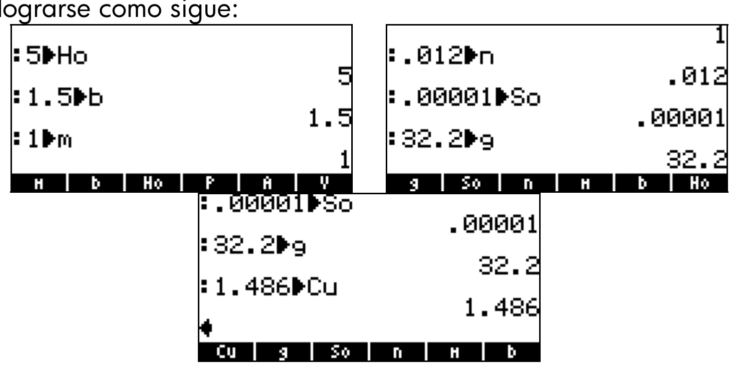


Para ver las ecuaciones originales, EQ1 y EQ2, en términos de las variables primitivas enumeradas arriba, podemos utilizar la función EVAL aplicada a cada una de las ecuaciones, es decir, EVAL EQ1 EVAL EQ2. Las ecuaciones se enumeran en la pantalla como sigue (se usan caracteres de menor tamaño):

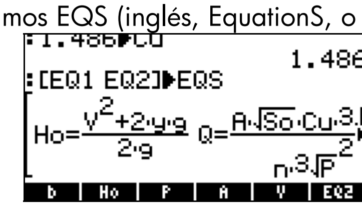


Podemos ver que estas ecuaciones están dadas de hecho en términos de las variables primitivas b, m, y, g, S_o, n, Cu, Q, y H_o.

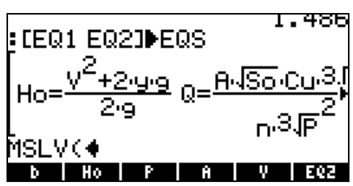
Para calcular y y Q necesitamos dar valores a las otras variables. Suponga que utilizamos H_0 = 5 ft, b = 1.5 ft, m = 1, n = 0.012, S_0 = 0.00001, g = 32.2, y Cu = 1.486. Antes de poder utilizar MSLV para la solución, necesitamos incorporar estos valores en las variables correspondientes. Esto puede lograrse como sigue:



Ahora, somos listos solucionar la ecuación. Primero, necesitamos poner las dos ecuaciones en un vector. Podemos hacer esto almacenando el vector en una variable que llamamos EQS (inglés, EquationS, o ecuaciones):



Como valores iniciales para las variables y y Q utilizaremos y = 5 (igual al valor de H_o, cuál es el valor máximo que y puede tomar) y Q = 10 (esto es una conjetura). Para obtener la solución seleccionamos la función MSLV del menú NUM.SLV, es decir, → NUM.SLV 6 OK, para copiar la instrucción a la pantalla:

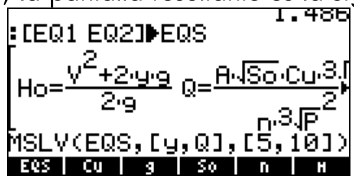


Después, escribimos la variable EQS: NXT NXT EQS, seguido del vector [y,Q]:

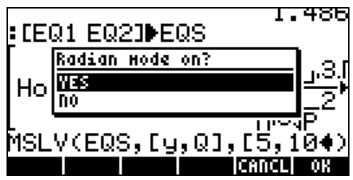
→ [ ] , ALPHA ← Y → , ALPHA Q ▶

y de la conjetura → [ ] 5 → , 1 0 .

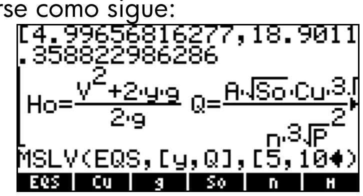
Antes de presionar ENTER, la pantalla resultante es la siguiente:



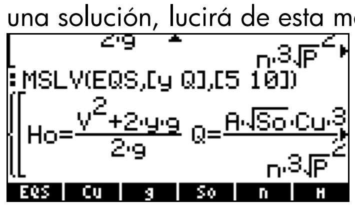
Presione ENTER para resolver el sistema de ecuaciones. Si la medida angular no está fija a radianes, la calculadora puede solicitar cambio a esa medida angular, como sigue:



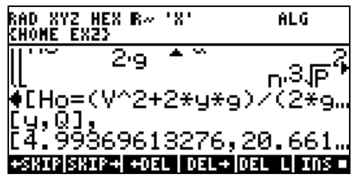
Presione OK y permita que la solución proceda. Un paso intermedio de la solución puede mostrarse como sigue:



El vector en la parte superior de la pantalla muestra [y,Q] a medida que progresa la solución, y el valor.358822986286 representando el criterio de convergencia del método numérico usado en la solución. Si el sistema se plantea bien, este valor disminuirá hasta alcanzar un valor cerca de cero. En ese punto una solución numérica se habrá encontrado. La pantalla, después de que MSLV encuentre una solución, lucirá de esta manera:



El resultado es una lista de tres vectores. El primer vector en la lista será las ecuaciones resueltas. El segundo vector es la lista de incógnitas. El tercer vector representa la solución. Para poder ver estos vectores, presione la tecla ▽ que activa el editor de línea. La solución será mostrada como sigue:



La solución sugerida es [4.9936.., 20.661…]. Esto significa, y = 4.99 ft, y Q = 20.661… ft^3/s. Usted puede utilizar las teclas (◁ ▷ △ ▽) para ver la solución detalladamente.

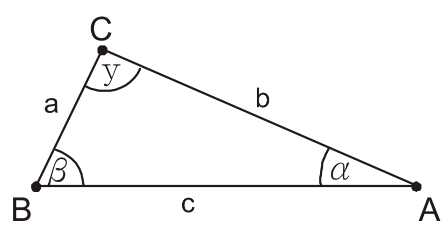
Usando el Multiple Equation Solver (MES)

El MES (inglés, multiple equation solver, o solución de ecuaciones múltiples) es un ambiente donde usted puede resolver un sistema de ecuaciones múltiples usando una ecuación a la vez. No es realmente una solución simultánea, si no, una solución consecutiva de ecuaciones. Para ilustrar el uso del MES para la solución de ecuaciones múltiples presentamos una aplicación relacionada con la trigonometría en la sección siguiente. Los ejemplos demostrados aquí se desarrollan en el modo de RPN.

Aplicación 1 - Solución de triángulos

En esta sección utilizamos una aplicación importante de funciones trigonométricas: calcular las dimensiones de un triángulo. La solución se pone en ejecución al usar el MES.

Considere el triángulo ABC mostrado en la figura siguiente.



La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es siempre 180°, es decir, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. La ley de los senos indica que:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

La ley de los cosenos indica que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Para resolver cualquier triángulo, usted necesita conocer por lo menos tres de las seis variables siguientes: $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$. Entonces, usted puede utilizar las ecuaciones de la ley de los seno, ley de los cosenos, y la suma de ángulos interiores de un triángulo, para calcular las otras tres variables.

Si se conocen los tres lados, el área del triángulo se puede calcular con la fórmula de Herón: $A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$, donde s se conoce como el semi-perímetro del triángulo, es decir, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Solución del triángulo usando el MES

El MES es un ambiente que se puede utilizar para solucionar ecuaciones acopladas. Debe indicarse, sin embargo, que el MES no soluciona las ecuaciones simultáneamente. Sino que toma las variables conocidas, y después busca en una lista de ecuaciones hasta que encuentra una que se puede resolver para una de las variables desconocidas. Entonces, busca otra ecuación que se pueda resolver para las incógnitas siguientes, etcétera, hasta que todos las incógnitas se hayan resuelto.

Crear un directorio de trabajo

Utilizaremos el MES para la solución de triángulos creando una lista de las ecuaciones que corresponden a los leyes de los senos y de los coseno, la ley de la suma de ángulos interiores, y la fórmula de Herón para el área.

Primero, cree un sub-directorio dentro del directorio HOME que llamaremos TRIANG, y active ese directorio. Vea el capítulo 2 para las instrucciones en cómo crear un nuevo sub-directorio.

Escribir la lista de ecuaciones

Dentro del sub-directorio TRIANG, escriba la lista siguiente de ecuaciones directamente en la pantalla o usando el escritor de ecuaciones. (Recuerde que ALPHA ↱ A produce el caracter α, y ALPHA ↱ B produce el caracter β. El caracter γ necesita ser copiado (ECHO) de la pantalla ↱ CHARS):

'SIN(α)/a = SIN(β)/b'
'SIN(α)/a = SIN(γ)/c'
'SIN(β)/b = SIN(γ)/c'
'c^2 = a^2+b^2-2*a*b*COS(γ)'
'b^2 = a^2+c^2-2*a*c*COS(β)'
'a^2 = b^2+c^2-2*b*c*COS(α)'
'α+β+γ = 180'
's = (a+b+c)/2'
'A = √ (s*(s-a)*(s-b)*(s-c))'

A continuación, escriba 9, y crear una lista de ecuaciones usando la función →LIST (use el catálogo de funciones ↱ CAT). Almacene esta lista en la variable EQ.

La variable EQ contiene la lista de las ecuaciones que serán exploradas por el MES al intentar calcular las incógnitas.

Escribiendo el título de la pantalla

Después, crearemos una variable de caracteres que se llamará TITLE que contenga el texto "Triangle Solution", como sigue:

↱ ""	Abrir comillas
ALPHA ALPHA ↰ ALPHA	Asegurar teclado en minúsculas
↰ T R I A N G L E SPC	Escribir texto: Triangle_
↰ S O L U T I O N	Escribir texto: Solution
ENTER	Incorporar "Triangle Solution" al stack
'	Abrir apóstrofes

ALPHA ALPHA T I T L E ENTER Escribir 'TITLE'
STO▶ Almacenar texto en 'TITLE'

Crear una lista de variables

Después, crear una lista de nombres variables en la pantalla que luzca así:

{ a b c α β γ A s }

y almacénela en la variable LVARI (Lista de VARIables). La lista de variables representa el orden en la cual las variables serán listadas cuando el MES se active. Debe incluir todas las variables en las ecuaciones, o no trabajará con la función MITM (véanse las siguientes secciones).

Presione VAR, si es necesario, para recobrar el menú de variables. Su menú debe mostrar las variables LVARI TITLE EQ .

Preparación para activar el MES

El paso siguiente es activar el MES e intentar una solución de prueba. Antes de que hagamos que, sin embargo, deseamos fijar las unidades angulares a DEG (grados), si no han sido seleccionadas previamente, usando:

ALPHA ALPHA D E G ENTER .

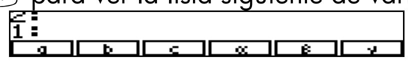
Después, deseamos mantener en la pantalla el contenido de las variables TITLE y LVARI, usando: TITLE LVARI

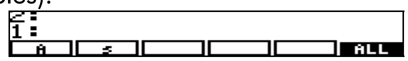
Utilizaremos las funciones siguientes del MES

- MINIT: (inglés, MES INITialization): inicializa las variables en las ecuaciones almacenadas en EQ.
- MITM: (inglés, MES' Menu Item): Toma un título en nivel 2 de la pantalla y la lista de variables del nivel 1 y coloca el título encima de la pantalla del MES, y la lista de variables como teclas del menú en el orden indicado por la lista. En el actual ejercicio, tenemos ya un título ("Triangle Solution") y una lista de variables ({ a b c α β γ A s }) en los niveles 2 y 1, respectivamente, listos para activar MITM.
- MSOLVR: (inglés, MES SOLVER); activa el Multiple Equation Solver (MES) y aguarda la interacción con el usuario.

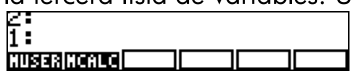
Activando el MES interactivamente
Para activar el MES, con las variables TITLE y LVARI listadas en la pantalla, active la instrucción MINIT, seguida de MITM, y finalmente, MSOLVR (estas funciones se localizan en el catálogo de las funciones [↱] _CAT).

El MES se activa con la lista siguiente de las variables disponibles (Presione [NXT] para ver la lista siguiente de variables):





Presione [NXT] para ver la tercera lista de variables. Usted debe ver:

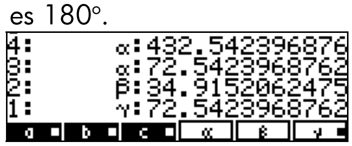


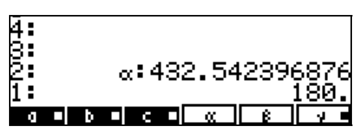
Presione [NXT] una vez más para recuperar el primer menú variable.

Intentemos una solución simple, usando a = 5, b = 3, c = 5. Use lo siguiente:
[5][a] a:5 se lista en la esquina superior izquierda.
[3][b] b:3 se lista en la esquina superior izquierda.
[5][c] c:5 se lista en la esquina superior izquierda.
Para calcular los ángulos use:
[↰][α] Se reporta una solución α: 72.5423968763.

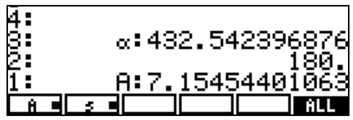
Nota: Si usted consigue un valor que sea mayor que 180, use lo siguiente:	
[1][0][α]	Re-inicializar a un valor más pequeño.
[↰] [α]	Se reporta una solución

Después, calculamos los otros dos valores:
[↰] [β] El resultado es β: 34.9152062474 .
[↰] [γ] El resultado es γ: 72.5423968763.
Usted debe tener los valores de los tres ángulos enumerados en los niveles 3 a 1 de la pantalla. Presione [+], dos veces, para comprobar que de hecho la suma es 180°.



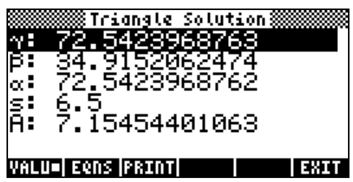


Presione NXT para moverse al menú siguiente de las variables. Para calcular el área use: ← [A]. La calculadora primero soluciona para el resto de variables, y enseguida encuentra el área como A: 7.15454401063.



Nota: Cuando se encuentra una solución, la calculadora divulga las condiciones para la solución ya sea como Zero (cero, o raíz), o Sign Reversal (cambio de signo). Otros mensajes pueden ocurrir si la calculadora tiene dificultades el encontrar de una solución.

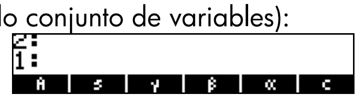
Presione ← ALL para calcular todas las variables, demostrando temporalmente los resultados intermedios. Presione → ALL para ver las soluciones:



Al terminar, presione ON para volver al ambiente MES. Presione VAR para salir del ambiente de MES y volver a la pantalla normal de la calculadora.

Organizando las variables en el sub-directorio

Su menú variable ahora contendrá las variables (presione NXT para ver el segundo conjunto de variables):



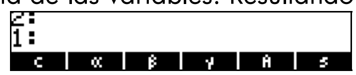
Las variables que corresponden a todas las variables en las ecuaciones en EQ se han creado. Hay también una nueva variable llamada *Mpar* (MES parameters), la cuál contiene la información con respecto a la creación del MES para este sistema particular de ecuaciones. Si Ud. usa → Mpar para ver el contenido de la variable Mpar, Usted recibirá el mensaje críptico: Library Data (datos de biblioteca). El significado de esto es que los parámetros del MES están cifrados en un archivo binario, que no se puede acceder con el editor de línea.

Después, deseamos colocarlos las etiquetas del menú en un orden diferente al que fue enumerado anteriormente, a través de los siguientes pasos:

1. Crear la lista { EQ Mpar LVARI TITLE }, usando:

   [←] {} EQ Mpar LVARI TITLE [ENTER]

2. Coloque el contenido de LVARI en la pantalla, usando: LVARI.
3. Ensamblar las dos listas presionando [+].
4. Use la función ORDER (use el catálogo de funciones, [→] CAT) para ordenar las variables según lo demostrado en la lista en el nivel 1.
5. Presione [VAR] para recuperar su lista de las variables. Resultando en:



5. Presione [NXT] para recuperar el primer menú de variables.

UserRPL de solución de triángulos con el MES

Para facilitar la activación del MES para soluciones futuras, crearemos un programa que cargue el MES con una sola tecla. El programa es el siguiente: << DEG MINIT TITLE LVARI MITM MSOLVR >>, y puede escribirse usando:

[→] « »	Abrir símbolos de programa
[ALPHA] [ALPHA]	Asegurar teclado en alpha
[D] [E] [G] [SPC]	Escribir DEG (grados)
[M] [I] [N] [I] [T] [SPC]	Escriba MINIT
[ALPHA]	Liberar teclado
TITLE	Listar la palabra TITLE
LVARI	Listar la palabra LVARI
[ALPHA] [ALPHA]	Asegurar teclado en alpha
[M] [I] [T] [M] [SPC]	Escribir MITM_
[M] [S] [O] [L] [V] [R]	Escribir MSOLVR
[ENTER]	Pasar programa a la pantalla

Almacenar el programa en un variable llamada TRISOL, (inglés, TRIangle SOLution, o solución de triángulos) , usando:

['] [ALPHA] [ALPHA] [T] [R] [I] [S] [O] [L] [ENTER] [STO▸]

Presione [VAR], de ser necesario, para recuperar su lista de variables. Una tecla llamada [TRISO] estará disponible en su menú.

Activando el programa - ejemplos de solución

Para activar el programa, presione la tecla [TRISO]. Usted ahora tendrá disponible el menú MES correspondiente a la solución de triángulos. Intentaremos ejemplos de tres casos para la solución del triángulo.

Ejemplo 1 - Triángulo recto

Use a = 3, b = 4, c = 5. Aquí está la secuencia de la solución:

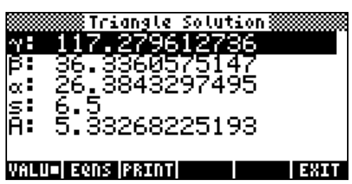
[3][a][4] [b][5][c]	Escriba los datos
[←][α]	El resultado es α: 36.8698976458
[←][β]	El resultado es β: 53.1301023541.
[←][γ]	El resultado es γ: 90.
[NXT]	Para moverse al menú siguiente
[←][A]	El resultado es A: 6.
[NXT] [NXT]	Para moverse al menú siguiente

Ejemplo 2 - Cualquier tipo de triángulo

Use a = 3, b = 4, c = 6. El procedimiento de solución usado aquí consiste en calcular todas las variables inmediatamente, y después recuperarlas en la pantalla:

[VAR] [TRISO]	Para activar el MES
[3][a][4] [b][6][c]	Escriba los datos
[NXT]	Para moverse al menú siguiente
[←] [ALL]	Solucionar para todos las incógnitas
[→] [ALL]	Muestra la solución

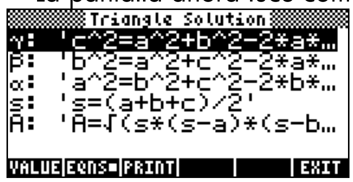
La solución es:



Las siguientes teclas estarán disponibles en la pantalla :

[VALU▪] [EQNS] [PRINT] [ ] [ ] [EXIT]

El punto cuadrado en VALU■ indica que los valores de las variables, más bien que las ecuaciones de las cuales se obtienen, estarán mostrados en la pantalla. Para ver las ecuaciones usadas en la solución de cada variable, presione la tecla EQNS . La pantalla ahora luce como ésta:



La tecla PRINT se utiliza para imprimir la pantalla en una impresora, si ésta está disponible. La tecla EXIT regresa al ambiente MES para una nueva solución, de ser necesario. Para volver a la pantalla normal de la calculadora, presione VAR.

La tabla siguiente de las soluciones del triángulo demuestra los datos de entrada en letra negrilla y la solución en itálica. Intente activar el programa con estos datos para verificar las soluciones. Recuerde presionar VAR TRISO al final de cada solución para re-inicializar variables y comenzar la solución MES de nuevo. Si no, usted puede pasar información de la solución anterior que puede afectar sus cálculos actuales.

a	**b**	**c**	$\alpha(^o)$	$\beta(^o)$	$\gamma(^o)$	**A**
2.5	*6.9837*	**7.2**	*20.299*	**75**	*84.771*	*8.6933*
7.2	**8.5**	*14.26*	*22.616*	**27**	*130.38*	*23.309*
21.92	**17.5**	**13.2**	**90**	*52.97*	**37.03**	*115.5*
41.92	**23**	*29.6*	**75**	**32**	*73*	*328.81*
10.27	*3.26*	**10.5**	*77*	**18**	**85**	*16.66*
17	**25**	**32**	*31.79*	*50.78*	*97.44*	*210.71*

Adición de una tecla informativa a su directorio

Una tecla informativa puede ser útil para ayudarle a recordar la operación de las funciones en el directorio. En este directorio, todo lo que necesitamos recordar es que debemos presionar TRISO para comenzar una solución de triángulo.Escriba el programa siguiente: <<"Presione [TRISO] para empezar."

MSGBOX >>, y almacénelo en un variable llamada INFO. Consecuentemente, la primera variable en su directorio será la tecla.

Aplicación 2 - Velocidad y aceleración en coordenadas polares

El movimiento bidimensional de una partícula en coordenadas polares implica a menudo el determinar las componentes radiales y transversales de la velocidad y de la aceleración de la partícula dados r, r′ = dr/dt, r″ = d^2r/dt^2, θ, θ′ = d θ /dt, y, θ″ = $d^2\theta/dt^2$. Se utilizan las ecuaciones siguientes:

$$v_r = \dot{r} \qquad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Cree un sub-directorio llamado POLC (inglés, POLar Coordinates), cuál utilizaremos calcular velocidades y aceleraciones en coordenadas polares. Dentro de ese sub-directorio, incorporar las variables siguientes:

Programa o valor	En la variable:
<< PEQ STEQ MINIT NAME LIST MITM MSOLVR >>	**SOLVEP**
"vel. & acc. polar coord."	**NAME**
{ r rD rDD θD θDD vr vθ v ar aθ a }	**LIST**
{ 'vr = rD' 'vθ = r*θD' 'v = √(vr^2 + vθ^2)' 'ar = rDD – r*θD^2' 'aθ = r*θDD + 2*rD*θD' 'a = √(ar^2 + aθ^2)' }	**PEQ**

Una explicación de las variables sigue:

SOLVEP = un programa que activa el MES para el sistema particular de ecuaciones almacenado en variable **PEQ**;

NAME = una variable que almacena el nombre del MES, a saber, *"vel. & acc. polar coord."*;

LIST = una lista de las variable usada en los cálculos, puestas en el orden de aparición requerido en el MES;

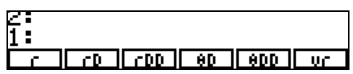
PEQ = lista de las ecuaciones que se solucionarán, correspondiendo a los componentes radiales y transversales de la velocidad (**vr**, **v**θ) y aceleración (**ar**, **a**θ) en coordenadas polares, así como las ecuaciones para calcular la magnitud de la velocidad (**v**) y de la aceleración (**a**) cuando se conocen las componentes polares.

r, **rD**, **rDD** = r (coordenada radial), r-punto (primera derivada de r), r-dos puntos (segunda derivada de r).

θ**D**, θ**DD** = θ-punto (primera derivada de θ), θ-dos puntos (segunda derivada de θ).

Suponer que le dan la información siguiente: r = 2.5, rD = 0.5, rDD = -1.5, θD = 2.3, θDD = -6.5, y le piden encontrar vr, vθ, ar, aθ, v, y a.

Comenzar el MES presionando VAR SOLVE. La calculadora produce una pantalla etiquetada, *"vel. & acc. polar coord."*, que se muestra a continuación:

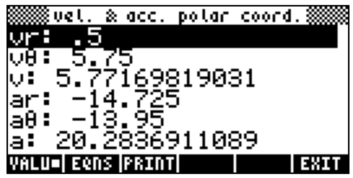


Para incorporar los valores de las variables conocidas, escriba el valor y presione la tecla que corresponde a la variable que se entrará. Utilizar lo siguiente: 2.5 [r] 0.5 [rD] 1.5 +/- [rDD] 2.3 [θD] 6.5 +/- [θDD].

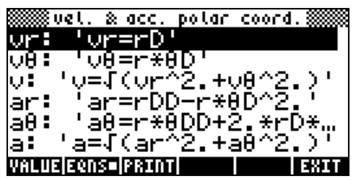
Note que después de que usted incorpore un valor particular, la calculadora exhibe la variable y su valor en la esquina izquierda superior de la pantalla. Ahora hemos incorporado las variables conocidas. Para calcular las incógnitas podemos proceder de dos maneras:

a). Calcular variables individuales, por ejemplo, ← [vr] produce vr: 0.500. Presione NXT ← [vθ] para obtener vθ : 5.750 , etcétera. Los resultados restantes son v: 5.77169819031; *a*r: -14.725; *a*θ: -13.95; y *a*: 20.2836911089.; o,

b). Calcular todas las variables inmediatamente, presionando ← ALL. La calculadora mostrará brevemente las soluciones a medida que las encuentra. Cuando la calculadora para, usted puede presionar ↱ ALL para enumerar todos los resultados. Para este caso tenemos:

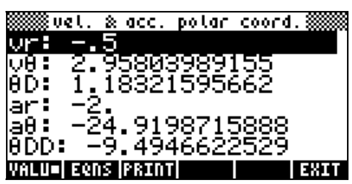


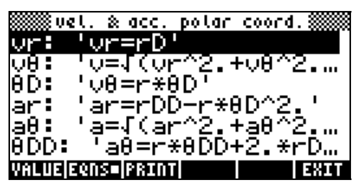
Presione la tecla de menú EQNS para ver las ecuaciones usadas para cada una de las soluciones en la pantalla:



Para utilizar un nuevo conjunto de valores presione, ya sea EXIT ALL NXT NXT, o VAR SOLVE.

Intentemos otro ejemplo usando r = 2.5, vr = rD = -0.5, rDD = 1.5, v = 3.0, a = 25.0. Encuentre θD, θDD, vθ, ar, y aθ. Usted debe obtener los resultados siguientes:





Capítulo 8
Operaciones con listas

Las listas son un tipo de objeto utilizado por la calculadora que tienen mucha utilidad en el procesamiento de datos. En este Capítulo se presentan ejemplos de operaciones con listas.

Definiciones

Una lista, dentro del contexto de la calculadora, está una serie de objetos incluidos entre llaves y separados por los espacios (SPC), en el modo RPN, o comas (→ ,), en ambos modos. Los objetos que se pueden incluir en una lista son números, letras, cadenas de caracteres, nombres variables, y/o operadores. Las listas son útiles para manipular datos y en algunos usos de programación. Algunos ejemplos de listas son:{ t 1 }, {"BETA" h2 4},{1 1.5 2.0},
{a a a a},{ {1 2 3} {3 2 1} {1 2 3}}

En los ejemplos mostrados a continuación nos limitaremos a las listas numéricas.

Creando y almacenando listas

Para crear una lista en modo ALG, escríbanse primero las llaves ← {} , a continuación escríbanse los elementos de la lista, separados por comas (→ ,).   En el siguiente ejemplo se escribe la lista {1 2 3 4} y se almacena en la variable L1.

← {} 1 → , 2 → , 3 → , 4
▶ STO▶ ALPHA L 1 ENTER

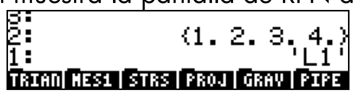
La pantalla mostrará el siguiente:

La figura a la izquierda muestra la pantalla antes de presionar ENTER, mientras que la de la derecha muestra la pantalla después de almacenar la lista en L1. Nótese que antes de presionar ENTER la lista muestra las comas que separan

sus elementos. Sin embargo, después de presionar ENTER, las comas se substituyen por los espacios.
Para crear y almacenar la misma lista en modo RPN utilícese:

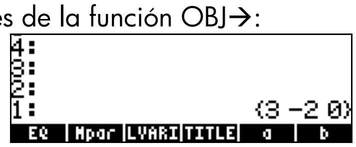
← {} 1 SPC 2 SPC 3 SPC 4 ENTER
ALPHA L 1 ENTER ▶ STO▶

La figura a continuación muestra la pantalla de RPN antes de presionar STO▶:



Composición y descomposición de listas

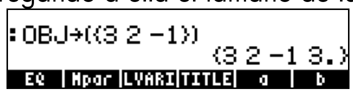
La composición y descomposición de listas tiene sentido en modo RPN solamente. Bajo tal modo operativo, la descomposición de una lista es alcanzada usando la función OBJ→. Con esta función, una lista en la pantalla de RPN se descompone en sus elementos, con el nivel de la pantalla 1: mostrando el número de elementos en la lista. Los dos tiros siguientes de la pantalla muestran la pantalla con un uso pequeño de la lista antes y después de la función OBJ→:



Nótese que, después de aplicar OBJ→, los elementos de la lista ocupan niveles 4: a 2:, mientras que el nivel 1: muestra el número de elementos en la lista.

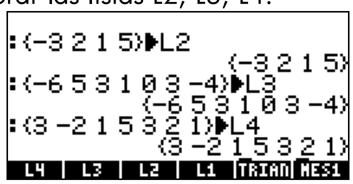
Para componer una lista en modo RPN, poner los elementos de la lista en la pantalla, incorporar el tamaño de la lista, y aplicar la función →LIST (seleccionarlo del catálogo de funciones, como sigue: ↱ CAT ↱ →, después use ▲▼ para localizar la función →LIST). Los tiros siguientes de la pantalla muestran los elementos de una lista del uso del tamaño 4 antes y después de la función →LIST:

Nota: La función OBJ→ aplicado a una lista en modo ALG reproduce simplemente la lista, agregando a ella el tamaño de la lista:



Operaciones con listas de números

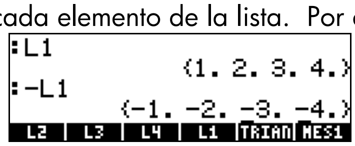
Para demostrar operaciones con las listas de números, crearemos un par de otras listas, además de la lista L1 creada anteriormente: L2={-3,2,1,5}, L3={-6,5,3,1,0,3,-4}, L4={3,-2,1,5,3,2,1}. En modo ALG, la pantalla parecerá esto después de incorporar las listas L2, L3, L4:



En modo RPN, la pantalla siguiente muestra las tres listas y sus nombres listos ser almacenado. Para almacenar las listas en este caso usted necesita presionar STO▶ tres veces.

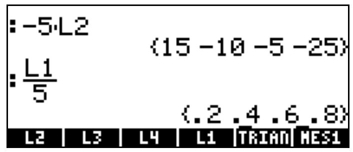
Cambio de signo

Cuando se aplica la tecla de cambio de signo (+/-) a una lista de números, se cambia el signo de cada elemento de la lista. Por ejemplo:

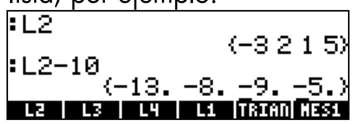


Adición, substracción, multiplicación, y división

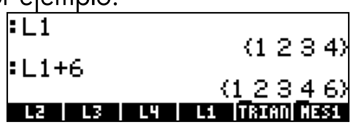
La multiplicación o división de una lista por un número real se distribuye miembro a miembro de la lista, por ejemplo:



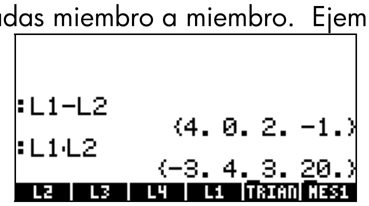
La substracción de un número de una lista se interpreta sustrayendo el número de cada elemento de la lista, por ejemplo:

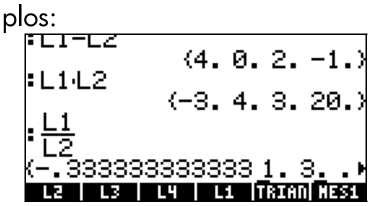


La adición de un número a una lista produce una lista con un elemento adicional (el número adicionado), y no la adición del número a cada elemento de la lista. Por ejemplo:

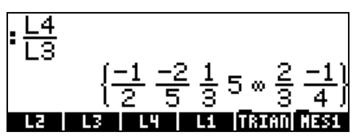


Substracción, multiplicación, y división de listas de números del mismo tamaño resulta en una lista del mismo tamaño con las operaciones respectivas ejecutadas miembro a miembro. Ejemplos:



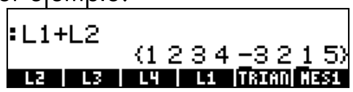


La división L4/L3 producirá un resultado infinito porque uno de los elementos en la lista L3 es cero.

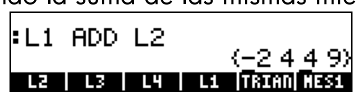


Si las listas involucradas en una operación tienen tamaños diferentes, se produce un mensaje de error (Invalid Dimensions, dimensiones incompatibles).

El signo de suma (+), cuando se aplica a listas, produce un operador de *concatenación* que liga o concatena dos listas, en vez de sumar los elementos miembro a miembro. Por ejemplo:



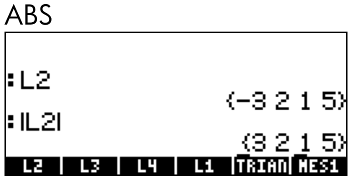
Para forzar la adición de dos listas del mismo tamaño miembro a miembro, es necesario utilizar el operador o función ADD (sumar). Este operador puede activarse utilizando el catálogo de funciones (→ CAT). La pantalla que se muestra a continuación muestra la aplicación del operador ADD a las listas L1 y L2, produciendo la suma de las mismas miembro a miembro:



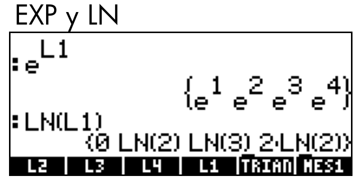
Funciones de números reales en el teclado

Las funciones de número reales en el teclado (ABS, e^x, LN, 10^x, LOG, SIN, x^2, √, COS, TAN, ASIN, ACOS, ATAN, y^x) pueden aplicarse a listas. He aquí algunos ejemplos:

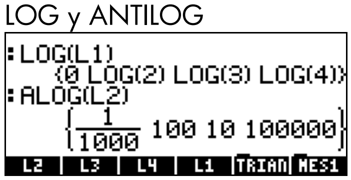
ABS



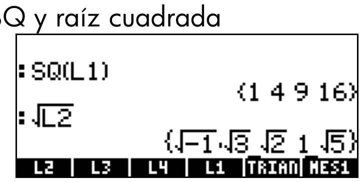
EXP y LN



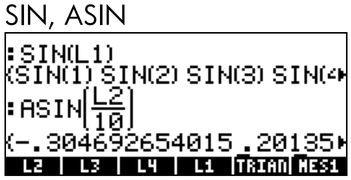
LOG y ANTILOG



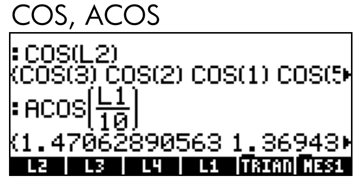
SQ y raíz cuadrada



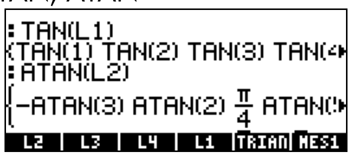
SIN, ASIN



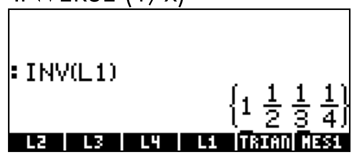
COS, ACOS



TAN, ATAN



INVERSE (1/x)

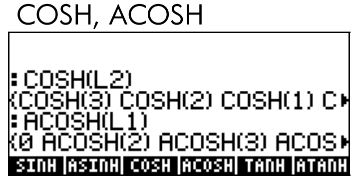


Funciones de números reales del menú de MTH

Las funciones de interés en el menú MTH incluyen, del menú HYPERBOLIC: SINH, ASINH, COSH, ACOSH, TANH, ATANH, y del menú REAL: %, %CH, %T, MIN, MAX, MOD, SIGN, MANT, XPON, IP, FP, RND, TRNC, FLOOR, CEIL, D→R, R→D. Algunas de las funciones que toman un solo argumento se ilustran a continuación se aplicaron a las listas de números verdaderos:

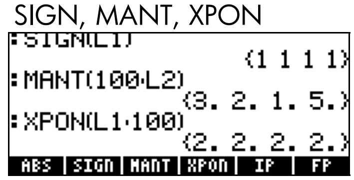
SINH, ASINH

COSH, ACOSH

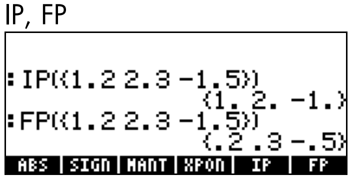


TANH, ATANH

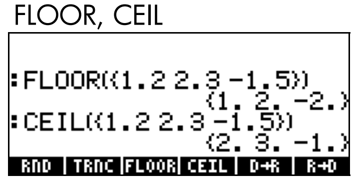
SIGN, MANT, XPON



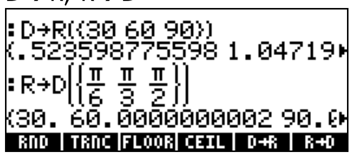
IP, FP



FLOOR, CEIL

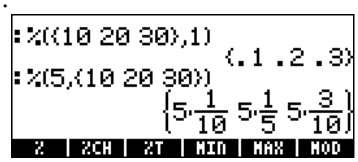


D→R, R→D



Ejemplos de las funciones que utilizan dos argumentos

Las pantallas debajo de los usos de la demostración de la función % a argumentos listas. La función % requiere dos argumentos. Los primeros dos ejemplos muestran los casos en los cuales solamente uno de los dos argumentos es una lista.



Los resultados son listas con la función % distribuida según el argumento lista. Por ejemplo,

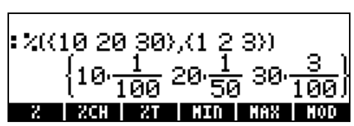
%({10, 20, 30},1) = {%(10,1),%(20,1),%(30,1)},

mientras que

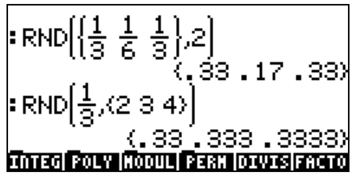
%(5,{10,20,30}) = {%(5,10),%(5,20),%(5,30)}

En el ejemplo siguiente, ambos argumentos de la función % son listas del mismo tamaño. En este caso, una distribución del término-por-término de los argumentos se lleva a cabo, es decir,

%({10,20,30},{1,2,3}) = {%(10,1),%(20,2),%(30,3)}

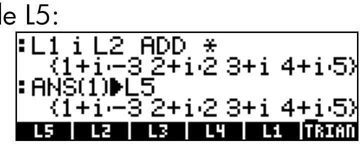


Esta descripción de la función % para argumentos listas muestran el patrón general de la evaluación de cualquier función con dos argumentos cuando una o ambos argumentos son listas. Ejemplos de aplicaciones de la función RND se muestran a continuación:

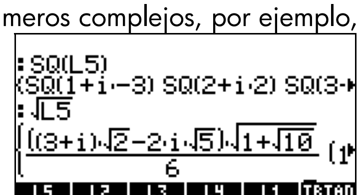


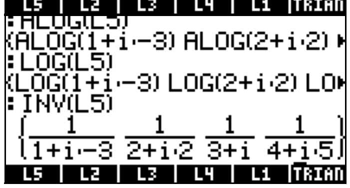
Listas de números complejos

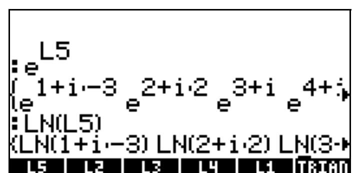
El ejercicio siguiente muestra cómo crear una lista de números complejos dadas dos listas de la misma longitud, una que representa las partes reales y una las partes imaginarias de los números complejos. Use L1 ADD i*L2. La pantalla también muestra que la lista del complejo-número que resulta está almacenada en variable L5:

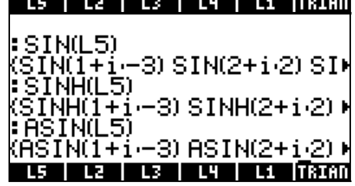


Funciones tales como LN, EXP, SQ, etc., pueden aplicarse también a una lista de números complejos, por ejemplo,

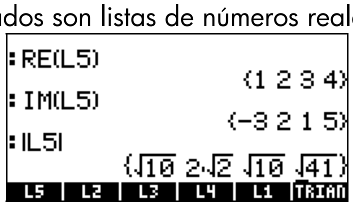


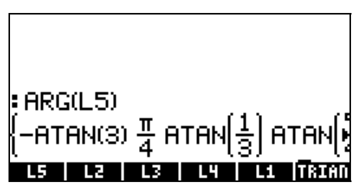






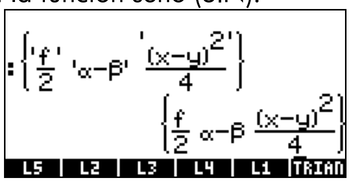
El ejemplo siguiente muestra los usos de las funciones RE(Parte real), IM(parte imaginaria), ABS(magnitud), y ARG(argumento) de números complejos. Los resultados son listas de números reales:

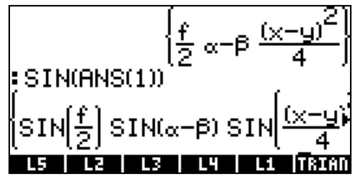




Listas de objetos algebraicos

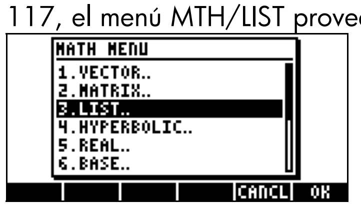
Los siguientes son ejemplos de listas de objetos algebraicos a los que se aplica la función seno (SIN):

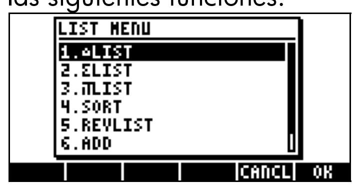




El menú MTH/LIST

El menú MTH provee un número de funciones que se aplican exclusivamente a las listas. Con la opción CHOOSE boxes activa en la señal de sistema número 117, el menú MTH/LIST provee las siguientes funciones:



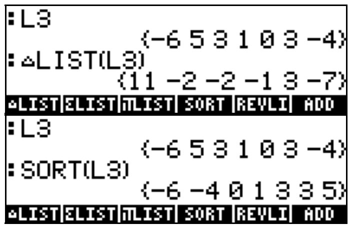


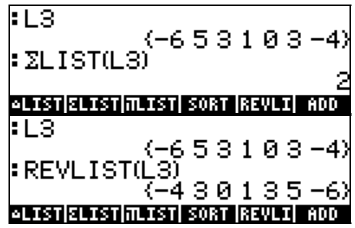
Con la opción SOFT menús activa en la señal de sistema número 117, el menú MTH/LIST provee las siguientes funciones:

Este menú contiene las funciones siguientes:

ΔLIST	:	Calcula el incremento entre elementos consecutivos en la lista
ΣLIST	:	Calcula la suma de los elementos en la lista
ΠLIST	:	Calcula el producto de los elementos en la lista
SORT	:	Ordena los elementos de la lista en orden creciente
REVLIST	:	Invierte el orden de los elementos en la lista
ADD	:	Produce la suma miembro a miembro de dos listas del mismo tamaño (ejemplos de esta función se presentaron anteriormente)

Algunos ejemplos de aplicación de estas funciones en modo ALG se muestra a continuación:

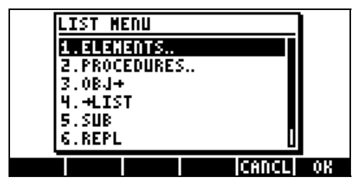




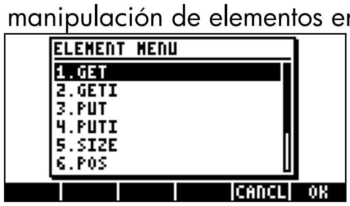
Las funciones SORT y REVLIST se pueden combinar para ordenar una lista en orden decreciente:

Manipulando elementos de una lista

El menú de PRG (programación) incluye un sub-menú LIST con un número de funciones para manipular elementos de una lista. Con la bandera de sistema 117 fija a CHOOSE boxes:

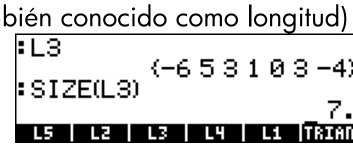


Item 1. ELEMENTS.. contiene las funciones siguientes que se pueden utilizar para la manipulación de elementos en listas:



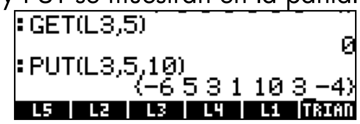
Tamaño de la lista

La función SIZE, del sub-menú PRG/LIST/ELEMENTS, puede ser utilizado obtener el tamaño (también conocido como longitud) de la lista, por ejemplo,



Extrayendo e insertando elementos en una lista

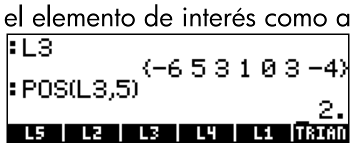
Para extraer elementos de una lista utilizamos la función GET, disponible en el sub-menú PRG/LIST/ELEMENTS. Los argumentos de la función GET son la lista y el número del elemento que usted desea extraer. Para insertar un elemento en una lista utilizar la función PUT (también disponible en el sub-menú PRG/LST/ELEMENTS). Las argumentos de la función PUT son la lista, la posición que una desea sustituir, y el valor que será substituido. Ejemplos de usos de funciones GET y PUT se muestran en la pantalla siguiente:



Las funciones GETI y PUTI, también disponibles en el sub-menú PRG/ ELEMENTS/, puede ser utilizadas para extraer e incluir elementos en una lista. Estas dos funciones, sin embargo, son útiles principalmente en la programación. La función GETI utiliza los mismos argumentos que GET y produce la lista, la localización del elemento más uno, y el elemento en la localización solicitada. La función PUTI utiliza los mismos argumentos que GET y produce la lista y el tamaño de la lista.

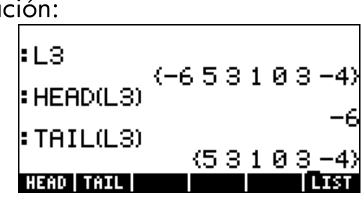
Posición del elemento en la lista

Para determinar la posición de un elemento en una lista utilizar la función POS que tiene la lista y el elemento de interés como argumentos. Por ejemplo,



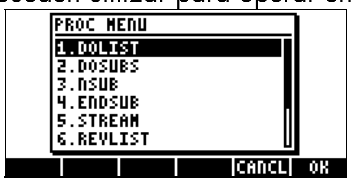
Funciones HEAD (cabeza) y TAIL (cola)

La función HEAD extrae el primer elemento en la lista. La función TAIL quita el primer elemento de una lista, y provee la lista restante. Algunos ejemplos se muestran a continuación:



La función SEQ

Item 2. PROCEDURES.. en el menú PRG/LIST contiene las funciones siguientes que se pueden utilizar para operar en listas.

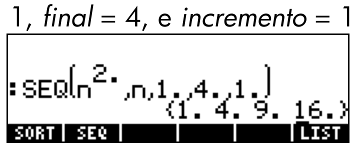


Las funciones REVLIST y SORT fueron introducidos anteriormente como parte del menú MTH/LIST. Las funciones DOLIST, DOSUBS, NSUB, ENDSUB, y STREAM, se diseñan como funciones de programación para las listas de funcionamiento en el modo RPN. La función SEQ es útil para producir una lista de los valores dados una expresión particular y se describe más detalladamente aquí.

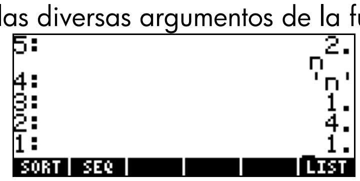
La función SEQ toma como argumentos una expresión en términos de un índice, del nombre del índice, y valores inicial, final, e incremento del índice, y produce una lista que consiste en la evaluación de la expresión para todos los valores posibles del índice. La forma general de la función es

SEQ(*expresión, índice, inicial, final, incremento*).

En el ejemplo siguiente, en modo ALG, identificamos lo siguiente: *expresión* = n^2, *índice* = n, *inicial* = 1, *final* = 4, e *incremento* = 1:



La lista producida corresponde a los valores {1^2, 2^2, 3^2, 4^2}. En modo RPN, usted puede enumerar las diversas argumentos de la función como sigue:

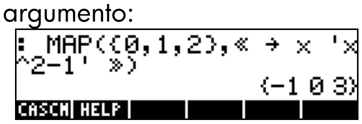


antes de aplicar la función SEQ.

La función MAP

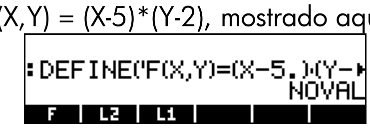
La función MAP, disponible a través del catálogo del comando (CAT), tomas como argumentos una lista de números y una función f(X) o un programa de la forma << → a … >>, y produce una lista que consiste en la aplicación de la función f o del programa a la lista de números. Por ejemplo, la llamada siguiente a la función MAP aplica la función SIN(X) a la lista {1,2,3}:

La llamada siguiente a la función MAP utiliza un programa en vez de una función como segundo argumento:

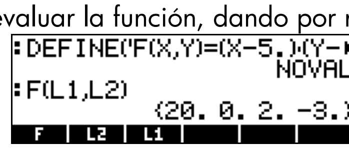


Definiendo funciones que utilizan listas

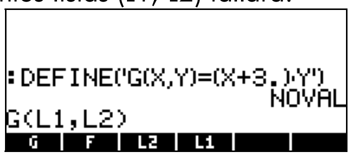
En el capítulo 3 introdujimos el uso de la función DEFINE (DEF) para crear funciones de números reales con un o más argumentos. Una función definida con DEF se puede también utilizar con argumentos listas, con la excepción de que, cualquier función que incorpora una adición deba utilizar el operador ADD más bien que el signo de más (+). Por ejemplo, si definimos la función F(X,Y) = (X-5)*(Y-2), mostrado aquí en modo ALG:

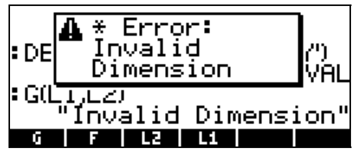


podemos utilizar listas (por ejemplo, variables L1 y L2, definido anteriormente en este capítulo) para evaluar la función, dando por resultado:

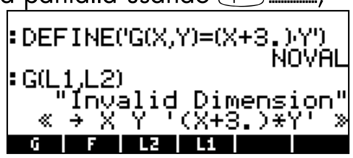


Puesto que la declaración de la función no incluye ninguna adición, el uso de la función para argumentos listas es directo. Sin embargo, si definimos la función G(X,Y) = (X+3)*Y, una tentativa de evaluar esta función con argumentos listas (L1, L2) fallará:

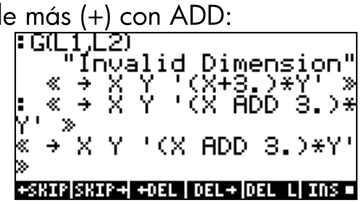




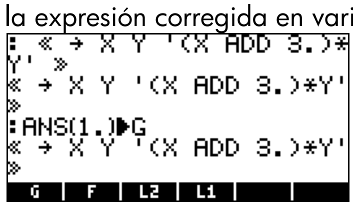
Para fijar este problema podemos corregir el contenido de la variable , cuál podemos listar en la pantalla usando ,



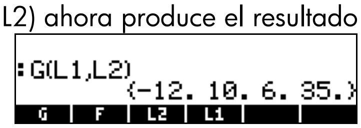
para sustituir el signo de más (+) con ADD:



Después, almacenamos la expresión corregida en variable :

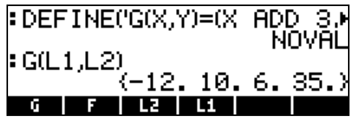


La evaluación de G(L1,L2) ahora produce el resultado siguiente:



Como alternativa, usted puede definir la función con ADD en vez del signo de más (+), desde el comienzo, es decir, use

`DEFINE('G(X,Y)=(X ADD 3)*Y')` :



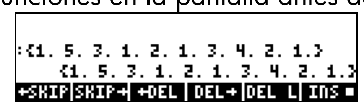
Usted puede también definir la función como G(X,Y) = (X-3)*Y.

Aplicaciones de listas

Esta sección muestra un par de usos de listas al cálculo de la estadística de una muestra. Por una muestra entendemos una lista de valores, digamos, $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Suponga que la muestra de interés es la lista

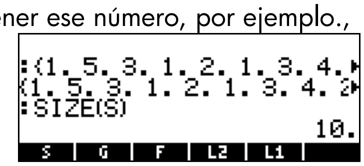
{1, 5, 3, 1, 2, 1, 3, 4, 2, 1}

y que la almacenamos en un variable llamado S. (La pantalla siguiente muestra esta acción en modo ALG, sin embargo, el procedimiento en modo RPN es muy similar. Solamente tenga presente que en modo RPN usted pone los argumentos de las funciones en la pantalla antes de activar la función):



Media armónica de una lista

Ésta es una muestra muy pequeña en la que podemos contar en la pantalla el número de elementos (n=10). Para una lista más grande, podemos utilizar la función SIZE para obtener ese número, por ejemplo.,

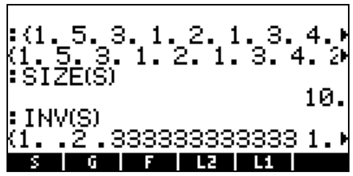


Suponer que deseamos calcular la media armónica de la muestra, definida como

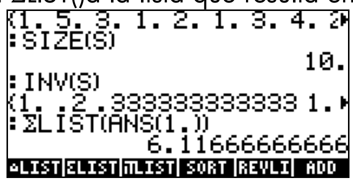
$$s_h = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s_n}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\cdots+\frac{1}{s_n}\right)}.$$

Para calcular este valor podemos seguir este procedimiento:

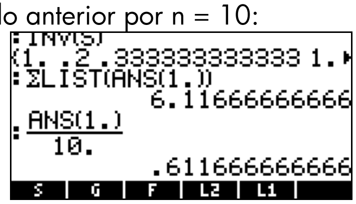
1. 1. Aplicar la función INV () a la lista S:



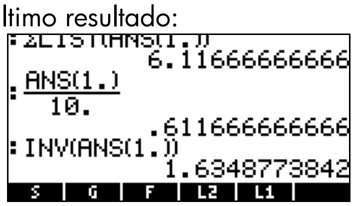
2. Aplicar la función ΣLIST()a la lista que resulta en 1.



3. Dividir el resultado anterior por n = 10:



4. Aplicar INV() al último resultado:



Así, la media armónica de la lista S es s_h = 1.6348…

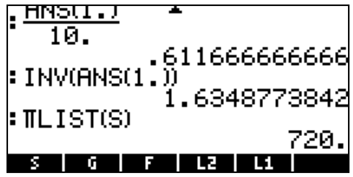
Media geométrica de una lista

La media geométrica de una muestra se define como

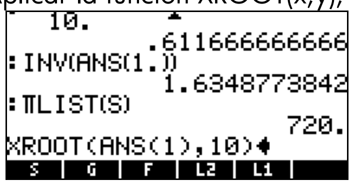
$$x_g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

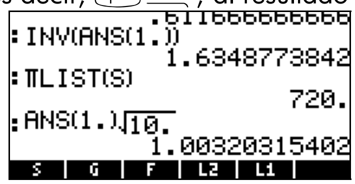
Para encontrar la media geométrica de la lista almacenada en S, podemos utilizar el procedimiento siguiente:

1. Aplicar la función ΠLIST() a la lista S:



2. Aplicar la función XROOT(x,y), es decir, ⇨ $\sqrt[x]{y}$, al resultado 1:





Así, la media geométrica de la lista S es s_g = 1.003203…

Promedio ponderado

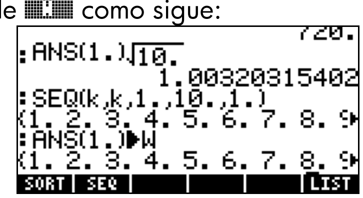
Suponer que los datos en lista S, definido anteriormente, a saber:

S = {1,5,3,1,2,1,3,4,2,1}

es afectado por los pesos,

W = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Si definimos la lista de pesos como W = $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, notamos que el elemento *k* en la lista W definida anteriormente, puede ser definido como w_k = k. Así podemos utilizar la función SEQ para generar esta lista, y entonces almacenarlo en variable W como sigue:

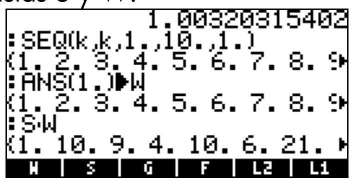


Dado la lista de los datos $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, y la lista de los pesos $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, el promedio ponderado de los datos en S se define como

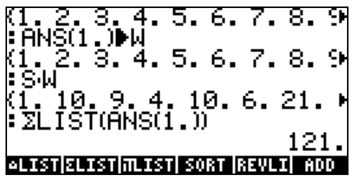
$$s_w = \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot s_k}{\sum_{k=1}^{n} w_k}.$$

Para calcular el promedio ponderado de los datos en la lista S con los pesos en lista W, podemos utilizar los siguientes pasos:

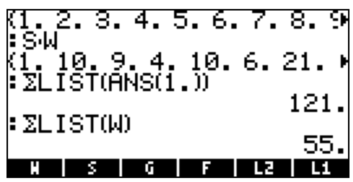
1. Multiplicar las listas S y W:



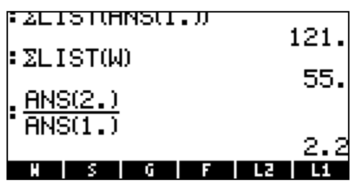
2. Utilizar la función ΣLIST en este resultado para calcular el numerador de s_w:



3. Utilizar la función ΣLIST, una vez más, para calcular el denominador de s_w:



4. 4. Utilizar la expresión ANS(2)/ANS(1) para calcular el promedio ponderado:



Así, el promedio ponderado de la lista S con los pesos en la lista W es s_w= 2.2.

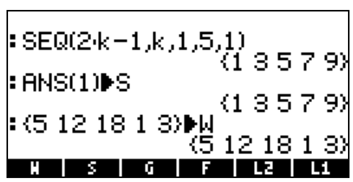
Nota: ANS(1) se refiere al resultado más reciente (55), mientras que ANS(2) se refiere al penúltimo resultado (121).

Estadística de datos agrupados

Los datos agrupados son dados típicamente por una tabla que muestra la frecuencia (w) de datos en clases o compartimientos de datos. Cada clase o compartimiento es representada por una marca de la clase (s), típicamente el punto medio de la clase. Un ejemplo de datos agrupados se muestra a continuación:

Limites de clase	Marca de clase s_k	Frecuencia w_k
0 - 2	1	5
2 - 4	3	12
4 - 6	5	18
6 - 8	7	1
8 -10	9	3

Los datos de la marca de la clase se pueden almacenar en variable S, mientras que la frecuencia se puede almacenar en variable W, como sigue:

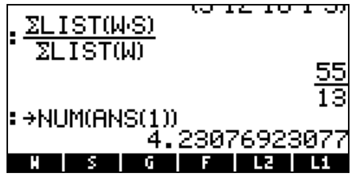


Dado la lista de las marcas de la clase S = $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, y la lista de las cuentas de la frecuencia W = $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, el promedio ponderado de los datos en S con los pesos W representa el valor medio de los datos agrupados, que llamamos $\overline{s}$, en este contexto:

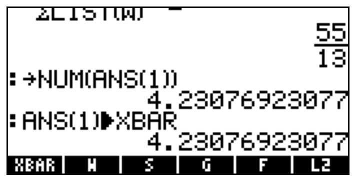
$$\overline{s} = \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot s_k}{\sum_{k=1}^{n} w_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot s_k}{N},$$

donde $N = \sum_{k=1}^{n} w_k$ representa la cuenta total de la frecuencia.

El valor medio para los datos en listas S y W, por lo tanto, puede ser calculado usando el procedimiento descrito anteriormente para el promedio ponderado, es decir,



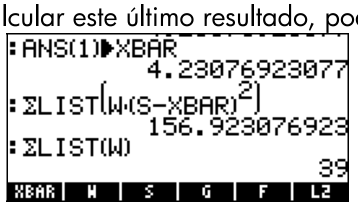
Almacenaremos este valor en un variable llamado XBAR:

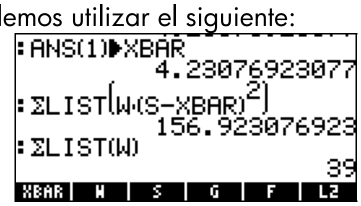


La varianza de estos datos agrupados se define como

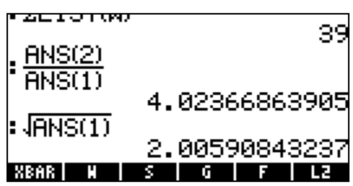
$$V = \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot (s_k - \bar{s})^2}{\sum_{k=1}^{n} w_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot (s_k - \bar{s})^2}{N}$$

Para calcular este último resultado, podemos utilizar el siguiente:





La desviación estándar de los datos agrupados es la raíz cuadrada de la varianza:



Capítulo 9
Vectores

En este Capítulo presentan ejemplos de creación y operaciones con vectores, tanto vectores matemáticos de varios elementos, como vectores físicos de 2 y 3 componentes.

Definiciones

Desde un punto de vista matemático, un vector es un arreglo de 2 o más elementos dispuestos en una fila o una columna. Éstos serán referidos como vectores fila y columna. Los ejemplos se demuestran a continuación:

$$v = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad u = [1, -3, 5, 2]$$

Los vectores físicos tienen dos o tres componentes y se pueden utilizar para representar cantidades físicas tales como posición, velocidad, aceleración, las fuerzas, momentos, ímpetu (cantidad de movimiento) linear y angular, velocidad y aceleración angular, etc. Referir a un sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z), existe vectores unitarios **i**, **j**, **k** asociado a cada coordenada, tales que un vector físico **A** puede ser escrito en términos de sus componentes A_x, A_y, A_z, as **A** = A_x**i** + A_y**j** + A_z**k**.
La notación alternativa para este vector es: **A** = [A_x, A_y, A_z], **A** = (A_x, A_y, A_z), o **A** = < A_x, A_y, A_z >. Una versión bidimensional de este vector será escrita como **A** = A_x**i** + A_y**j**, **A** = [A_x, A_y], **A** = (A_x, A_y), o **A** = < A_x, A_y >. Puesto que en calculadora los vectores se escriben entre corchetes [ ], elegiremos la notación **A** = [A_x, A_y, A_z] o **A** = [A_x, A_y, A_z], para referir a vectores bi- y tri-dimensionales de ahora en adelante. La magnitud de un vector **A** se define como |**A**| = $\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$. Un vector unitario en la dirección del vector **A**, se define como $\mathbf{e}_A$ = **A**/|**A**|. Los vectores se pueden multiplicar por un escalar, por ejemplo, k**A** = [kA_x, kA_y, kA_z]. Físicamente, el vector k**A** es paralelo al vector **A**, si k>0, o anti-paralelo al vector **A**, si k<0. El negativo de un vector se define como –**A** = (–1)**A** = [–A_x, –A_y, –A_z]. La división por un escalar se puede interpretar como una multiplicación, es decir, **A**/k =

(1/k)·**A**. La adición y la substracción de vectores se definen como **A**±**B** = $[A_x \pm B_x, A_y \pm B_y, A_z \pm B_y]$, en la cual **B** es el vector **B** = $[B_x, B_y, B_z]$.
Hay dos definiciones de los productos de vectores físicos, un producto escalar o interno (el producto de punto) y un producto vectorial o externo (el producto cruz). El producto punto produce un valor escalar definido como **A•B** = |**A**||**B**|cos(θ), en la cual θ es el ángulo entre los dos vectores. El producto cruz produce un vector **A**×**B** cuya magnitud es |**A**×**B**| = |**A**||**B**|sin(θ),y su dirección es dada por la llamada regla de la mano derecha (consulte un libro de textos en matemáticas, la física, o mecánicos para ver esta operación ilustrada gráficamente). En términos de componentes cartesianos, **A•B** = $A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$, y **A**×**B** = $[A_yB_z-A_zB_y,A_zB_x-A_xB_z,A_xB_y-A_yB_x]$. El ángulo entre dos vectores se puede encontrar de la definición del producto punto como cos(θ) = **A•B**/|**A**||**B**|= $\mathbf{e}_A \bullet \mathbf{e}_B$. Así, si dos vectores **A** y **B** son perpendiculares ($\theta = 90^0 = \pi/2^{rad}$), **A•B** = 0.

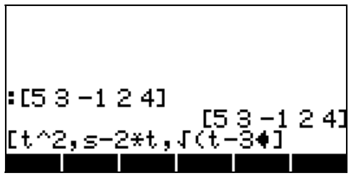
La escritura de vectores

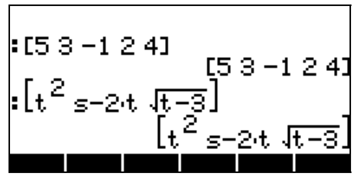
En la calculadora, los vectores se representan por secuencias de números escritos entre corchetes en la forma de vectores filas. Los corchetes se obtienen utilizando las teclas ⬅ [] , asociada con la tecla ×. Los siguientes son ejemplos de vectores en la calculadora:

`[3.5, 2.2, -1.3, 5.6, 2.3]`	Un vector fila general
`[1.5,-2.2]`	Un vector 2-D (bidimensional)
`[3,-1,2]`	Un vector 3-D (tridimensional)
`['t','t^2','SIN(t)']`	Un vector de objetos algebraicos

Escritura de vectores en la pantalla

Con la calculadora en modo ALG, un vector se escribe en la pantalla abriendo primero un par de corchetes (⬅ []) y escribiendo después los elementos del vector separados por comas (➡ ,). Las figuras siguientes muestran la escritura de un vector numérico seguido de un vector algebraico. La figura de la izquierda muestra el vector algebraico antes de presionar ENTER. La figura de la derecha muestra el vector algebraico después de presionar ENTER:



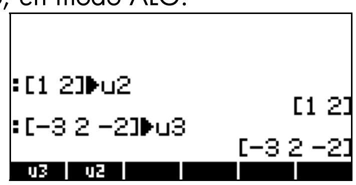


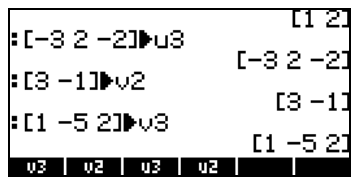
En modo RPN, se escriben los vectores abriendo los corchetes y separando los elementos de los vectores ya sea con comas (→ ,) o espacios (SPC). Nótese que después de presionar ENTER , en cualquiera de los dos modos, la calculadora mostrará los elementos de un vector separados por espacios.

Almacenamiento de vectores en variables

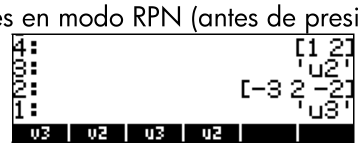
Los vectores pueden almacenarse en variables. Las figuras mostradas a continuación muestran los siguientes vectores:

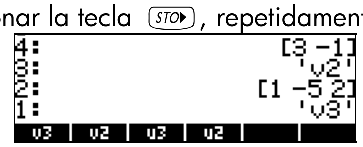
u$_2$ = [1, 2], **u**$_3$ = [-3, 2, -2], **v**$_2$ = [3,-1], **v**$_3$ = [1, -5, 2]
almacenados en las variables u2, u3, v2, y v3, respectivamente.
Primero, en modo ALG:





Después en modo RPN (antes de presionar la tecla STO▶, repetidamente):





Utilizando el escritor de matrices (MTRW) para escribir vectores

Los vectores pueden escribirse también utilizando el escritor de matrices ← MTRW (tercera tecla en la cuarta fila del teclado). Este comando genera una especie de hoja de cálculo correspondiendo a las filas y columnas de una matriz. (Información detallada sobre el uso del escritor de matrices se presenta en el Capítulo 10). Para escribir un vector, se necesita solamente escribir los elementos de la primera fila. Al activarse el escritor de matrices, la casilla en la primera fila y primera columna es seleccionada automáticamente. En el menú al pié de la hoja de cálculo se encentran las siguientes teclas:

EDIT VEC■ ←WID WID→ GO→■ GO↓

La tecla EDIT se utiliza para editar el contenido de la casillas
La tecla VEC■ , si está activa, producirá un vector, en lugar de una matriz conteniendo una fila y varias columnas.

Vectores vs. matrices
Para ver la tecla VEC en acción, intentar los ejercicios siguientes:
(1) Activar el escritor de matrices (← MTRW). Con las opciones VEC■ y GO→■ selectas, escribe 3 ENTER 5 ENTER 2 ENTER ENTER . Esto produce [3. 5. 2.]. (En modo de RPN, usted puede utilizar las teclas siguientes para producir el mismo resultado: 3 SPC 5 SPC 2 ENTER ENTER).
(2) Con la opción VEC■ sin seleccionar y GO→■ seleccionado, escriba 3 SPC 5 SPC 2 ENTER ENTER . Esto produce [[3. 5. 2.]].

Aunque estos dos resultados se diferencian solamente en el número de los corchetes usados, para la calculadora éstos representan diversos objetos matemáticos. El primero es un vector con tres elementos, y el segundo una matriz con una fila y tres columnas. Hay diferencias de la manera que las operaciones matemáticas aplican a un vector a diferencia a una matriz. Por lo tanto, para aplicaciones vectoriales, mantenga la opción VEC■ seleccionado mientras que usa al escritor de matrices.

La tecla ←WID se utiliza para reducir el ancho de las columnas en la hoja de cálculo. Presione esta tecla un par de veces para verificar que se reduce el ancho de las columnas.
La tecla WID→ se utiliza para incrementar el ancho de las columnas en la hoja de cálculo. Presione esta tecla un par de veces para verificar que se incrementa el ancho de las columnas.
La tecla GO→■, si está activa, automáticamente selecciona la siguiente casilla a la derecha de la casilla actual al presionar la tecla ENTER . Esta opción es la opción pre-seleccionada por el escritor de matrices. Si se desea utilizar esta opción, la misma deberá ser

seleccionada antes de comenzar a escribir los elementos de la matriz o vector.

La tecla GO↓ , si está activa, automáticamente selecciona la siguiente casilla debajo de la casilla seleccionada cuando se presiona la tecla ENTER. Si se desea utilizar esta opción, la misma deberá ser seleccionada antes de comenzar a escribir los elementos de la matriz o vector.

Navegando hacia la derecha o hacia abajo en el escritor de matrices
Actívese el escritor de matrices y escríbase lo siguiente: 3 ENTER 5 ENTER 2 ENTER ENTER habiendo seleccionado la tecla GO→■. A continuación, escríbase la misma secuencia de números habiendo seleccionado la tecla GO↓■, y nótese la diferencia en el resultado. En el primer ejercicios, se escribió un vector de tres elementos. En el segundo ejercicio, se escribió una matriz de tres files y una columna (es decir, un vector columna).

Actívese el escritor de matrices una vez más utilizando las teclas ← MTRW , y presiónese la tecla NXT para acceder a la segunda página del menú. Las teclas disponibles serán las siguientes:

+ROW -ROW +COL -COL →STK GOTO

La tecla +ROW agrega una fila de ceros a la matriz actual.

La tecla -ROW elimina una fila de la matriz actual.

La tecla +COL agrega una columna de ceros a la matriz actual.

La tecla -COL elimina una fila de la matriz actual.

La tecla →STK copia el contenido de una casilla a la pantalla normal (stack).

La tecla GOTO , solicita del usuario el número de una fila y columna de la casilla a seleccionar

Al presionarse la tecla NXT una vez más se accede al última página del menú, la cual contiene solamente la función DEL (remover).

La función DEL elimina el contenido de la casilla reemplazándolo con un cero.

Para verificar la operación de estas funciones, sígase el ejercicio que se muestra a continuación:

(1) Actívese el escritor de matrices utilizando las teclas ⬅ MTRW . Asegúrese que las teclas VEC■ y GO→■ han sido seleccionadas.

(2) Escríbase lo siguiente:

1 ENTER 2 ENTER 3 ENTER
NXT GOTO 2 OK 1 OK OK
2 ENTER 1 ENTER 5 ENTER
4 ENTER 5 ENTER 6 ENTER
7 ENTER 8 ENTER 9 ENTER

(3) Muévase el cursor dos filas hacia arriba utilizando ▲▲. Presiónese la tecla -ROW. La segunda fila desaparecerá. .

(4) Presiónese +ROW. Una fila de tres ceros aparece en la segunda fila.

(5) Presiónese -COL. La primera columna desaparecerá.

(6) Presiónese +COL. Una columna de dos ceros aparece en la primera columna.

(7) Presiónese GOTO 3 OK 3 OK OK para mover el cursor a la casilla (3,3).

(8) Presiónese →STK. Esta acción coloca el contenido de la casilla (3,3) en la pantalla principal (stack), aunque este resultado no será visible inmediatamente.

(9) Presiónese ENTER para recuperar la pantalla normal. El número 9, elemento (3,3), y la matriz recientemente escrita se mostrarán en la pantalla.

Resumen del uso del escritor de matrices para escribir vectores

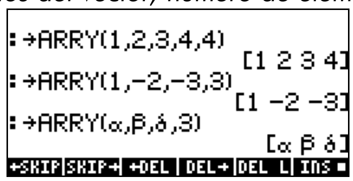
En resumen, para escribir un vector usando al escritor de la matriz, activar el escritor (⬅ MTRW),y colocar los elementos del vector, presionando ENTER después de cada uno de ellos. Entonces, presione ENTER ENTER. Cerciorarse de que VEC■ y GO→■ están seleccionados.

Ejemplo: ⬅ MTRW ' ALPHA ⬅ X Y^x 2 ENTER 2 ENTER 5 +/- ENTER ENTER

produce: [‘x^2’ 2 –5]

Construcción de un vector con →ARRY

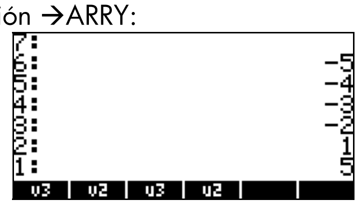
La función →ARRY, disponible en el catálogo de la función (CAT →, use ▲▼ para localizar la función), también puede utilizarse para construir un vector o un arsenal en la manera siguiente. En modo de ALG, escribir →ARRY(*elementos del vector, número de elementos*), por ejemplo,

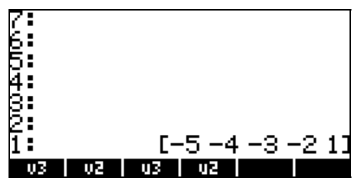


En modo de RPN:

(1) Escriba los n elementos del arreglo en el orden deseado para el arreglo (cuando se lee de izquierda a derecha) en la pantalla RPN.
(2) Escriba *n* como el último elemento.
(3) Use la función →ARRY.

Las pantallas siguientes muestran la pantalla RPN antes y después de aplicar la función →ARRY:



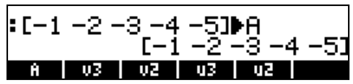


En modo de RPN, la función [→ARRY] toma los objetos de niveles *n+1, n, n-1*, …, hasta los niveles 3 y 2, y los convierte en un vector de *n* elementos. El objeto originalmente en el nivel n+1 se convierte en el primer elemento, el objeto originalmente en el nivel n se convierte el segundo elemento, etcétera.

Note: La función →ARRY está también disponible en el menú PRG/TYPE (PRG)

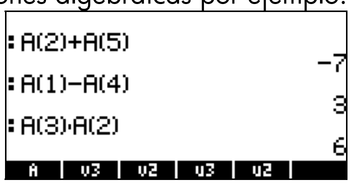
Identificación, extracción, e inserción de elementos

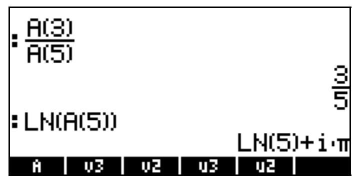
Si usted almacena un vector en una variable, digamos A, usted puede identificar los elementos del vector usando A(i), donde i es un número del número entero menor que o igual al tamaño del vector. Por ejemplo, construya el arreglo siguiente y almacénelo en la variable A: [-1, -2, -3, -4, -5]:

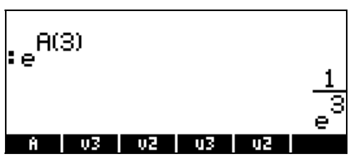


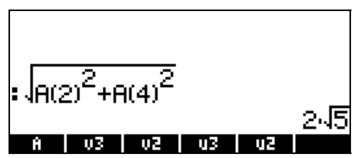
Para recuperar el tercer elemento de A, por ejemplo, usted podría escribir A(3) en la calculadora. En modo de ALG, escriba simplemente A(3). En modo RPN, escriba 'A(3)' ENTER EVAL.

Usted puede operar con los elementos del arreglo escribiendo y evaluando expresiones algebraicas por ejemplo:

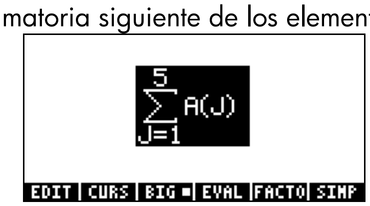








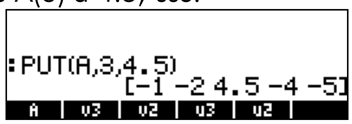
Expresiones más complicadas que implican elementos de A pueden así mismo ser escritas. Por ejemplo, usando al escritor de la ecuación (↱ EQW), podemos escribir la sumatoria siguiente de los elementos de A:



Destacando la expresión y usando la tecla EVAL, conseguimos el resultado: -15.

Nota: El vector A puede referirse también como una *variable indexada* porque el nombre A representa varios valores identificado por un subíndice.

Para sustituir un elemento en un arreglo utilice la función PUT (usted puede encontrarlo en el catálogo de la función ↱ CAT , o en el sub-menú PRG/LIST/ELEMENTS– el anterior fue introducida en el capítulo 8). En modo de ALG, usted necesita utilizar la función PUT con los argumentos siguientes: PUT(*arreglo, localización que se substituirá, nuevo valor*). Por ejemplo, cambiar el contenido de A(3) a 4.5, use:



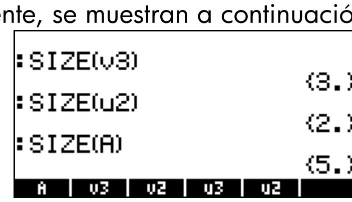
En modo de RPN, usted puede cambiar el valor de un elemento de A, almacenando un nuevo valor en ese elemento particular. Por ejemplo, si deseamos cambiar el contenido de A(3) por 4.5 en vez de su valor actual de –3., use:

4 • 5 ENTER ' ALPHA A ↰ () 3 ENTER STO▶

Para verificar que ocurrió el cambio use: ↱ A . El resultado ahora mostrado es: [-1 -2 4.5 -4 -5].

Nota: Este proceso para cambiar el valor de un elemento de arreglo no se permite en modo ALG, si usted intenta almacenar 4.5 en A(3) en este modo se obtiene el mensaje de error siguiente: Invalid Syntax (sintaxis inválida).

Para encontrar la longitud de un vector usted puede utilizar la función_SIZE, disponible a través del catálogo de funciones o con el menú PRG/LIST/ELEMENTS. Algunos ejemplos, basados en los arreglos o vectores almacenados previamente, se muestran a continuación:

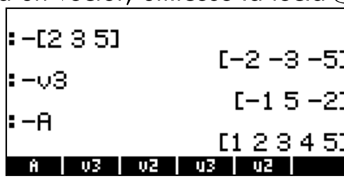


Operaciones elementales con vectores

Para ilustrar operaciones con vectores utilizaremos los vectores u2, u3, v2, y v3, almacenados en un ejercicio previo.

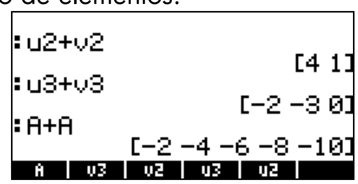
Cambio de signo

Para cambiar de signo a un vector, utilícese la tecla +/-, por ejemplo,



Adición, substracción

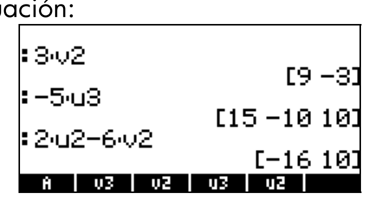
La adición y substracción de vectores requiere que los vectores operandos tengan el mismo número de elementos:

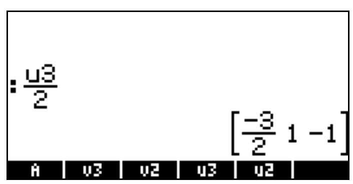


Si se intentan sumar o restar vectores de diferentes números de elementos se produce un error ("Invalid Dimension", Dimensión Incompatible) . Por ejemplo, v2+v3, u2+u3, A+v3, etc.

Multiplicación o división por un escalar

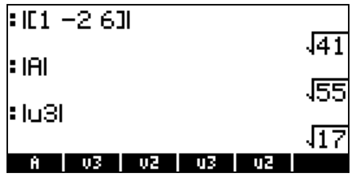
Ejemplos de multiplicación o división por un escalar se muestran a continuación:





Función valor absoluto

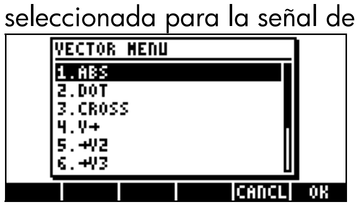
La función valor absoluto (ABS), cuando se aplica a un vector, calcula la magnitud del vector. Para un vector A = [A_1,A_2,…,A_n], se define la magnitud como $|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + \cdots + A_z^2}$. En el modo de ALG, escríbase el nombre de la función seguido por el argumento vectorial. Por ejemplo, ABS([1,-2,6]), ABS(A), ABS(u3), se mostrarán en la pantalla de la siguiente manera:

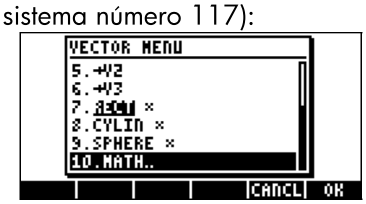


El menú MTH/VECTOR

El menú MTH (← MTH) contiene funciones que aplican específicamente a los vectores:

El menú VECTOR contiene las siguientes funciones (la opción CHOOSE boxes ha sido seleccionada para la señal de sistema número 117):



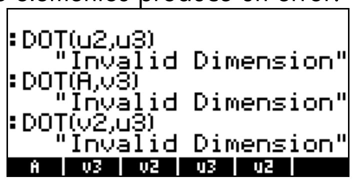


Magnitud

La magnitud de un vector, tal como se indicó anteriormente, se calcula con la función ABS. Esta función se encuentra disponible directamente en el teclado (← ABS). Ejemplos de aplicación de la función ABS se presentaron anteriormente.

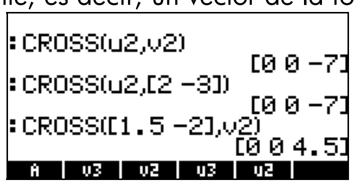
Producto escalar (producto punto)

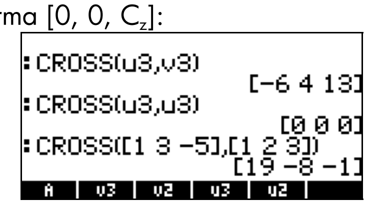
La función DOT (opción 2 en el menú mostrado anteriormente) se utiliza para calcular el producto escalar, o producto punto, de dos vectores con el mismo número de elementos. Algunos ejemplos de aplicación de la función DOT, utilizando los vectores A, u2, u3, v2, y v3, almacenados anteriormente, se muestran a continuación en el modo ALG. El producto escalar de vectores con diferente número de elementos produce un error.



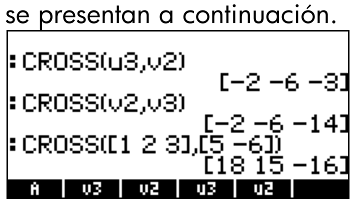
Producto vectorial (producto cruz)

La función CROSS (opción 3 el menú MTH/VECTOR) se utiliza para calcular el producto vectorial, o producto cruz, de dos vectores 2-D, de dos vectores 3-D, o de un vector 2-D con un vector 3-D. Para calcular el producto vectorial, un vector bidimensional (2-D) de la forma [A_x, A_y], se convierte en un vector tridimensional (3-D) de la forma [A_x, A_y,0]. Ejemplos del producto vectorial se muestran a continuación en el modo ALG. Nótese que el producto vectorial de dos vectores bidimensionales produce un vector en la dirección z solamente, es decir, un vector de la forma [0, 0, C_z]:





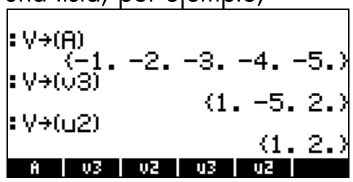
Ejemplos de productos vectoriales (productos cruz) de un vector 3-D con un vector 2-D, o viceversa, se presentan a continuación.



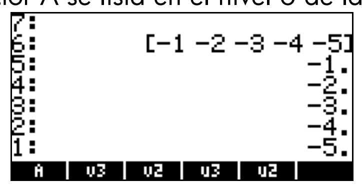
El tratar de calcular un producto vectorial (producto cruz) de vectores con más de 3 componentes produce un error: por ejemplo, CROSS(v3,A), etc.

Descomposición de un vector

La función V→ se utiliza para descomponer un vector en sus elementos o componentes. Si está utilizado en el modo de ALG, V→ proporcionará los elementos del vector en una lista, por ejemplo,

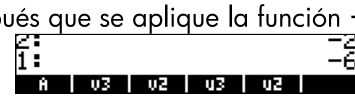


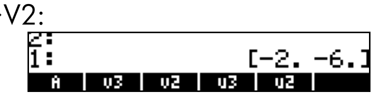
En el modo de RPN, uso de la función V→ enumerará los componentes de un vector en la pantalla, por ejemplo, V→(A) producirá la salida siguiente en la pantalla de RPN (el vector A se lista en el nivel 6 de la pantalla:).



Construcción de un vector bidimensional

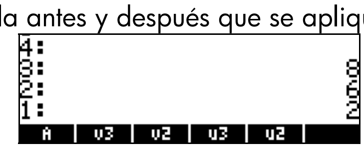
La función →V2 se utiliza en el modo de RPN para construir un vector con los valores en niveles 1: y 2:. Las siguientes pantallas muestran la pantalla antes y después que se aplique la función →V2:

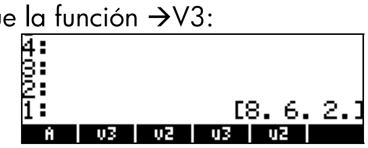




Construcción de un vector tridimensional

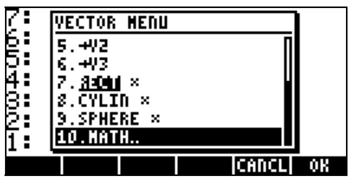
La función →V3 se utiliza en el modo de RPN para construir un vector con los valores en niveles de la pantalla 1: , 2:, y 3:. Las pantallas muestran la pantalla antes y después que se aplique la función →V3:





Cambio del sistema de coordenadas

Las funciones RECT, CYLIN, y SPHERE se utilizan cambiar el sistema coordinado actual a los coordenadas rectangulares (cartesianas), cilíndricas (polar), o esféricas. El sistema actual se demuestra destacado en el ítem correspondiente de una lista (CHOOSE boxes seleccionado para la bandera del sistema 117), o seleccionado en la tecla correspondiente (SOFT menus seleccionado para la bandera del sistema 117). En la figura siguiente el sistema de coordenadas RECTangulares se muestra seleccionado en estos dos formatos:

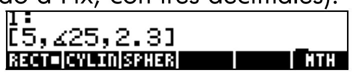


Cuando se selecciona el sistema de coordenadas rectangulares, o cartesiano, la línea superior de la pantalla mostrará la opción XYZ, y cualquier vector 2-D ó 3-D escrito en la calculadora se reproduce como sus componentes (x,y,z). Así, para escribir el vector A = 3**i**+2**j**-5**k**, usamos [3,2,-5], y se muestra el vector como:

Si en vez de escribir componentes cartesianas de un vector escribimos componentes cilíndricas (polares), necesitamos proporcionar la magnitud, r, de la proyección del vector en el plano x-y, un ángulo θ (en la medida angular actual) representando la inclinación de r con respecto al eje x positivo, y una componente z del vector. El ángulo θ debe ser escrito precedido por el carácter de ángulo (∠),generado usando ALPHA ↱ 6 . Por ejemplo, suponga que tenemos un vector con r = 5, θ = 25° (DEG debe estar seleccionado como la medida angular), y z = 2.3, podemos escribir este vector en la manera siguiente:

↰ [] 5 ↱ , ALPHA ↱ 6 2 5 ↱ , 2 . 3

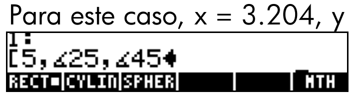
Antes de presionar ENTER, la pantalla se mostrará como en el lado izquierdo de la figura siguiente. Después de presionar ENTER, la pantalla mirará como en el lado derecho de la figura (Por este ejemplo, el formato numérico fue cambiado a Fix, con tres decimales).

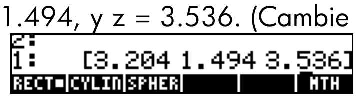


Nótese que el vector se muestra en coordenadas cartesianas, con las componentes x = r cos(θ), y = r sin(θ), z = z, aunque lo escribimos en coordenadas polares. Esto es porque la presentación del vector se ajustará al sistema coordinado actual. Para este caso, tenemos x = 4.532, y = 2.112, y z = 2.300.

Supóngase que ahora escribimos un vector en coordenadas esféricas (es decir, en la forma (ρ,θ,φ), donde ρ es la longitud del vector, θ es el ángulo que la proyección xy del vector forma con el lado positivo del eje x, y φ es el ángulo que ρ forma con el lado positivo del eje z), con ρ = 5, θ = 25°, y φ = 45°. Utilizaremos: ← [] 5 → , ALPHA → 6 2 5 , ALPHA → 6 4 5

La figura siguiente muestra la transformación del vector de coordenadas esféricas a cartesianas, con x = ρ sin(φ) cos(θ), y = ρ sin (φ) cos (θ), z = ρ cos(φ). Para este caso, x = 3.204, y = 1.494, y z = 3.536. (Cambie a DEG).

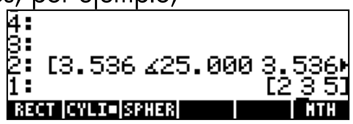




Si se selecciona el sistema de coordenadas cilíndricas (CYLIN), la línea superior de la pantalla mostrará la opción R∠Z, y un vector escrito en coordenadas cilíndricas será mostrado en su forma de coordenadas cilíndricas (o polares), es decir, (r,θ,z). Para ver esto en acción, cambie el sistema coordinado a cilíndricas (CYLIN) y observe cómo el vector exhibido en la pantalla pasada cambia a su forma cilíndrica (polar). El segundo componente se muestra con el carácter del ángulo enfrente para acentuar su naturaleza angular.

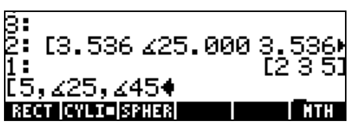
La conversión de coordenadas cartesianas a cilíndricas es tal que r = $(x^2+y^2)^{1/2}$, θ = $\tan^{-1}(y/x)$, y z = z. Para el caso demostrado anteriormente la transformación fue tal que (x,y,z) = (3.204, 2.112, 2.300), produjo (r,θ,z) = (3.536,25°,3.536).

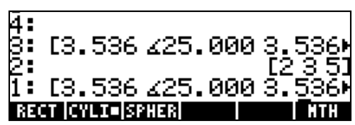
A este punto, cambie la medida angular a radianes. Si ahora escribimos un vector de números enteros en forma cartesiana, incluso si el sistema coordinado cilíndrico (CYLIN) está activo, el vector se mostrará en coordenadas cartesianos, por ejemplo,



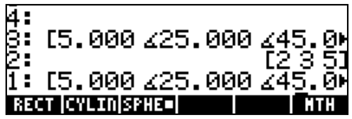
Esto es porque los números enteros se disponen para el uso con el CAS y, por lo tanto, los componentes de este vector se mantienen en forma cartesiana. Para forzar la conversión a los coordenadas polares escriba las componentes del vector como números reales (es decir, agregar un punto decimal), por ejemplo, [2., 3., 5.].

Con el sistema coordinado cilíndrico seleccionado, si escribimos un vector en coordenadas esféricas éste será transformado automáticamente a su equivalente cilíndrico (polar), es decir, (r,θ,z) con r = ρ sin φ, θ = θ, z = ρ cos φ. Por ejemplo, la figura siguiente muestra el vector escrito en coordenadas esféricas, y transformado a coordenadas polares. Para este caso, ρ = 5, θ = 25°, y φ = 45°, mientras que la transformación muestra que r = 3.563, y z = 3.536.





A continuación, cambiemos el sistema coordinado a las coordenadas esféricas usando la función SPHERE del sub-menú VECTOR en el menú MTH. Cuando se selecciona este sistema coordinado, la pantalla mostrará la opción R∠∠ en su primera línea. La pantalla cambiará para mostrar lo siguiente:



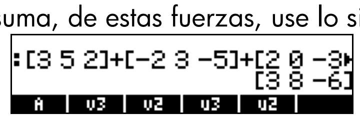
Nótese que los vectores que fueron escritos en coordenadas polares o cilíndricos ahora se han cambiado al sistema coordinado esférico. La transformación es tal que $\rho = (r^2+z^2)^{1/2}$, $\theta = \theta$, y $\phi = \tan^{-1}(r/z)$. Sin embargo, el vector que fue originalmente escrito en coordenadas cartesianas permanece en esa forma.

Aplicaciones de las operaciones vectoriales

Esta sección contiene algunos ejemplos de las operaciones con vectores que usted puede encontrar en usos de la física o mecánica..

Resultante de fuerzas

Suponga que una partícula está sujeta a las fuerzas siguientes (en newtons, N): $\mathbf{F}_1$ = 3**i**+5**j**+2**k**, $\mathbf{F}_2$ = -2**i**+3**j**-5**k**, y $\mathbf{F}_3$ = 2**i**-3**k**. Para determinar la resultante, es decir, la suma, de estas fuerzas, use lo siguiente en modo ALG:



Así, la resultante es **R** = $\mathbf{F}_1$+ $\mathbf{F}_2$ + $\mathbf{F}_3$ = (3**i**+8**j**-6**k**)N. En modo RPN use:

[3,5,2] ENTER [-2,3,-5] ENTER [2,0,3] ENTER + +

Ángulo entre vectores

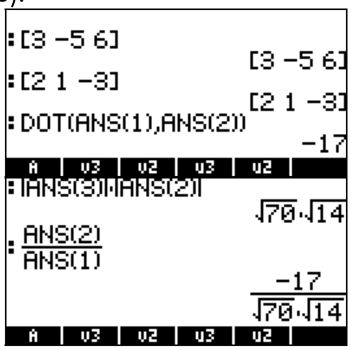
El ángulo entre dos vectores **A**, **B**, puede calcularse como

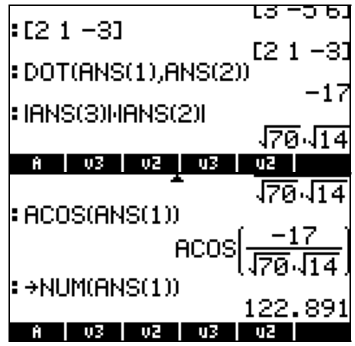
$$\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}/|\mathbf{A}||\mathbf{B}|)$$

Suponga que usted desea encontrar el ángulo entre los vectores **A** = 3**i**-5**j**+6**k**, **B** = 2**i**+**j**-3**k**, usted podría intentar la operación siguiente (medida angular fijada a los grados) en modo ALG:

1 - Escriba [3,-5,6], presione ENTER, [2,1,-3], presione ENTER.
2 - DOT(ANS(1),ANS(2)) calcula el producto punto
3 - ABS(ANS(3))*ABS((ANS(2)) calcula el producto de magnitudes
4 - ANS(2)/ANS(1) calcula cos(θ)
5 - ACOS(ANS(1)), seguido por,→NUM(ANS(1)), calcula θ

Los pasos se demuestran en las pantallas siguientes (Modo ALG, por supuesto):



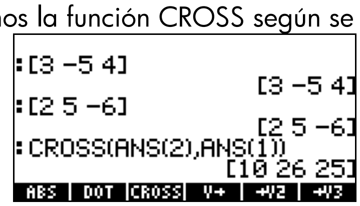


Así, el resultado es θ = 122.891°. En modo RPN, use lo siguiente:

[3,-5,6] ENTER [2,1,-3] ENTER DOT
[3,-5,6] ENTER ABS [2,1,-3] ENTER ABS ×
÷ ACOS →NUM

Momento de una fuerza

El momento ejercido por una fuerza **F** sobre un punto O se define como el producto cruz **M** = **r**×**F**, en el cual **r**, también conocido como el brazo de la fuerza, es el vector de posición basado en O y señalando hacia el punto de aplicación de la fuerza. Suponga que una fuerza **F** = (2**i**+5**j**-6**k**) N tiene un brazo **r** = (3**i**-5**j**+4**k**)m. Para determinar el momento ejercido por la fuerza con ese brazo, utilizamos la función CROSS según se muestra a continuación:

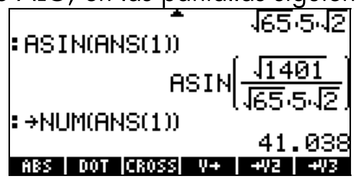


Por lo tanto, **M** = (10**i**+26**j**+25**k**) m·N. Sabemos que la magnitud de **M** es tal que |**M**| = |**r**||**F**|sin(θ), donde θ es el ángulo entre **r** y **F**. Podemos encontrar este ángulo como, θ = $\sin^{-1}$(|**M**| /|**r**||**F**|) por las operaciones siguientes:

1 – ABS(ANS(1))/(ABS(ANS(2))*ABS(ANS(3)) calcula sin(θ)

2 – ASIN(ANS(1)), seguido por, →NUM(ANS(1)) calcula θ

Estas operaciones se muestran, en modo ALG, en las pantallas siguientes:

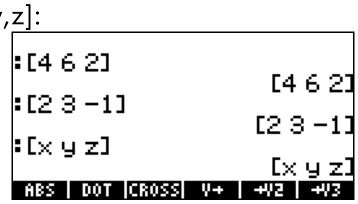


Así el ángulo entre los vectores **r** y **F** es θ = 41.038°. En modo RPN, podemos utilizar: [3,-5,4] `ENTER` [2,5,-6] `ENTER` CROSS ABS [3,-5,4] `ENTER` ABS [2,5,-6] `ENTER` ABS `×` `÷` ASIN →NUM

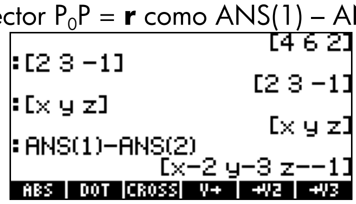
Ecuación de un plano en el espacio

Dado un punto en el espacio $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y un vector **N** = N_x**i**+N_y**j**+N_z**k** normal a un plano que contiene el punto P_0, el problema es encontrar la ecuación del plano. Podemos formar un vector que comienza en el punto P_0 y termine en el punto P(x,y,z), un punto genérico en el plano. Así, este vector **r** = P_0P = $(x\text{-}x_0)$**i**+ $(y\text{-}y_0)$**j** + $(z\text{-}z_0)$**k**, es perpendicular al vector normal **N**, dado que **r** se contiene enteramente en el plano. Aprendimos que para dos vectores normales **N** y **r**, **N•r** =0. Así, podemos utilizar este resultado para determinar la ecuación del plano.

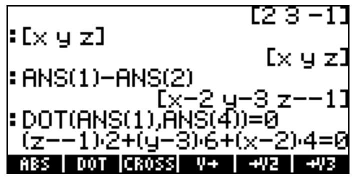
Para ilustrar el uso de este acercamiento, considere el punto $P_0(2,3,-1)$ y el vector normal **N** = 4**i**+6**j**+2**k**, podemos escribir el vector **N** y el punto P_0 como dos vectores, según lo demostrado a continuación. También escribimos por último el vector [x,y,z]:



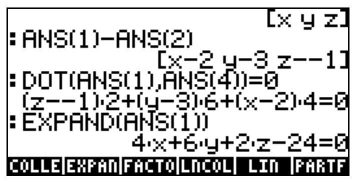
Después, calculamos vector P_0P = **r** como ANS(1) – ANS(2), es decir,



Finalmente, tomamos el producto punto de ANS(1) y ANS(4) y se iguala a cero para terminar la operación **N•r** =0:



Podemos ahora utilizar la función EXPAND (en el menú ALG) para calcular esta expresión:



Así, la ecuación del plano a través del punto $P_0(2,3,-1)$ y teniendo vector normal **N** = 4**i**+6**j**+2**k**, es 4x + 6y + 2z – 24 = 0. En modo RPN, use:

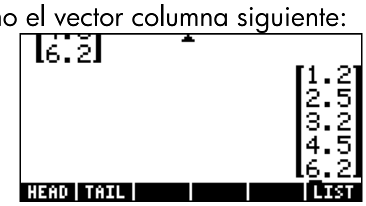
`[2,3,-1]` ENTER `['x','y','z']` ENTER − `[4,6,2] DOT EXPAND`

Vectores filas, vectores columnas, y listas

Los vectores presentados en este capítulo son todos vectores filas. En algunos casos, es necesario crear un vector columna (por ejemplo, al utilizar las funciones estadísticas predefinidas en la calculadora). La manera más simple de escribir un vector columna es incluyendo cada elemento del vector dentro de corchetes, contenidos dentro de un par de corchetes externos. Por ejemplo, escríbase:

`[[1.2],[2.5],[3.2],[4.5],[6.2]]` ENTER

Esto se representa como el vector columna siguiente:



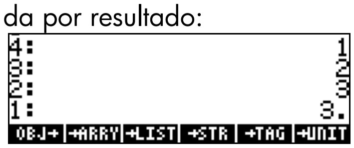
En esta sección mostramos maneras de transformar: un vector columna a un vector fila, un vector fila a un vector columna, una lista a un vector, y un vector (o matriz) a una lista.

Primero demostramos estas transformaciones usando el modo RPN. En este modo, utilizaremos las funciones OBJ→, →LIST, →ARRY y DROP para realizar la transformación. Para facilitar acceso a estas funciones fijaremos la bandera del sistema 117 a SOFT menus (ver el capítulo 1). De esta manera, las funciones OBJ→, →ARRY, y →LIST serán accesibles usando ← PRG TYPE. Las funciones OBJ→, →ARRY, y →LIST estarán disponible en las teclas de menú F1, F2, y F3. La función DROP está disponible usando ← PRG STACK DROP.

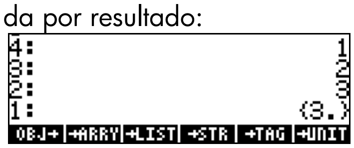
A continuación introducimos la operación de las funciones OBJ→, →LIST, →ARRY, y DROP con algunos ejemplos.

Función OBJ→

Esta función descompone un objeto en sus componentes. Si el argumento es una lista, la función OBJ→ mostrará los elementos de la lista en la pantalla, con el número de elementos en nivel 1, por ejemplo: {1,2,3} ENTER ← PRG TYPE OBJ→ da por resultado:



Cuando la función OBJ→ se aplica a un vector, listará los elementos del vector en la pantalla, con el número de elementos en el nivel 1: incluido entre llaves (una lista). El ejemplo siguiente ilustra este uso: [1,2,3] ENTER ← PRG TYPE OBJ→ da por resultado:



Si ahora aplicamos la función OBJ→ una vez más, la lista en nivel 1:, {3.}, será descompuesto como sigue:

Función →LIST

Esta función se utiliza para crear una lista dados los elementos de la lista y la longitud o el tamaño de la lista. En modo RPN, el tamaño de la lista, digamos, n, se coloca en el nivel 1: de la pantalla. Los elementos de la lista se deben colocar en niveles 2:, 3:, …, n+1: de la pantalla. Por ejemplo, para crear la lista {1, 2, 3}, escriba: 1 ENTER 2 ENTER 3 ENTER 3 ENTER ← PRG TYPE →LIST.

Función →ARRY

Esta función se utiliza para crear un vector o una matriz. En esta sección, la utilizaremos para construir un vector o un vector columna (es decir, una matriz de n filas y 1 columna). Para construir un vector regular incorporamos los elementos del vector en la pantalla, y en nivel 1 escribimos el tamaño del vector como un lista, por ejemplo, 1 ENTER 2 ENTER 3 ENTER ← {} 3 ENTER ← PRG TYPE →ARRY.

Para construir un vector columna de n elementos, escriba los elementos del vector en la pantalla, y en nivel 1 escriba la lista {n 1}. Por ejemplo, 1 ENTER 2 ENTER 3 ENTER ← {} 1 → , 3 ENTER ← PRG TYPE →ARRY.

Función DROP

Esta función tiene el mismo efecto que la tecla de cancelación (⬅).

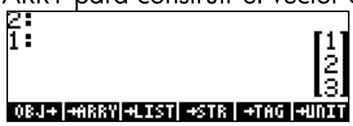
Transformar un vector fila a un vector columna

Ilustramos la transformación con el vector [1,2,3]. Escriba este vector en la pantalla RPN para seguir el ejercicio. Para transformar un vector fila en un vector columna, necesitamos ejecutar las operaciones siguientes en la pantalla RPN:

1 - Descomponer el vector con la función OBJ→

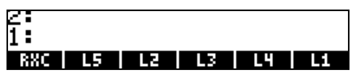
2 - Presionar [/] [+] para transformar la lista en el nivel 1: de {3} a {3,1}

3 - Utilizar la función →ARRY para construir el vector columna



Estos tres pasos se pueden incorporarse en un programa UserRPL, escrito de esta manera (en modo RPN): [→] « » [←] PRG TYPE OBJ→ [/] [+] →ARRY [ENTER] ['] [ALPHA] [ALPHA] [R] [X] [C] [ENTER] [STO▶]

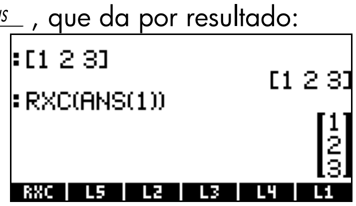
Una nueva variable, RXC, estará disponible en las teclas de menú después de presionar [VAR]:



Presione [→] RXC para ver el programa contenido en la variable RXC:

<< OBJ→ 1 + →ARRY >>

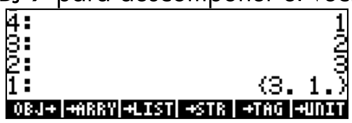
Esta variable, RXC, puede utilizarse para transformar directamente un vector fila a un vector columna. En modo RPN, escriba el vector fila, y después presione RXC. Intente, por ejemplo: [1,2,3] [ENTER] RXC.
Después de definir esta variable, podemos utilizarla en modo ALG para transformar un vector fila en un vector columna. Cambie el modo su calculadora a ALG e intente el procedimiento siguiente: [1,2,3] [ENTER] [VAR] RXC [←] () [←] ANS , que da por resultado:



Transformar un vector columna a un vector fila

Para ilustrar esta transformación, escribiremos el vector columna `[[1],[2],[3]]` en modo RPN. Entonces, siga el ejercicio siguiente para transformar un vector de la fila en un vector de la columna:

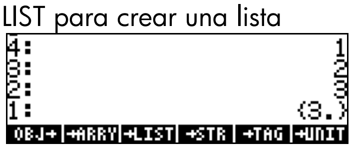
1 - Utilizar la función OBJ→ para descomponer el vector columna



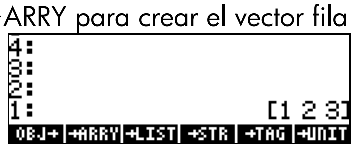
2 - Utilizar la función OBJ→ para descomponer la lista el nivel 1:

3 - Presionar la tecla [◄] (también conocida como la función DROP) para eliminar el número en el nivel 1:

4 - Utilizar la función →LIST para crear una lista



5 - Utilizar la función →ARRY para crear el vector fila



Estos cinco pasos se pueden incorporarse a un programa UserRPL escrito como (en modo RPN):

[→] « » [←] PRG TYPE OBJ→ OBJ→
[←] PRG STACK DROP [←] PRG TYPE →LIST →ARRY [ENTER]
['] [ALPHA] [ALPHA] [C] [X] [R] [ENTER] [STO►]

Una nueva variable, CXR, estará disponible en las teclas de menú después de presionar [VAR]:

Presione ↱ CXR para ver el programa contenido en la variable CXR:

<< OBJ→ OBJ→ DROP →ARRY >>

Esta variable, CXR, puede utilizarse para transformar directamente un vector columna a un vector fila. En modo RPN, escriba el vector columna, y después presione CXR. Intente, por ejemplo: [[1],[2],[3]] ENTER CXR. Después de definir la variable CXR, podemos utilizarla en modo ALG para transformar un vector fila en un vector columna. Cambie el modo su calculadora a ALG e intente el procedimiento siguiente:

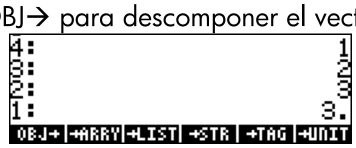
[[1],[2],[3]] ENTER VAR CXR ↰ () ↰ ANS

que da por resultado:

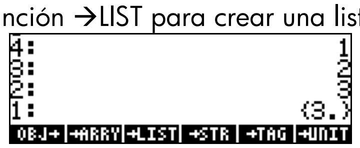
Transformar una lista a un vector

Para ilustrar esta transformación, escribiremos la lista {1,2,3} en modo RPN. Entonces, seguiremos el ejercicio siguiente para transformar una lista en un vector:

1 - Utilizar la función OBJ→ para descomponer el vector columna



2 - Escriba 1 y use la función →LIST para crear una lista en el nivel 1:



3 - Utilizar la función →ARRY para crear el vector

Estos tres pasos se pueden incorporarse a un programa UserRPL escrito como (en modo RPN):

→ « » ← PRG TYPE OBJ→ 1 →LIST →ARRY ENTER
' ALPHA ALPHA L X V ENTER STO▶

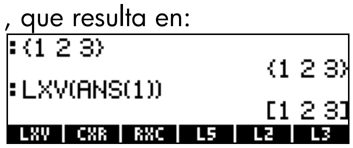
Una nueva variable, LXV, estará disponible en las teclas de menú después de presionar VAR :

Presione → LXV para ver el programa contenido en la variable LXV:

<< OBJ→ 1 →LIST →ARRY >>

Esta variable, LXV, puede utilizarse para transformar directamente una lista a un vector. En modo RPN, escriba la lista, y después presione LXV. Intente, por ejemplo: {1,2,3} ENTER LXV.

Después de definir la variable LXV, podemos utilizarla en modo ALG para transformar una lista a un vector. Cambie el modo su calculadora a ALG e intente el procedimiento siguiente: {1,2,3} ENTER VAR
LXV ← () ← ANS , que resulta en:

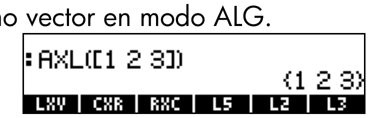


Transformar un vector (o matriz) a una lista

Para transformar un vector en una lista, la calculadora provee la función AXL. Usted puede encontrar esta función a través del catálogo de funciones, como se muestra a continuación:

→ CAT ALPHA ALPHA A X L ALPHA OK

Como ejemplo, aplicar la función AXL al vector [1,2,3] en modo RPN usando: [1,2,3] ENTER AXL. La pantalla siguiente muestra la aplicación de la función AXL al mismo vector en modo ALG.



Capítulo 10
Creación y manipulación de matrices

Este capítulo muestra un número de ejemplos dirigidos a crear matrices en la calculadora y demostrar la manipulación de los elementos de las mismas.

Definiciones

Una matriz es simplemente un arreglo rectangular de objetos (números, objetos algebraicos) con cierto número de filas y de columnas. Una matriz **A** con n filas y m columnas tendrá, por lo tanto, n×m elementos. Un elemento genérico de la matriz es representado por la variable indexada a_{ij}, el correspondiente a la fila i y la columna j. Con esta notación podemos escribir la matriz **A** como **A** = $[a_{ij}]_{n\times m}$. La matriz completa se demuestra a continuación:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Una matriz es cuadrada si m = n. La transpuesta de una matriz se construye al intercambiar las filas con las columnas y viceversa. Así, la transpuesta de la matriz **A**, es $\mathbf{A}^T = [(a^T)_{ij}]_{m\times n} = [a_{ji}]_{m\times n}$. La diagonal principal de una matriz cuadrada es la colección de elementos a_{ii}. Una matriz identidad, $\mathbf{I}_{n\times n}$, es una matriz cuadrada cuyos elementos diagonales principales son todos igual 1, y todos los elementos restantes son cero. Por ejemplo, una matriz identidad 3×3 se escribe como

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una matriz identidad puede escribirse como $\mathbf{I}_{n\times n} = [\delta_{ij}]$, en la cual δ_{ij} es una función conocida como la función delta de Kronecker, y se define como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & if\ i = j \\ 0, & if\ i \neq j \end{cases}.$$

Escritura de matrices en la pantalla

En esta sección se muestran dos formas diferentes de escribir matrices en la pantalla: (1) utilizando el editor de matrices, y (2) escribiendo las matrices directamente en la pantalla.

Utilizando el editor de matrices

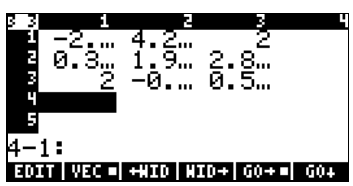
Como se hizo con los vectores (véase el Capítulo 9), las matrices pueden escribirse utilizando el editor o escritor de matrices. Por ejemplo, para escribir la matriz:

$$\begin{bmatrix} -2.5 & 4.2 & 2.0 \\ 0.3 & 1.9 & 2.8 \\ 2 & -0.1 & 0.5 \end{bmatrix},$$

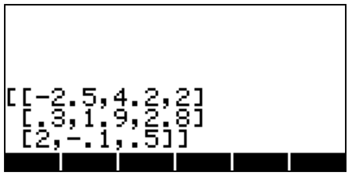
Primero, actívese el escritor de matrices ← MTRW . Asegúrese que la opción GO→■ ha sido seleccionada. A continuación utilícense las siguientes teclas:

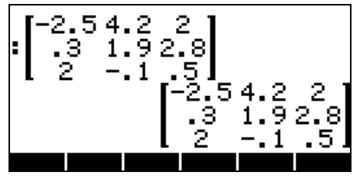
2 • 5 +/- ENTER 4 • 2 ENTER 2 ENTER ▼ ◄ ◄ ◄
• 3 ENTER 1 • 9 ENTER 2 • 8 ENTER
2 ENTER • 1 +/- ENTER • 5 ENTER

Al terminar este ejercicio, la pantalla del escritor de matrices lucirá como se muestra a continuación:

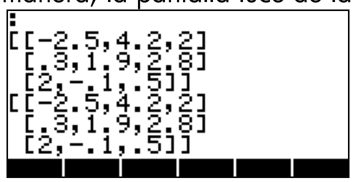


Presiónese ENTER una vez más para colocar la matriz en al pantalla (stack). Utilizando el modo ALG, las siguientes figuras muestran la pantalla antes y después de presionar la tecla ENTER.





Si se ha seleccionado la opción Textbook para la pantalla (utilizando MODE DISP y marcando la opción ✓Textbook), la matriz lucirá como se mostró anteriormente. De otra manera, la pantalla luce de la siguiente forma:



La pantalla en modo RPN lucirá muy similar a estas pantallas.

Nota: Más detalles en el uso del escritor de matrices se presentaron en el Capítulo 9.

Escribiendo la matriz directamente en la pantalla

Para escribir la matriz anterior directamente en la pantalla utilícese:

← [ ]
← [ ] 2 . 5 +/- → , 4 . 2 → , 2 ▶
→ ,
← [ ] . 3 → , 1 . 9 → , 2 . 8 ▶
→ ,
← [ ] 2 → , . 1 +/- → , . 5

De tal manera, para escribir una matriz directamente en la pantalla ábranse un par de corchetes (← [ ]) y enciérrese cada fila en la matriz dentro de un par de corchetes adicionales (← [ ]). Utilícense comas (→ , .) para separar los elementos de cada fila, así como para separar los corchetes entre filas de la matriz. (**Nota**: En modo RPN, usted puede omitir los corchetes internos después de que el primer conjunto de corchetes ha sido escrito, así, en vez de escribir, por ejemplo [[1 2 3] [4 5 6] [7 8 9]], escriba solamente [[1 2 3] 4 5 6 7 8 9].)

Para futura referencia, almacénese esta matriz en la variable A. En modo ALG, utilícese STO▶ ALPHA A . En modo RPN, utilícese ' ALPHA A STO▶ .

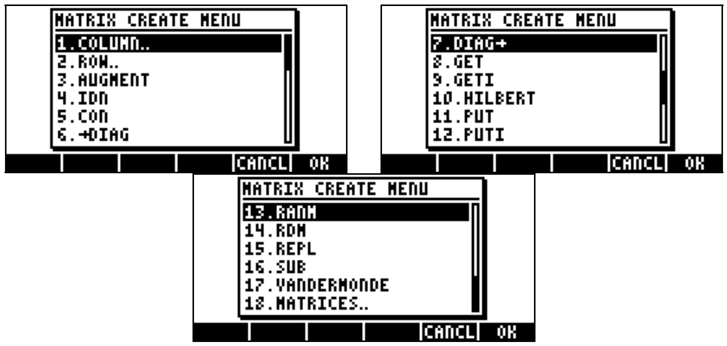
Creación de matrices con funciones de la calculadora

Algunas matrices pueden ser creadas usando las funciones de la calculadora disponibles ya sea en el sub-menú MTH/MATRIX/MAKE dentro del menú MTH (← MTH),

o en el menú MATRICES/CREATE disponible usando ← MATRICES :

El sub-menú MTH/MATRIX/MAKE (llamémosle el menú MAKE) contiene la función siguientes:

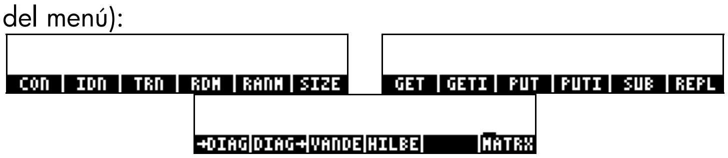
mientras que el sub-menú MATRICES/CREATE (llamémosle el menú CREATE) contiene las funciones siguientes:



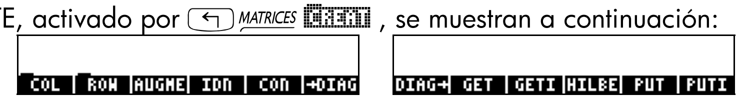
Como usted puede ver de explorar estos menús (MAKE y CREATE), ambos tienen las mismas funciones GET, GETI, PUT, PUTI, SUB, REPL, RDM, RANM, HILBERT, VANDERMONDE, IDN, CON, →DIAG, y DIAG→. El menú CREATE incluye los sub-menús COLUMN y ROW, que están también disponibles usando el menú MTH/MATRIX. El menú MAKE incluye las función SIZE, que el menú CREATE no incluye. Básicamente, sin embargo, ambos menús, MAKE y CREATE, proveer del usuario el mismo conjunto de funciones. En los ejemplos que siguen, demostraremos cómo tener acceso a funciones con el uso del menú de matrices MAKE. Al final de esta sección presentamos una tabla con las teclas requeridas para obtener las mismas funciones la bandera de sistema 117 fija a SOFT menus.

Si usted ha fijado esa bandera del sistema (bandera117) a SOFT menus, el menú MAKE estará disponible con la secuencia: ← MTH MATRX MAKE

Las funciones disponibles se mostrarán como etiquetas de las teclas del menú como se muestra a continuación (presione NXT para mostrar la siguiente página del menú):



Con la bandera de sistema 117 fija a SOFT menus, las funciones del menú CREATE, activado por ← MATRICES CREAT , se muestran a continuación:

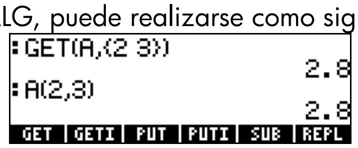


En las secciones siguientes presentamos aplicaciones de las funciones de los menús de matrices MAKE y CREATE.

Funciones GET y PUT

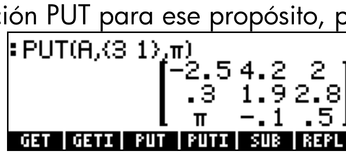
Las funciones GET, GETI, PUT, y PUTI, operan con matrices de una manera similar como con listas o vectores, es decir, usted necesita proporcionar la localización del elemento al cual usted desea aplicar GET o PUT. Sin embargo, mientras que en listas y vectores solamente se requiere un índice para identificar un elemento, en matrices necesitamos una lista de dos índices { fila, columna } para identificar elementos de la matriz. Ejemplos del uso de GET y PUT se presentan a continuación.

Utilicemos la matriz que almacenamos en la variable A para demostrar el uso de las funciones GET y PUT. Por ejemplo, la extracción del elemento a_{23} de la matriz A, en modo ALG, puede realizarse como sigue:



Nótese que logramos el mismo resultado simplemente escribiendo A(2,3) y presionando ENTER. En modo de RPN, este ejercicio se lleva a cabo escribiendo ENTER 3 ENTER GET, o usando A(2,3) ENTER.

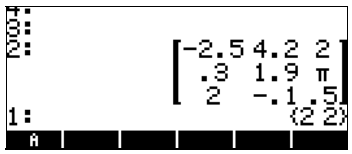
Suponer que deseamos colocar el valor 'π' en el elemento a_{31} de la matriz. Podemos utilizar la función PUT para ese propósito, por ejemplo,

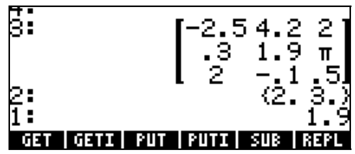


En modo RPN usted puede utilizar: VAR {3,1} ENTER ← π PUT.
Alternativamente, en modo de RPN usted puede utilizar:
← π ' A(2,3) ENTER STO▸ . Ver el contenido de la variable A después de esta operación, utilice .

Funciones GETI y PUTI

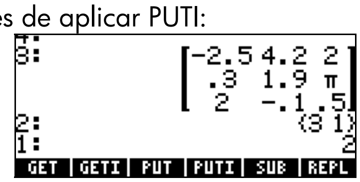
Las funciones PUTI y GETI se usan en programas UserRPL puesto que mantienen información sobre el índice para el uso repetido de las funciones PUT y GET. La lista del índice en matrices varía por las columnas primero. Para ilustrar su uso, proponemos el ejercicio siguiente en modo de RPN: {2,2} ENTER GETI. Las figuras siguientes muestran la pantalla RPN antes y después de usar la función GETI:

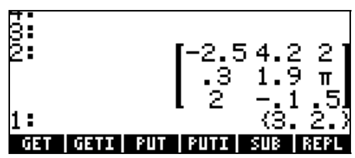




Nótese que la pantalla está preparada para un uso posterior de GETI o GET, aumentando en 1 el índice original de la columna, (es decir, de {2,2} a {2,3}), a la vez que muestra el valor extraído, a saber A(2,2) = 1.9, en el nivel 1.

Ahora, suponer que usted desea colocar el valor 2 en el elemento {3 1} al usar PUTI. Aún en modo RPN, use las teclas siguientes: ← ←{ 3 1 } ENTER 2 ENTER PUTI. La figura siguiente muestra la pantalla RPN antes y después de aplicar PUTI:

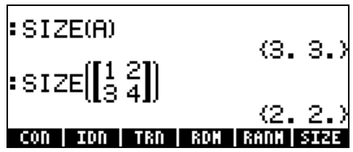




En este caso, el 2 fue substituido en la posición {3 1}, es decir, actualmente A(3,1) = 2, y el índice de la columna fue aumentado en 1 (por columnas primero), es decir, de {3,1} a {3,2}. La matriz está en el nivel 2, y la lista con los índices está en el nivel 1.

Función SIZE

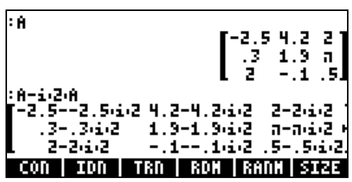
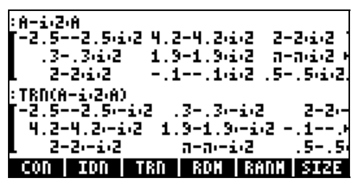
La función SIZE provee una lista que muestra el número de filas y de columnas de la matriz en nivel 1. La pantalla siguiente muestra un par de aplicaciones de la función SIZE en modo ALG:



En modo de RPN, estos ejercicios son realizados usando SIZE, y [[1,2],[3,4]] `ENTER` SIZE .

Función TRN

La función TRN se utiliza producir la transconjugada de una matriz, es decir, la transpuesta (TRAN) seguido por su conjugado complejo (CONJ). Por ejemplo, las pantallas siguientes muestran la matriz original en la variable A y una transconjugada, usando caracteres pequeños (ver Capítulo 1):

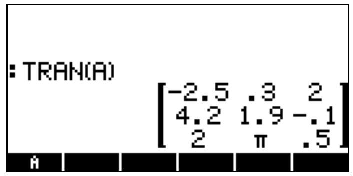



Si el argumento es una matriz real, TRN produce simplemente la transpuesta de la matriz. Intente, por ejemplo, TRN(A), y compare con TRAN(A).

En modo RPN, la transconjugada de la matriz **A** es calculado usando TRN.

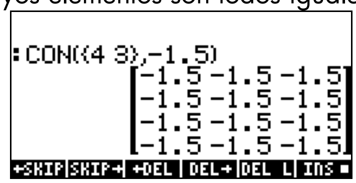
Nota: La calculadora también incluye la función TRAN el sub-menú MATRICES/OPERATIONS:

Por ejemplo, en modo ALG:



Función CON

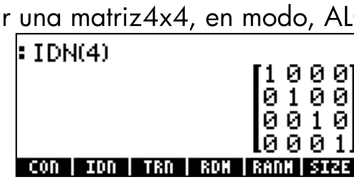
La función toma como argumentos una lista de dos elementos, correspondiendo al número de la fila y a las columnas de la matriz que se generará, y un valor constante. La función CON genera una matriz con los elementos constantes. Por ejemplo, en modo de ALG, el comando siguiente crea una matriz 4×3 cuyos elementos son todos iguales a –1.5:



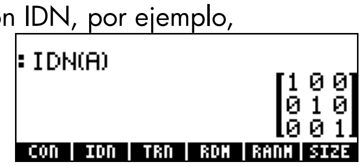
En modo de RPN, esto se logra usando {4,3} ENTER 1 . 5 +/- ENTER CON.

Función IDN

La función IDN (IDeNtidad) crea una matriz de la identidad dadas su dimensión. Recuerde que una matriz identidad tiene que ser una matriz cuadrada, por lo tanto, sólo un valor se requiere para describirla totalmente. Por ejemplo, para crear una matriz4x4, en modo, ALG use:



Usted puede también utilizar una matriz cuadrada ya existente como el argumento de la función IDN, por ejemplo,



La matriz identidad que resulta tendrá las mismas dimensiones que la matriz argumento. El usar una matriz no cuadrada (rectangular) como la argumento de IDN producirá un error.

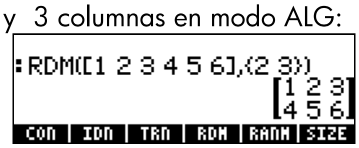
En modo RPN, los dos ejercicios demostrados anteriormente son creados usando: `4` `ENTER` `IDN` y `IDN`.

Función RDM

La función RDM (Re-DiMensión) se utiliza para re-escribir vectores y matrices como matrices y vectores. La entrada a la función consiste en el vector o la matriz original seguida por una lista de un solo número, si se convierte a un vector, o a dos números, si se convierte a una matriz. En el caso primero, el número representa la dimensión del vector, en el último, el número de filas y columnas de la matriz. Los ejemplos siguientes ilustran el uso de la función RDM:

Re-dimensionando un vector a una matriz

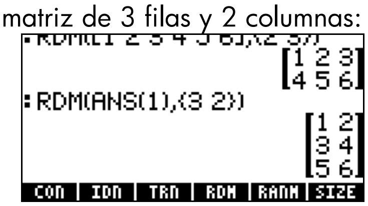
El ejemplo siguiente demuestra cómo re-dimensionar un vector de 6 elementos a una matriz de 2 filas y 3 columnas en modo ALG:



En modo RPN, podemos utilizar `[1,2,3,4,5,6]` `ENTER` `{2,3}` `ENTER` `RDM` para producir la matriz mostrada arriba.

Re-dimensionando una matriz a otra matriz

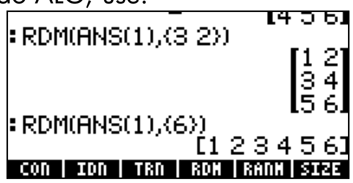
En modo de ALG, ahora utilizamos la matriz creada arriba y la re-dimensionamos a una matriz de 3 filas y 2 columnas:



En modo RPN, utilizamos simplemente {3,2} ENTER RDM.

Re-dimensionando una matriz a un vector

Para re-dimensionar una matriz a un vector, utilizamos como argumentos la matriz seguida por una lista que contiene el número de elementos en la matriz. Por ejemplo, para convertir la matriz del ejemplo anterior a un vector de longitud 6, en el modo ALG, use:

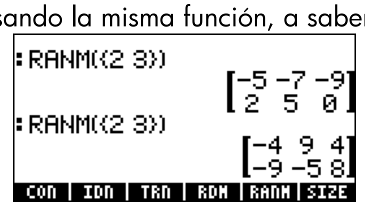


En modo RPN, asumimos que la matriz está en pantalla y usamos {6} ENTER RDM.

> **Nota**: La función RDM provee una manera más directa y más eficiente de transformar listas a arreglos y viceversa, que los procedimientos demostrados al final del Capítulo 9.

Función RANM

La función RANM (inglés, RANdom Matriz, o Matriz Aleatoria) generará una matriz con elementos siendo números enteros aleatorios dada una lista con el número de filas y de columnas (es decir, las dimensiones de la matriz). Por ejemplo, en modo de ALG, dos diversas matrices 2x3 con los elementos al azar son producidas usando la misma función, a saber, RANM({2,3}) :

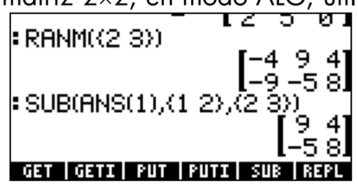


En modo RPN, utilice {2,3} ENTER RANM.

Obviamente, los resultados que usted obtenga en su calculadora serán con toda certeza diferentes que los resultados anteriores. Los números aleatorios generados son números enteros distribuidos uniformemente en el rango [-10,10], es decir, cada de esos 21 números tiene la misma probabilidad de ser seleccionado. La función RANM es útil para generar matrices de cualquier tamaño para ilustrar operaciones y funciones con matrices.

Función SUB

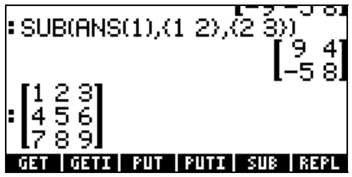
La función SUB extrae una sub-matriz de una matriz existente, siempre y cuando se indiquen las posiciones inicial y final de la sub-matriz. Por ejemplo, si deseamos extraer los elementos a_{12}, a_{13}, a_{22}, y a_{23} del resultado anterior, como una sub-matriz 2×2, en modo ALG, utilice:



En modo RPN, si se asume que la matriz original 2x3 está ya en pantalla, use {1,2} `ENTER` {2,3} `ENTER` SUB.

Función REPL

La función REPL substituye o inserta una sub-matriz en una matriz más grande. La entrada para esta función es la matriz donde ocurrirá el reemplazo, la localización en donde el reemplazo comienza, y la matriz que se insertará. Por ejemplo, manteniendo la matriz que heredamos del ejemplo anterior, escriba la matriz: [[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]] . En modo ALG, la pantalla de la izquierda muestra la nueva matriz antes de presionar `ENTER`. La pantalla de la derecha muestra el uso de la función RPL para sustituir la matriz en ANS(2), la matriz 2×2, dentro de la matriz 3×3 localizada actualmente en ANS(1), comenzando en la posición {2,2}:

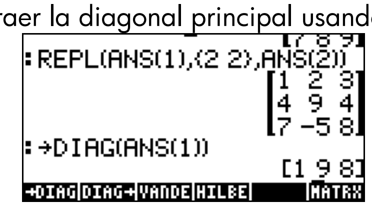


Si trabaja en el modo de RPN, y si se asume que la matriz 2×2 está originalmente en la pantalla, seguimos de la forma siguiente:

`[[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]` ENTER ▷ (esta última tecla intercambia el contenido de los niveles 1 y 2) `{1,2}` ENTER ▷ (otro intercambio de los niveles 1 y 2) `REPL`.

Función →DIAG

La función →DIAG toma la diagonal principal de una matriz cuadrada de dimensiones nxn, y crea un vector de dimensión n que contiene los elementos de la diagonal principal. Por ejemplo, para la matriz que resultó del ejercicio anterior, podemos extraer la diagonal principal usando:



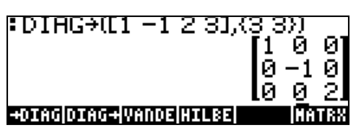
En modo RPN, con la matriz 3×3 en la pantalla, tenemos que activar la función `→DIAG` para obtener el mismo resultado anterior.

Función DIAG→

La función DIAG→ toma un vector y una lista de las dimensiones de la matriz { filas, columnas }, y crea una matriz diagonal con la diagonal principal substituida por los elementos apropiados del vector. Por ejemplo,

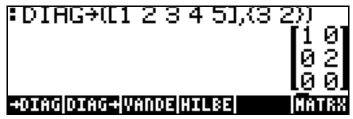
`DIAG→([1,-1,2,3],{3,3})`

produce una matriz diagonal con los primeros 3 elementos del vector argumento:



En modo RPN, podemos utilizar [1,-1,2,3] ENTER {3,3} ENTER DIAG→ para obtener el mismo resultado anterior.

Otro ejemplo del uso de la función DIAG→ se muestra a continuación, en modo ALG:



En modo RPN, use [1,2,3,4,5] ENTER {3,2} ENTER DIAG→ .

En este caso una matriz 3x2 debía ser creada usando como elementos diagonales principales tantos elementos como sea posible del vector [1,2,3,4,5]. La diagonal principal, para una matriz rectangular, comienza en la posición (1,1) y abarca la posición (2,2), (3,3), etc. hasta que el número de filas o columnas se agota. En este caso, el número de columnas (2) fue agotado antes del número de filas (3), por lo tanto, la diagonal principal incluye solamente los elementos en posiciones (1,1) y (2,2). De manera que solamente los primeros dos elementos del vector se requieren para formar la diagonal principal.

Función VANDERMONDE

La función VANDERMONDE genera la matriz de Vandermonde de dimensión n basada en una lista dada de datos. La dimensión n es, por supuesto, la longitud de la lista. Si la lista de la entrada consiste de los objetos $\{x_1, x_2,\ldots x_n\}$, entonces, una matriz de Vandermonde en la calculadora es una matriz que contiene los siguientes elementos:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, el ejemplo siguiente es en modo ALG para la lista {1,2,3,4}:

En modo de RPN, escriba {1,2,3,4} ENTER VANDERMONDE.

Función HILBERT

La función HILBERT crea la matriz de Hilbert que corresponde a una dimensión n. Por la definición, la matriz n×n de Hilbert es $\mathbf{H}_n = [h_{jk}]_{n\times n}$, de modo que

$$h_{jk} = \frac{1}{j+k-1}$$

La matriz de Hilbert tiene uso en el ajuste numérico de curvas el método de mínimos cuadrados.

Un programa para construir una matriz a partir listas

En esta sección proporcionamos un par de programas UserRPL para construir una matriz a partir de un número de listas de objetos. Las listas pueden representar las columnas de la matriz (programa CRMC) o filas de la matriz (programa CRMR). Los programas se escriben con la calculadora fijada al modo de RPN, y las instrucciones para las teclas se dan para la bandera de sistema 117 fija a SOFT menus. Esta sección se provee para que Ud. practique el acceso a funciones de programación en la calculadora. Los programas se enumeran debajo mostrando, en el lado izquierdo, las teclas necesarias para escribir los pasos del programa, y, en el lado derecho, los caracteres escritos en la pantalla al activar esas teclas. Primero, presentamos los pasos necesarios para producir el programa CRMC.

Las listas representan columnas de la matriz

El programa CRMC permite construir una matriz p×n (es decir, p filas, n columnas) a partir de n listas de p elementos cada una. Para crear el programa úsense las instrucciones siguientes:

Secuencia de teclas:	Produce:
[↱] [« »]	«
[↰] [PRG] STACK DUP	DUP
[↱] [→] [SPC] [ALPHA] [↰] [N]	→ n
[↱] [« »]	<<
[1] [↰] [PRG] STACK SWAP	1 SWAP
[↰] [PRG] BRCH FOR FOR	FOR
[ALPHA] [↰] [J]	j
[↰] [PRG] TYPE OBJ→	OBJ→
→ARRY	→ARRY
[↰] [PRG] BRCH IF IF	IF
[ALPHA] [↰] [J] [SPC]	j
[ALPHA] [↰] [N]	n
[↰] [PRG] TEST <	<
[↰] [PRG] BRCH IF THEN	THEN
[ALPHA] [↰] [J] [SPC] [1] [+]	j 1 +
[↰] [PRG] STACK [NXT] ROLL	ROLL
[↰] [PRG] BRCH IF END	END
[↰] [PRG] BRCH FOR NEXT	NEXT
[↰] [PRG] BRCH IF IF	IF
[ALPHA] [↰] [N] [SPC] [1]	n 1
[↰] [PRG] TEST >	>
[↰] [PRG] BRCH IF THEN	THEN
[1] [SPC]	1
[ALPHA] [↰] [N] [SPC] [1] [−]	n 1 -
[↰] [PRG] BRCH FOR FOR	FOR
[ALPHA] [↰] [J] [SPC]	j
[ALPHA] [↰] [J] [SPC] [1] [+]	j 1 +
[↰] [PRG] STACK [NXT] ROLL	ROLL
[↰] [PRG] BRCH FOR NEXT	NEXT
[↰] [PRG] BRCH IF END	END
[ALPHA] [↰] [N] [SPC]	n
[↰] [MTH] MATRX COL COL→	COL→
[ENTER]	El programa se exhibe en nivel 1

Para almacenar el programa: ['] [ALPHA] [ALPHA] [C] [R] [M] [C] [ALPHA] [STO▶]

Nota: si usted almacena este programa en su directorio HOME estará disponible desde cualquier otro sub-directorio que usted utilice.

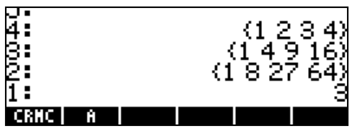
Para ver el contenido del programa use VAR ↱ CRMC. El listado del programa es el siguiente:

```
« DUP → n « 1 SWAP FOR j OBJ→ →ARRY IF j n < THEN j 1 +
 ROLL END NEXT IF n 1 > THEN 1 n 1 - FOR j j 1 + ROLL
 NEXT END n COL→ » »
```

Para utilizar este programa, en modo de RPN, escriba las n listas en el orden que usted las desea como columnas de la matriz, escriba el valor de n, y presione CRMC. Como ejemplo, intente el ejercicio siguiente:

{1,2,3,4} ENTER {1,4,9,16} ENTER {1,8,27,64} ENTER 3 ENTER CRMC

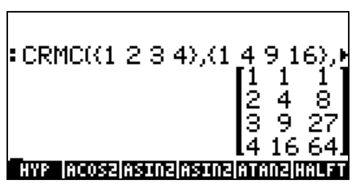
Las pantallas siguientes muestran la pantalla RPN antes y después de activar el programa CRMC:



Para utilizar el programa en modo ALG, presione CRMC seguido por un par de paréntesis (↰ ()). Dentro de los paréntesis escriba las listas de los datos que representan las columnas de la matriz, separadas por comas, y finalmente, una coma, y el número de columnas. La instrucción es la siguiente:

```
CRMC({1,2,3,4}, {1,4,9,16}, {1,8,27,64}, 3)
```

La pantalla ALG con la ejecución del programa CRMC se muestra a continuación:



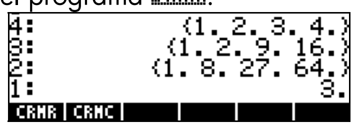
Las listas representan filas de la matriz

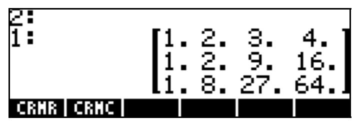
El programa anterior se puede modificar fácilmente para crear una matriz cuando las listas de entrada se convertirán en las filas de la matriz. El único cambio que se realizará es cambiar COL→ por ROW→ en el listado del programa. Para realizar este uso del cambio:

↱ CRMC	Liste programa CRMC
▽ ↱ ▽ △ ◁ ◁ ◁	Moverse al final del programa
← ← ←	Remover COL
ALPHA ALPHA R O W ALPHA ENTER	Escribir ROW

Para almacenar el programa: ' ALPHA ALPHA C R M R ALPHA STO▸

{1,2,3,4} ENTER {1,4,9,16} ENTER {1,8,27,64} ENTER 3 ENTER CRMR
Las pantallas siguientes demuestran la pantalla RPN antes y después de activar el programa CRMR:





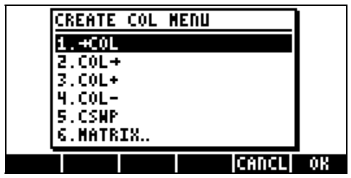
Estos programas pueden ser útiles para los usos estadísticos, crear específicamente la matriz estadística ΣDAT. Los ejemplos del uso de éstos programan se demuestran en los últimos capítulos.

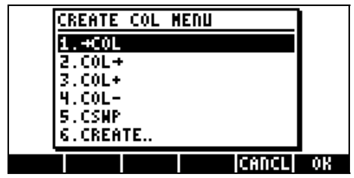
Manipulación de matrices por columnas

La calculadora proporciona un menú con las funciones para la manipulación de matrices operando en sus columnas. Estas funciones están disponibles a través del menú MTH/MATRIX/COL.. usando las teclas: (↰ MTH). El menú se muestra en la figura siguiente con la bandera 117 del sistema fija a CHOOSE boxes:

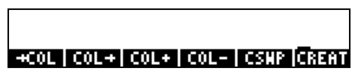
Las funciones se presentan también en el sub-menú MATRICES/CREATE/COLUMN:

Ambos sub-menús mostrarán las mismas funciones:





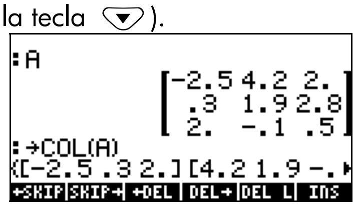
Cuando la bandera 117 del sistema se fija a SOFT menus, el menú COL es accesible a través de ← MTH MATRX MAKE COL , o a través de ← MATRICES CREAT COL . Ambos procedimientos mostrarán el mismo sistema de funciones:

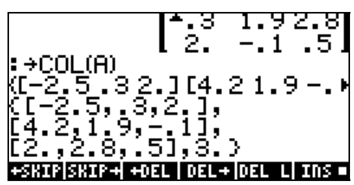


La operación de estas funciones se presenta a continuación.

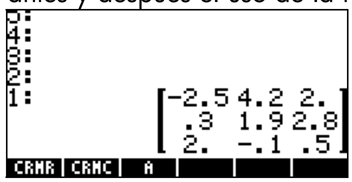
Función →COL

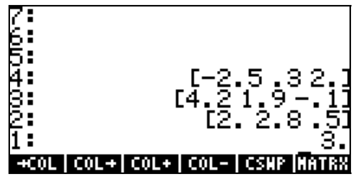
La función →COL toma como argumento una matriz y la descomponen en los vectores que corresponden a sus columnas. Una aplicación de la función →COL en modo ALG se muestra abajo. La matriz usada se ha almacenado anteriormente en la variable A. La matriz se muestra en la figura a la izquierda. La figura a la derecha muestra la matriz descompuesta en columnas. Para ver el resultado completo, utilice el editor de línea (activado al usar la tecla ▽).





En modo RPN, usted necesita listar la matriz en la pantalla, y activar la función →COL, es decir, →COL. La figura abajo demuestra a pantalla de RPN antes y después el uso de la función →COL.



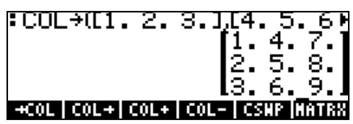


En este resultado, la primera columna ocupa el nivel más alto de la pantalla después de la descomposición, y el nivel 1 de la pantalla es ocupado por el número de columnas de la matriz original. La matriz no sobrevive la descomposición, es decir, ya no estará disponible en la pantalla.

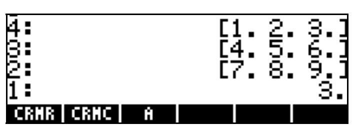
Función COL→

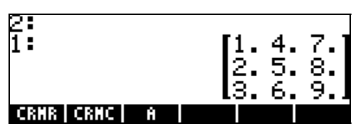
La función COL→ tiene el efecto opuesto de la función →COL, es decir, dados n vectores de la misma longitud, y el número n, la función COL→ construye una matriz poniendo los vectores de entrada como columnas de la matriz que resulta. He aquí un ejemplo en modo ALG. El comando usado es

COL→([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9],3)



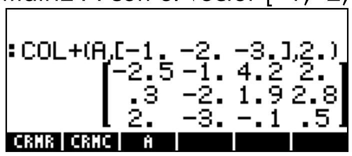
En modo RPN, coloque los n vectores en los niveles n+1, n, n-1,…,2, y el número n en nivel de la pantalla 1. De esta manera, la función COL→ coloca los vectores como columnas en la matriz que resulta. La figura siguiente demuestra la pantalla RPN antes y después que se usa la función COL→.



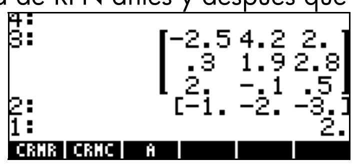


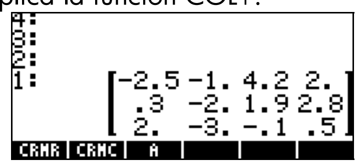
Función COL+

La función COL+ toma como argumento una matriz, un vector con la misma longitud que el número de filas en la matriz, y un número entero n que representa la localización de una columna. La función COL+ inserta el vector en la columna n de la matriz. Por ejemplo, en modo de ALG, sustituiremos la segunda columna en la matriz A con el vector [-1, -2, -3], es decir,



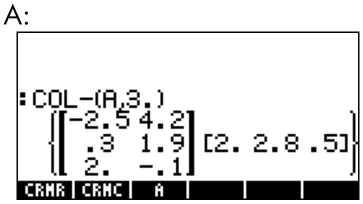
En modo RPN, escriba primero la matriz, y después el vector, y el número de la columna, antes de aplicar la función COL+. La figura abajo demuestra la pantalla de RPN antes y después que aplica la función COL+.





Función COL-

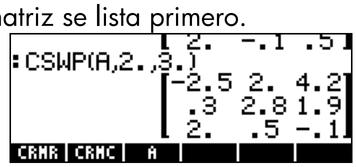
La función COL- toma como argumentos una matriz y un número entero representando la posición de una columna en la matriz. La función produce la matriz original menos una columna, así como la columna extraída mostrada como un vector. He aquí un ejemplo en el modo ALG usando la matriz almacenada en A:



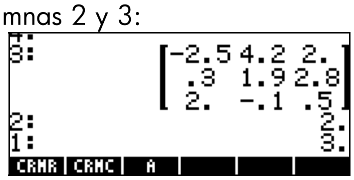
En modo RPN, ponga la matriz en la pantalla primero, entonces escriba el número que representa la localización de la columna, antes de aplicar la función COL-. La figura siguiente muestra la pantalla RPN antes y después de aplicar la función COL-.

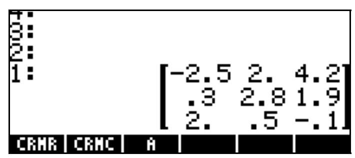
Función CSWP

La función CSWP (inglés, Column SwaP, o intercambio de columnas) toma como argumentos dos índices, digamos, i y j, (representando dos columnas distintas en una matriz), y una matriz, y produce una nueva matriz con las columnas i y j intercambiados. El ejemplo siguiente, en modo ALG, muestra un uso de esta función. Utilizamos la matriz almacenada en la variable A para el ejemplo. Esta matriz se lista primero.



En modo RPN, la función CSWP le deja intercambiar las columnas de una matriz enumerada en la pantalla en nivel 3, cuyos índices se enumeran en los niveles 1 y 2. Por ejemplo, la figura siguiente demuestra la pantalla RPN antes y después de aplicar la función CSWP a la matriz A para intercambiar las columnas 2 y 3:

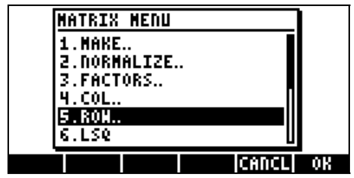




Como usted puede ver, se han intercambiado las columnas que ocuparon originalmente las posiciones 2 y 3. El intercambio de columnas, y de filas (véase abajo), se utiliza comúnmente al solucionar los sistemas de ecuaciones lineares con las matrices. Los detalles de estas operaciones serán dados en un capítulo subsiguiente.

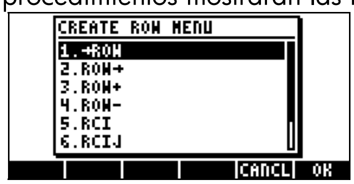
Manipulación de matrices por filas

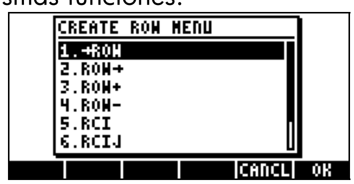
La calculadora proporciona un menú con las funciones para la manipulación de matrices operando en sus filas. Estas funciones están disponibles a través del menú MTH/MATRIX/ROW.. usando las teclas: (⬅ MTH). El menú se muestra en la figura siguiente con la bandera 117 del sistema fija a CHOOSE boxes:



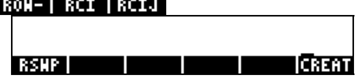
Las funciones se presentan también en el sub-menú MATRICES/CREATE/ROW:

Ambos procedimientos mostrarán las mismas funciones:





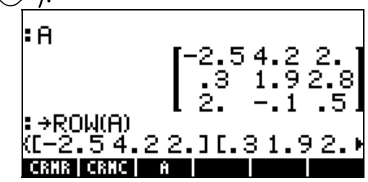
Cuando la bandera 117 del sistema se fija a SOFT menus, el menú ROW es accesible a través de MTH MATRX MAKE ROW, o a través de MATRICES CREAT ROW . Ambos procedimientos mostrarán el mismo sistema de funciones:

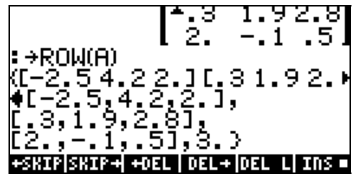


La operación de estas funciones se presenta abajo.

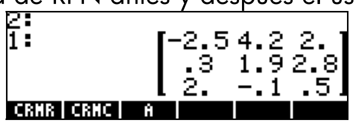
Función →ROW

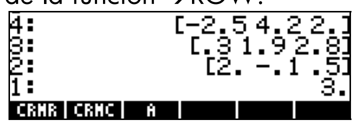
La función →ROW toma como argumento una matriz y la descompone en los vectores que corresponden a sus filas. Un uso de la función →ROW en modo ALG se muestra a continuación. La matriz usada ha sido almacenada anteriormente en la variable A. La matriz se demuestra en la figura a la izquierda. La figura a la derecha demuestra la matriz descompuesta en filas. Para ver el resultado completo, use el editor de línea (activado al presionar la tecla ▽).





En modo RPN, usted necesita listar la matriz en la pantalla, y activar la función →ROW, es decir, →ROW. La figura abajo demuestra a pantalla de RPN antes y después el uso de la función →ROW.





En este resultado, la primera fila ocupa el nivel más alto de la pantalla después de la descomposición, y el nivel 1 de la pantalla es ocupado por el número de filas de la matriz original. La matriz no sobrevive la descomposición, es decir, no está disponible más en la pantalla.

Función ROW→

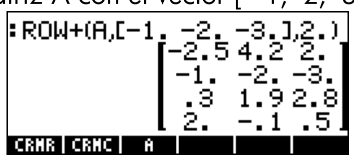
La función ROW→ tiene el efecto opuesto de la función →ROW, es decir, dados n vectores de la misma longitud, y el número n, la función ROW→ construye una matriz poniendo los vectores de la entrada como filas de la matriz que resulta. Aquí está un ejemplo en modo de ALG. El comando usado es:

ROW→([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9],3)

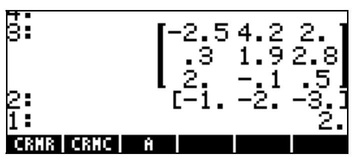
En modo RPN, coloque los n vectores en niveles de la pantalla n+1, n, n-1,…,2, y el número n en nivel 1 de la pantalla. De esta manera, la función ROW→ coloca los vectores como filas en la matriz que resulta. La figura siguiente demuestra la pantalla de RPN antes y después que usa la función ROW→.

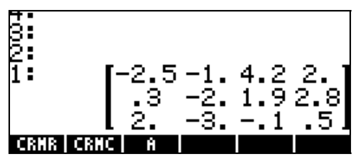
Función ROW+

La función ROW+ toma como argumento una matriz, un vector con la misma longitud que el número de filas en la matriz, y un número n del número entero que representa la localización de una fila.   La función ROW+ inserta el vector en la fila n de la matriz. Por ejemplo, en modo de ALG, insertaremos la segunda fila en la matriz A con el vector [- 1, -2, -3], es decir,



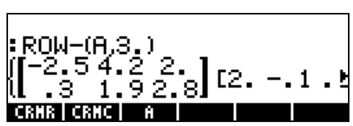
En modo RPN, escriba la matriz primero, entonces el vector, y el número de la fila, antes de aplicar la función ROW+. La figura abajo muestra la pantalla de RPN antes y después que aplica la función ROW+.





Función ROW-

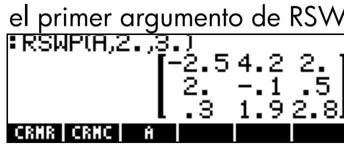
La función ROW- toma como argumento una matriz y un número entero representando la posición de una fila en la matriz. La función produce la matriz original, menos una fila, así como la fila extraída escrita como un vector. He aquí un ejemplo en el modo ALG usando la matriz almacenada en A:



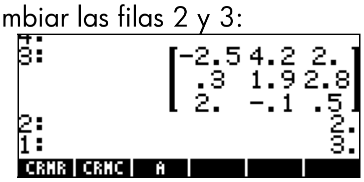
En modo RPN, coloque la matriz en pantalla primero, después escriba el número que representa la localización de la fila antes de aplicar la función ROW-. La figura siguiente muestra la pantalla RPN antes y después de aplica la función ROW-.

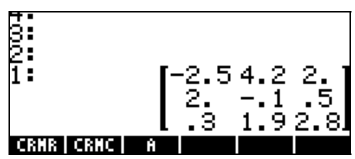
Función RSWP

La función RSWP (inglés, Row SwaP, o intercambio de filas) toma como argumentos dos índices, digamos, i y j, (representando dos filas distintas en una matriz), y una matriz, y produce una nueva matriz con filas i y j intercambiadas. El ejemplo siguiente, en modo ALG, muestra una aplicación de esta función. Utilizamos la matriz almacenada en la variable A para el ejemplo. Esta matriz es el primer argumento de RSWP:



En modo RPN, la función RSWP permite el intercambio de las filas de una matriz listada en el nivel 3 de la pantalla, los índices se listan en los niveles 1 y 2 de la pantalla. Por ejemplo, la figura siguiente demuestra la pantalla RPN antes y después que se aplica la función RSWP a la matriz A para intercambiar las filas 2 y 3:

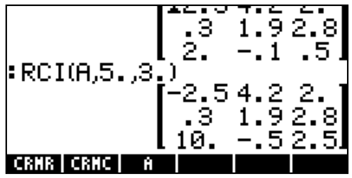




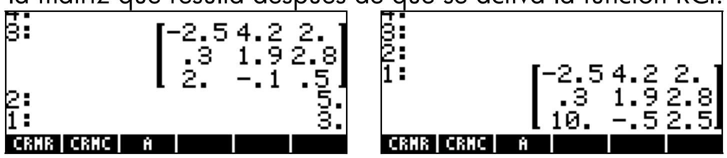
Como usted puede ver, las filas que ocupaban originalmente las posiciones 2 y 3 han sido intercambiadas.

Función RCI

La función RCI significa multiplicar la fila (inglés, Row) I por un valor Constante y sustituir la fila resultante en la misma localización. El ejemplo siguiente, escrito en modo ALG, toma la matriz almacenada en A, y multiplica la fila número 3 por el valor constante 5, sustituyendo la fila por este producto.

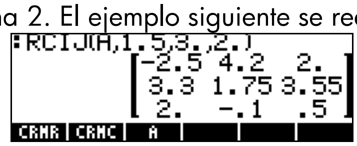


Este mismo ejercicio, ejecutado en modo RPN, se muestra en la figura siguiente. La figura de la izquierda muestra la matriz, el factor y el número de la fila, en los niveles 3, 2, y 1, respectivamente. La figura de la derecha muestra la matriz que resulta después de que se activa la función RCI.

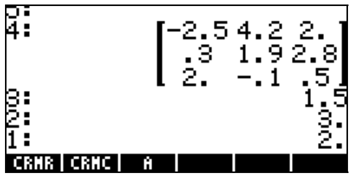
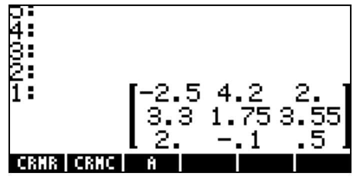


Función RCIJ

La función RCIJ, significa "tome la fila (inglés, Row) I y multiplíquela por una constante C, y después sume la fila resultante a la fila J, reemplazando la fila J con la suma resultante." Este tipo de operación con filas es muy común en el proceso de la eliminación gaussiana o de Gauss-Jordan (más detalles en este procedimiento se presentan en un capítulo posterior). Los argumentos de la función son: (1) la matriz, (2) el valor constante, (3) la fila que se multiplicará por la constante en (2), y (4) la fila que se substituirá por la suma resultante según lo descrito anteriormente. Por ejemplo, tomando la matriz almacenada en la variable A, vamos a multiplicar la columna 3 por 1.5, y la agregamos a la columna 2. El ejemplo siguiente se realiza en modo ALG:



En modo de RPN, escriba primero la matriz, seguida por el valor constante, después por la fila que se multiplicará por el valor constante, y finalmente escriba la fila que será substituida. La figura siguiente muestra la pantalla RPN antes y después de aplicar la función RCIJ bajo las mismas condiciones d el ejemplo en modo ALG mostrado anteriormente:

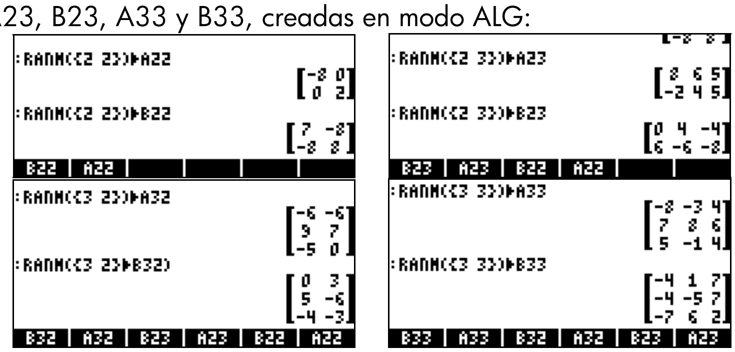
Capítulo 11
Operaciones con matrices y álgebra lineal

En el capítulo 10 introdujimos el concepto de una matriz y presentamos un número de funciones para escribir, crear, o manipular las matrices. En este capítulo presentamos ejemplos de las operaciones y de las aplicaciones de las matrices a los problemas del álgebra linear.

Operaciones con matrices

Las matrices, como otros objetos matemáticos, pueden sumarse y restarse. También pueden ser multiplicadas por un escalar o multiplicarse la una con la otra. Una operación importante en el álgebra lineal es la inversa de una matriz. Detalles de estas operaciones se muestran a continuación.

Para ilustrar las operaciones matriciales, se crearán un cierto número de matrices que se almacenarán en variables. El nombre genérico de las matrices será A*ij* y B*ij*, donde *i* representa el número de filas y *j* el número de las columnas de las matrices. Las matrices que se utilizarán son generadas usando la función RANM (inglés, random matrices, o matrices aleatorias). Si usted intenta este ejercicio en su calculadora va a obtener matrices diferentes de las que se muestran a continuación, a menos que usted los almacene en su calculadora exactamente según se muestran aquí. He aquí las matrices A22, B22, A23, B23, A33 y B33, creadas en modo ALG:

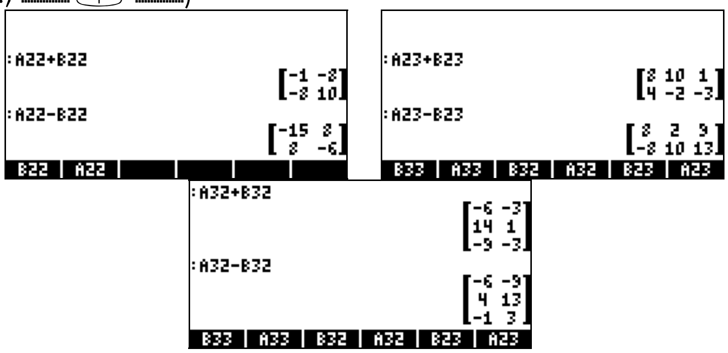


En modo RPN, los pasos a seguir son los siguientes:

```
{2,2} ENTER RANM 'A22' STO▶    {2,2} ENTER RANM 'B22' STO▶
{2,3} ENTER RANM 'A23' STO▶    {2,3} ENTER RANM 'B23' STO▶
{3,2} ENTER RANM 'A32' STO▶    {3,2} ENTER RANM 'B32' STO▶
{3,3} ENTER RANM 'A33' STO▶    {3,3} ENTER RANM 'B33' STO▶
```

Adición y substracción

Considere un par de matrices **A** = $[a_{ij}]_{m\times n}$ y **B** = $[b_{ij}]_{m\times n}$. La adición y la substracción de estas dos matrices es posible solamente si ambas tienen el mismo número de filas y de columnas. La matriz que resulta, **C** = **A** ± **B** = $[c_{ij}]_{m\times n}$ tiene elementos $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$. A continuación se muestran ejemplos de operaciones que utilizan las matrices almacenadas anteriormente en modo ALG(Vg., A22 + B22)



En el modo RPN, los pasos a seguir son los siguientes:

A22 ENTER B22 ENTER +   A22 ENTER B22 ENTER −
A23 ENTER B23 ENTER +   A23 ENTER B23 ENTER −
A32 ENTER B32 ENTER +   A32 ENTER B32 ENTER −

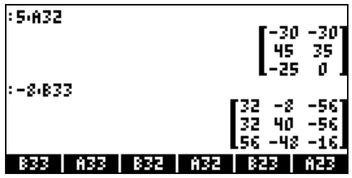
Traducir los ejemplos de ALG a RPN es simple, según lo ilustrado aquí. Los ejemplos restantes de las operaciones de la matriz serán realizados en modo de ALG solamente.

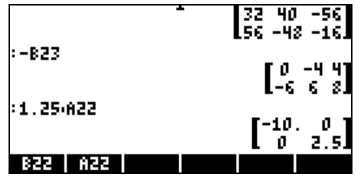
Multiplicación

Existen diferentes operaciones de multiplicación que involucran matrices. Estas operaciones se describen a continuación.

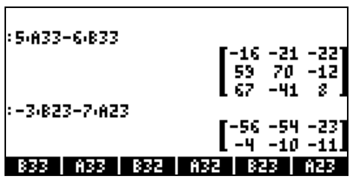
Multiplicación por un escalar

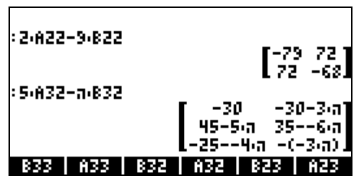
Multiplicación de la matriz **A** = $[a_{ij}]_{m\times n}$ por un escalar k da lugar a la matriz **C** = k**A** = $[c_{ij}]_{m\times n}$ = $[ka_{ij}]_{m\times n}$. En particular, el negativo de una matriz se define por la operación -**A** =(-1)**A** = $[-a_{ij}]_{m\times n}$. Algunos ejemplos de multiplicación de una matriz por un escalar se muestran a continuación:



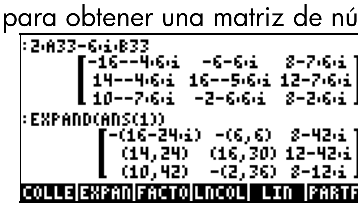


Combinando la adición y la substracción con la multiplicación por un escalar podemos formar combinaciones lineares de las matrices de las mismas dimensiones, Vg..,



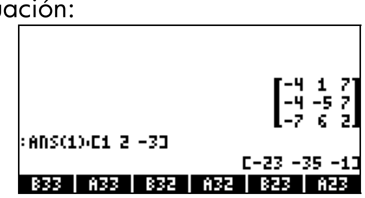


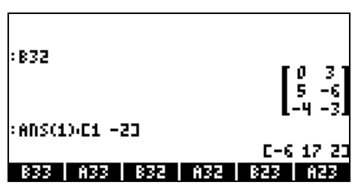
En una combinación linear de matrices, podemos multiplicar una matriz por un número imaginario para obtener una matriz de números complejos, Vg..,



Multiplicación de una matriz con un vector

La multiplicación de una matriz con un vector es posible solamente si el número de columnas de la matriz es igual al número de elementos del vector. Ejemplos de multiplicación de una matriz con un vector se presentan a continuación:





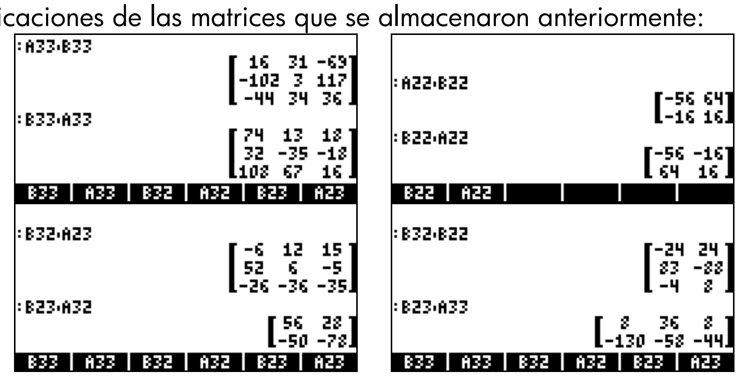
La multiplicación de un vector por una matriz, sin embargo, no está definida. Esta multiplicación puede ejecutarse, como un caso especial de la multiplicación de matrices como se define a continuación.

Multiplicación de matrices

La multiplicación de matrices se define por la expresión $\mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times p}\cdot\mathbf{B}_{p\times n}$, donde $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times p}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{p\times n}$, y $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m\times n}$. Obsérvese que la multiplicación de matrices es posible solamente si el número de columnas en el primer operando es igual al número de filas en el segundo. El elemento genérico c_{ij} del producto se escribe:

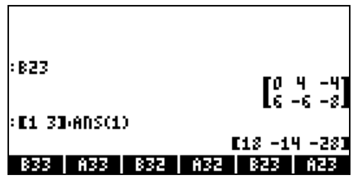
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}, \; for\ i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n.$$

Esto es similar a decir que el elemento en la fila i y la columna j del producto **C**, resulta al multiplicar término a término la fila i de **A** con la columna j de **B**, y agregando los productos de esos términos. La multiplicación de matrices no es conmutativa, es decir, en general, **A**·**B** ≠ **B**·**A**. Es posible que uno de los productos **A**·**B** o **B**·**A** no exista. Las siguientes figuras muestran multiplicaciones de las matrices que se almacenaron anteriormente:



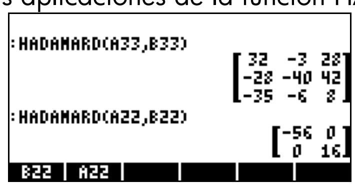
La multiplicación de una matriz por un vector, introducida en la sección anterior, se puede definir como el producto de una matriz m×n con una matriz n×1 (es decir, un vector columna) dando por resultado una matriz m×1 (es decir, otro vector). Para verificar esta aserción verifique los ejemplos presentados en la sección anterior. Así, los vectores definidos en el capítulo 9 son básicamente vectores columna dentro del contexto de la multiplicación de matrices.

El producto de un vector con una matriz es posible si el vector es un vector fila, es decir, una matriz 1×m, la cuál, al multiplicarse con una matriz m×n, produce una matriz1xn (otro vector fila). Para la calculadora poder identificar un vector fila, usted debe utilizar los corchetes dobles para escribirla, por ejemplo,



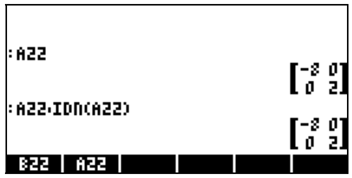
Multiplicación término-a-término

La multiplicación término-a-término de dos matrices de las mismas dimensiones es posible gracias a la función HADAMARD. El resultado es, por supuesto, una matriz de las mismas dimensiones que los operandos. La función HADAMARD está disponible a través del catálogo de funciones (⇨ _CAT_), o a través del sub-menú MATRICES/OPERATIONS (⇦ _MATRICES_). Algunas aplicaciones de la función HADAMARD se presentan a continuación:



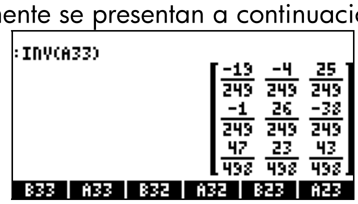
La matriz identidad

En el capítulo 9 introducimos la matriz identidad como la matriz $\mathbf{I} = [\delta_{ij}]_{n\times n}$, donde δ_{ij} es la función delta de Kronecker. Las matrices identidad pueden ser obtenidas usando la función IDN descrita en el capítulo 9. La matriz identidad tiene la característica que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{I}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}$. Para verificar esta característica presentamos los ejemplos siguientes usando las matrices almacenadas anteriormente:

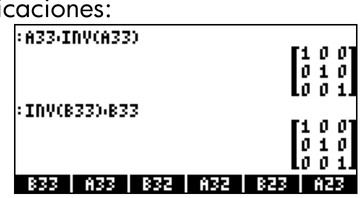


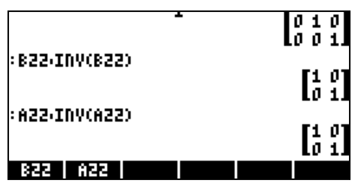
La matriz inversa

La inversa de una matriz cuadrada **A** es la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ tal que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$, en la cual **I** es la matriz identidad de las mismas dimensiones de **A**. La inversa de a matriz se obtiene en la calculadora utilizando la función INV (es decir, la tecla 1/x). Ejemplos involucrando la inversa de las matrices almacenadas anteriormente se presentan a continuación:



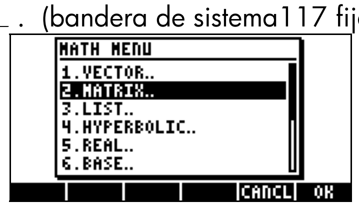
Para verificar las propiedades de la matriz inversa se presentan las siguientes multiplicaciones:

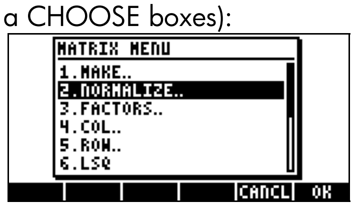




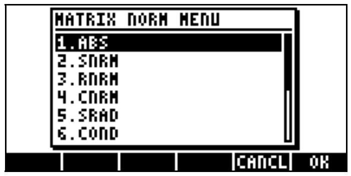
Caracterizar una matriz (El menú NORM de matrices)

El menú NORM (NORMALIZAR) de matrices se obtiene utilizando las teclas ← MTH . (bandera de sistema117 fija a CHOOSE boxes):





Este menú contiene las funciones siguientes:



Estas funciones se presentan a continuación. Dado que muchas de estas funciones utilizan conceptos de la teoría de matrices, tales como valores singulares, rango, etc., incluiremos descripciones cortas de estos conceptos mezclados con la descripción de funciones.

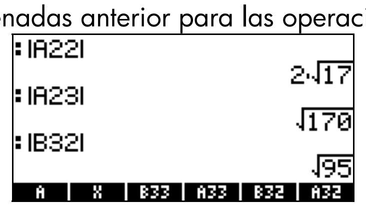
Función ABS

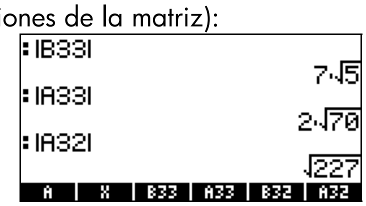
Función ABS calcula lo qué se conoce como la norma de Frobenius de una matriz. Para una matriz **A** = $[a_{ij}]_{m \times n}$, la norma de Frobenius de la matriz se define como

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$$

Si la matriz bajo consideración en un vector fila o un vector columna, entonces la norma de Frobenius, ||**A**||$_F$, es simplemente la magnitud del vector. El ABS de Función es accesible directamente en el teclado como ← ABS .

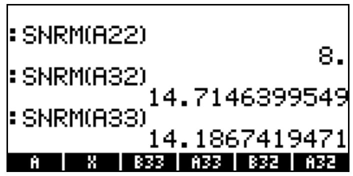
Intente los ejercicios siguientes en el modo de ALG (que usa las matrices almacenadas anterior para las operaciones de la matriz):





Función SNRM

Función SNRM calcula norma espectral (inglés, Spectral NoRM) de una matriz, que se define como el valor singular más grande de la matriz, también conocido como la norma euclidiana de la matriz. Por ejemplo,



Descomposición de valor singular

Para entender la operación de la función SNRM, necesitamos introducir el concepto de la descomposición de la matriz. Básicamente, la descomposición de la matriz implica la determinación de dos o más matrices que, cuando están multiplicadas en cierta orden (y, quizás, con cierta inversión o transposición de la matriz incluida), producen la matriz original. La descomposición de valor singular (inglés, Singular Value Decomposition, SVD) es tal que una matriz rectangular $\mathbf{A}_{m\times n}$ se escribe como

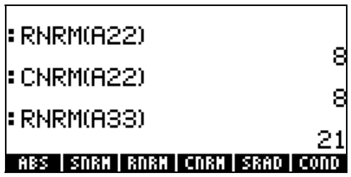
$$\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{U}_{m\times m} \cdot \mathbf{S}_{m\times n} \cdot \mathbf{V}^{T}_{n\times n},$$

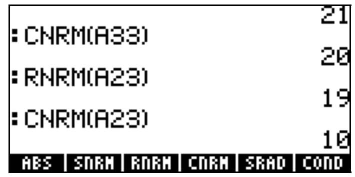
En la cual **U** y **V** son matrices ortogonales, y **S** es una matriz diagonal. Los elementos diagonales de **S** se llaman los valores singulares de **A** y se ordenan generalmente de manera que $s_i \geq s_{i+1}$, para i = 1, 2, …, n-1. Las columnas [$\mathbf{u}_j$] de **U** y [$\mathbf{v}_j$] de **V** son los vectores singulares correspondientes. (Las matrices ortogonales son tales que $\mathbf{U}\cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{I}$. Una matriz diagonal tiene elementos diferentes a cero solamente a lo largo de su diagonal principal).

El rango de una matriz se puede determinar de su SVD contando el número de valores no singulares. Los ejemplos de SVD serán presentados en una sección subsiguiente.

Funciones RNRM y CNRM

Función RNRM produce la norma de fila (inglés, Row NoRM) de una matriz, mientras que la función CNRM produce la norma de columna (Column NoRM) de una matriz. Ejemplos,

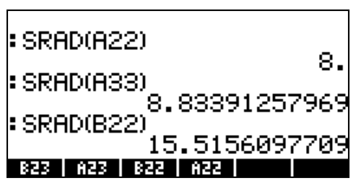




Norma de fila y norma de columna de una matriz
La norma de fila de una matriz es calculada tomando las sumas de los valores absolutos de todos los elementos en cada fila, y entonces, seleccionando el máximo de estas sumas. La norma de columna de una matriz es calculada tomando las sumas de los valores absolutos de todos los elementos en cada columna, y entonces, seleccionando el máximo de estas sumas.

Función SRAD

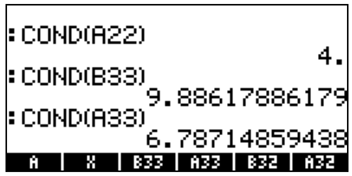
Función SRAD determina el radio espectral (inglés, Spectral RADius) de una matriz, definido como el más grande de los valores absolutos de sus valores propios. Por ejemplo,



Definición de valores propios y vectores propios de una matriz
Los valores propios de una matriz cuadrada resultan de la ecuación matricial $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \lambda\cdot\mathbf{x}$. Los valores de λ que satisfacen la ecuación se conoce como los valores propios de la matriz **A**. Los valores de **x** ese resultado de la ecuación para cada valor de λ se conocen como los vectores propios de la matriz. Otros detalles sobre valores propios y vectores propios se presentan más adelante en el capítulo.

Función COND

Función COND determina el número de condición de una matriz. Ejemplos,

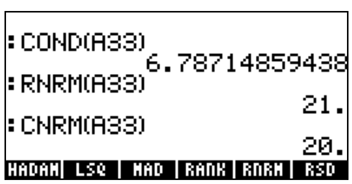


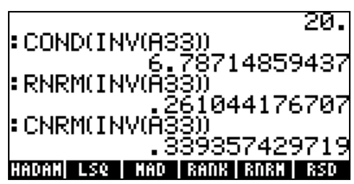
Número de condición de una matriz

El número de la condición de una matriz no singular cuadrada se define como el producto de la norma de la matriz con la norma de su inversa, es decir, cond(**A**) = ||**A**||×||$\mathbf{A}^{-1}$||. Elegiremos como la norma de la matriz, ||**A**||, el máximo de su norma de fila (RNRM) y su norma de columna (CNRM), mientras que la norma de la inversa, ||$\mathbf{A}^{-1}$||, será seleccionada como el mínimo de su norma de fila y su norma de columna. Así, ||**A**|| = max(RNRM(**A**),CNRM(**A**)), y ||$\mathbf{A}^{-1}$|| = min(RNRM($\mathbf{A}^{-1}$), CNRM($\mathbf{A}^{-1}$)).

El número de condición de una matriz singular es infinito. El número de condición de una matriz no singular es una medida de cuán cercana la matriz está a ser singular. Cuanto más grande es el valor del número de condición, más cercano está la matriz a la singularidad. (La matriz singular de A es una para la cual la inversa no existe).

Intente el ejercicio siguiente para el número de condición de la matriz en matriz A33. El número de la condición es COND(A33) , la norma de fila, y la norma de columna para A33 se muestra a la izquierda. Los números correspondientes para la matriz inversa, INV(A33), se muestran a la derecha:



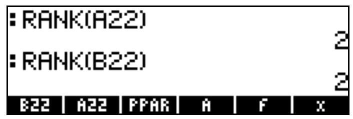


Dado que RNRM(A33) > CNRM(A33), se toma ||A33|| = RNRM(A33) = 21. También, dado que CNRM(INV(A33)) < RNRM(INV(A33)), tomaremos ||INV(A33)|| = CNRM(INV(A33)) = 0.261044... Así, el número de la condición también se calcula como

CNRM(A33)*CNRM(INV(A33)) = COND(A33) = 6.7871485…

Función RANK

Función RANK determina el rango de una matriz cuadrada. Intente los ejemplos siguientes:



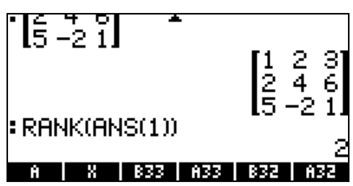
El rango de una matriz

El rango de una matriz cuadrada es el número máximo de las filas o de las columnas linealmente independientes que la matriz contiene. Suponga que usted escribe una matriz cuadrada $\mathbf{A}_{n\times n}$ como $\mathbf{A} = [\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \ldots\ \mathbf{c}_n]$, en la cual $\mathbf{c}_i$ (i = 1, 2, …, n) son vectores que representan las columnas de la matriz **A**, entonces, si cualquiera de esas columnas, digamos $\mathbf{c}_k$, puede ser escrita como

$$\mathbf{c}_k = \sum_{j\neq k,\, j\in\{1,2,\ldots,n\}} d_j \cdot \mathbf{c}_j,$$

donde los valores d_j son constantes, decimos que $\mathbf{c}_k$ es linealmente dependiente de las columnas incluidas en la adición. (Note que los valores de j incluyen cualquier valor en el conjunto {1, 2, …, n}, en cualquier combinación, siempre que $j\neq k$.) Si la expresión demostrada arriba no se puede escribir para cualesquiera de los vectores de la columna entonces decimos que todas las columnas son linealmente independientes. Una definición similar para la independencia lineal de filas puede ser desarrollada escribiendo la matriz como una columna de vectores fila. Así, si encontramos que rank(**A**) = n, entonces la matriz tiene una inversa y es una matriz no singular. Si, por otra parte, rank(**A**) < n, entonces la matriz es singular y su inversa no existe.

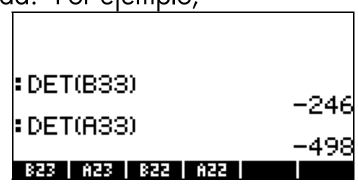
Por ejemplo, intente encontrar el rango de la matriz:

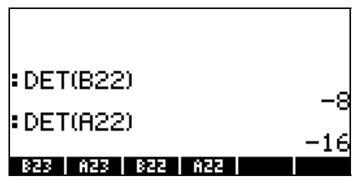


Se encontrará que el rango es 2. Esto es porque la segunda fila [2,4,6] es igual a la primera fila [1,2,3] multiplicada por 2, así, la fila dos es linealmente dependiente de la fila 1 y el número máximo de filas linealmente independientes es 2. Usted puede comprobar que el número máximo de columnas linealmente independientes es 3. El rango, que es el número máximo de filas o columnas linealmente independientes, se convierte en 2 para este caso.

Función DET

La función DET se utiliza para calcular el determinante de una matriz cuadrada. Por ejemplo,



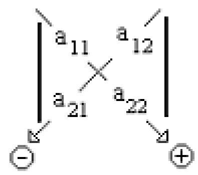


El determinante de una matriz

El determinante de una matriz 2x2 y de una matriz 3x3 se representa por el mismo arreglo de los elementos de las matrices, pero incluido entre las líneas verticales, es decir,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

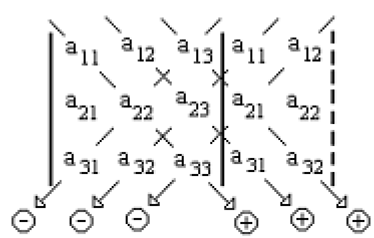
Un determinante 2x2 es calculado multiplicando los elementos en su diagonal y agregando esos productos acompañados por un signo positivo o negativo según lo indicado en el diagrama siguiente:



El determinante 2×2 es, por lo tanto,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Un determinante 3×3 es calculado aumentando el determinante, una operación que consista en copiar las primeras dos columnas del determinante, y colocarlas a la derecha de la columna 3, según lo demostrado en el diagrama siguiente. El diagrama también muestra los elementos que se multiplicarán con el signo correspondiente adjunto al producto, de manera similar a lo hecho anteriormente para un determinante 2×2. Después de la multiplicación los resultados se agregan para obtener el determinante.



Para las matrices cuadradas de una orden mayor, los determinantes pueden ser calculados usando determinantes de una orden menor, llamados cofactores. La idea general es "ampliar" el determinante de una matriz n×n (también designado un determinante n×n) en una suma de los cofactores, que son los determinantes (n-1)×(n-1), multiplicado por los elementos de una sola fila o columna, con signos positivos y negativos alternados. . Esta "extensión" entonces se lleva al nivel (más bajo) siguiente, con los cofactores de orden (n-2)×(n-2), y así sucesivamente, hasta terminar solamente con una larga suma de determinantes 2×2. Los determinantes 2×2 entonces se calculan con el método demostrado anteriormente.

El método de calcular un determinante por su expansión en cofactores es muy ineficiente en el sentido que implica un número de operaciones que crece muy rápido a medida que aumenta el tamaño de los determinantes. Un método más eficiente, y el que se prefiere en aplicaciones numéricas, es utilizar un resultado de la eliminación gaussiana. El método de eliminación gaussiana se utiliza para solucionar los sistemas de ecuaciones lineares. Los detalles de este método se presentan más adelante este capítulo.

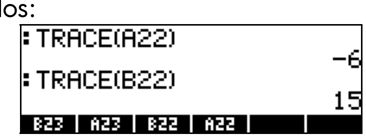
Para referirnos al determinante de una matriz **A**, escribiremos det(**A**). Una matriz singular tiene un igual determinante a cero.

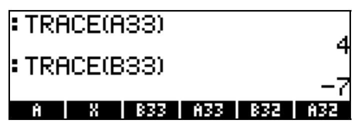
Función TRACE

La función TRACE se utiliza para calcular la traza de una matriz cuadrada, definida como la suma de los elementos en la diagonal principal, o sea,

$$tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \ .$$

Ejemplos:





Función TRAN

Función TRAN produce la transpuesta de una matriz real o la conjugada transpuesta de una matriz compleja. TRAN es similar a TRN. La operación de la función TRN fue presentada en el capítulo 10.

Operaciones adicionales con matrices (El menú OPER)

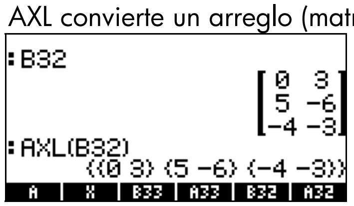
El menú OPER (OPERATIONS) está disponible con las teclas ← MATRICES (bandera de sistema 117 fija a CHOOSE boxes):

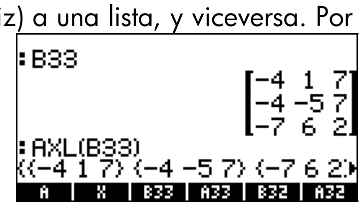
El menú OPERATIONS incluye las funciones siguientes:

Funciones ABS, CNRM, COND, DET, RANK, RNRM, SNRM, TRACE, y TRAN también se encuentran en el menú MTH/MATRIX/NORM (el tema de la sección anterior). La función SIZE fue presentada en el capítulo 10. La función HADAMARD fue presentada anteriormente en el contexto de multiplicación de matrices. Las funciones LSQ , MAD y RSD se relacionan con la solución de los sistemas de ecuaciones lineares y será presentado en una sección subsiguiente en este capítulo. En esta sección discutiremos solamente las funciones AXL y AXM.

Función AXL

Función AXL convierte un arreglo (matriz) a una lista, y viceversa. Por ejemplo,

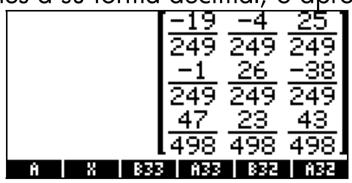


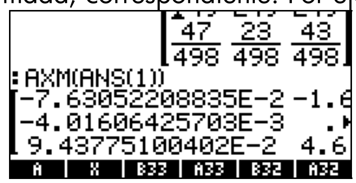


Nota: la última operación es similar a la del programa CRMR presentado en el capítulo 10.

Función AXM

Función AXM convierte un arreglo que contiene elementos enteros o fracciones a su forma decimal, o aproximada, correspondiente. Por ejemplo,





Función LCXM

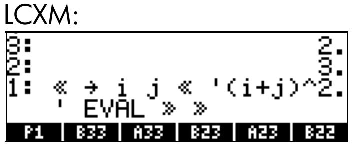
Función LCXM se pueden utilizar para generar matrices tales que el elemento a_{ij} es una función de i y j. La entrada a esta función consiste en dos números enteros, n y m, representando el número de filas y de columnas de la matriz que se generará, y un programa que toma i y j como entrada. Los números n, m, y el programa ocuparán los niveles 3, 2, y 1, de la pantalla, respectivamente (modo RPN). La función LCXM es accesible a través del catálogo de funciones ↱ _CAT_ .

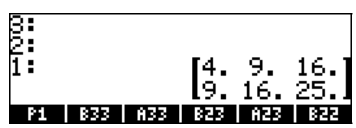
Por ejemplo, para generar una matriz 2×3 cuyos elementos se dan como $a_{ij} = (i+j)^2$, primero, almacene el programa siguiente en la variable P1, en modo RPN. Ésta es la manera que la pantalla de RPN luce antes de presionar STO▶.

La puesta en práctica de la función LCXM para este caso requiere escribir:

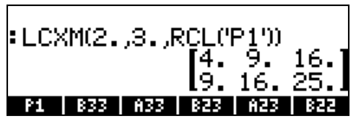
2 ENTER 3 ENTER ↱ CAT LCXM ENTER

La figura siguiente muestra la pantalla RPN antes y después de aplicar la función LCXM:





En modo ALG, este ejemplo se obtiene usando:



El programa P1 debe haber sido creado y almacenado en modo RPN.

Solución de sistemas lineales

Un sistema de *n* ecuaciones lineales en *m* variables puede escribirse de la siguiente manera:

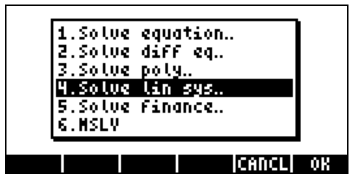
$$
\begin{array}{l}
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots + a_{1,m-1}\cdot x_{m-1} + a_{1,m}\cdot x_m = b_1, \\
a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots + a_{2,m-1}\cdot x_{m-1} + a_{2,m}\cdot x_m = b_2, \\
a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 + \ldots + a_{3,m-1}\cdot x_{m-1} + a_{3,m}\cdot x_m = b_3, \\
\quad . \qquad . \qquad . \qquad \ldots \qquad . \qquad . \qquad . \\
a_{n-1,1}\cdot x_1 + a_{n-1,2}\cdot x_2 + a_{n-1,3}\cdot x_3 + \ldots + a_{n-1,m-1}\cdot x_{m-1} + a_{n-1,m}\cdot x_m = b_{n-1}, \\
a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + a_{n3}\cdot x_3 + \ldots + a_{n,m-1}\cdot x_{m-1} + a_{n,m}\cdot x_m = b_n.
\end{array}
$$

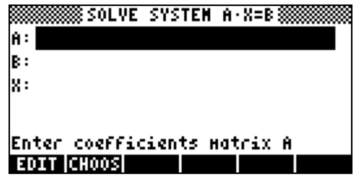
Este sistema de ecuaciones lineales puede escribirse como una ecuación matricial, $\mathbf{A}_{n\times m}\cdot\mathbf{x}_{m\times 1} = \mathbf{b}_{n\times 1}$, si se definen los siguientes matriz y vectores:

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}_{m\times 1}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}
$$

Utilizando la solución numérica de sistemas lineales

Existen muchas formas de resolver un sistema de ecuaciones lineales con la calculadora. Por ejemplo, uno puede utilizar el menú de soluciones numéricas ↱ NUM.SLV . Selecciónese la opción *4. Solve lin sys..* en la lista de soluciones numéricas (figura de la izquierda) *y* presiónese la tecla OK. La siguiente forma interactiva (figura de la derecha) será producida:





para resolver el sistema lineal **A**·**x** = **b**, escríbase la matriz **A**, utilizando el formato [[a_{11}, $a_{12,}$ …], … [….]] en la opción A: de la forma interactiva. Así mismo, escríbase el vector **b** en la opción B: de la forma interactiva. Cuando se seleccione la opción X:, presiónese la tecla SOLVE. Si existe una solución e vector solución **x** se mostrará en la opción X: de la forma interactiva. La solución se reproduce también en la pantalla normal. Algunos ejemplos se muestran a continuación.

Un sistema cuadrado

El sistema de ecuaciones lineales

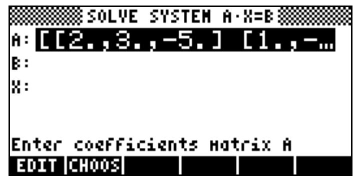
$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 13,$$
$$x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -13,$$
$$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -6,$$

puede escribirse como la ecuación matricial **A**·**x** = **b**, si se usa:

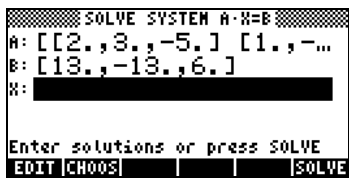
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & 8 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad and \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 13 \\ -13 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Este sistema tiene el mismo número de ecuaciones e incógnitas, y se conoce como un sistema cuadrado. En general, habrá una solución única del sistema. La solución representa la intersección de los tres planos representados por las ecuaciones lineales en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3).

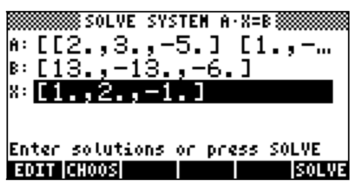
Para escribir la matriz **A** uno puede activar el escritor de matrices cuando el cursor se encuentra en la opción A: de la forma interactiva. La siguiente pantalla muestra el escritor de matrices utilizado para escribir la matriz **A**, así como la forma interactiva de la solución después de escribir la matriz **A** (presiónese ENTER en el escritor de matrices para retornar a la forma interactiva):



Presiónese la tecla ▼ para seleccionar la opción B: en la forma interactiva. El vector b puede escribirse como un vector file con un solo par de corchetes, es decir, [13,-13,-6] OK .
Después de escribir la matriz A y el vector b, selecciónese la opción X:, y presiónese la tecla SOLVE para obtener una solución para este sistema de ecuaciones:

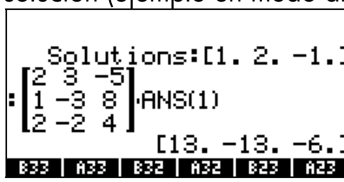


La solución del sistema se muestra a continuación.



Para ver la solución en la pantalla presione ENTER. La solución es **x** = [1,2, -1].

Para comprobar que la solución esté correcta, escriba la matriz A y multiplicar por el vector solución (ejemplo en modo algebraico):



Sistema sub-determinado

El sistema de ecuaciones lineares

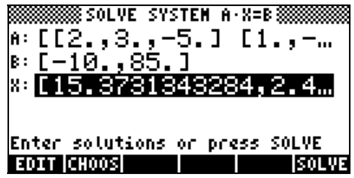
$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -10,$$
$$x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 85,$$

puede ser escrito como la ecuación matricial $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$, si

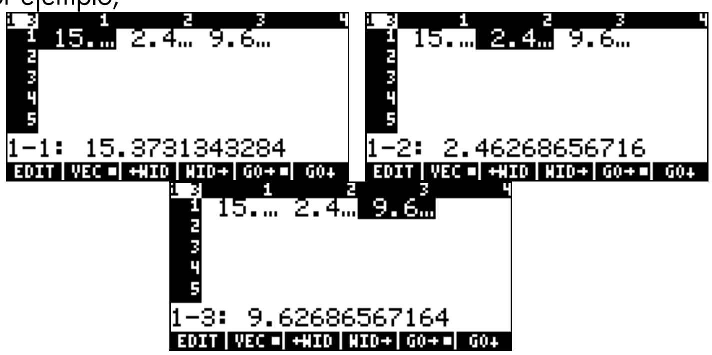
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad y \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -10 \\ 85 \end{bmatrix}.$$

Este sistema tiene más incógnitas que ecuaciones, por lo tanto, no se determinan únicamente. Podemos visualizar el significado de esta declaración conociendo que cada uno de las ecuaciones lineares representa un plano en el sistema coordinado cartesiano tridimensional (x_1, x_2, x_3). La solución al sistema de las ecuaciones mostrado anteriormente será la intersección de dos planos en el espacio. Sabemos, sin embargo, que la intersección de dos planos (no paralelos) es una línea recta, y no un solo punto. Por lo tanto, hay más de un punto que satisface el sistema. En ese sentido, el sistema no se determina únicamente.

Utilicemos las soluciones numéricas para procurar una solución a este sistema de ecuaciones: ↱ NUM.SLV ▼ ▼ ▼ OK . Escriba la matriz A y el vector b según lo ilustrado en el ejemplo anterior, y presione SOLVE cuando la localidad X: se destaca:



Para ver los detalles del vector de la solución, de ser necesario, presione EDIT . Esto activará el escritor de ecuaciones. Dentro de este ambiente, utilizar las teclas direccionales (flechas) horizontales para moverse en el vector, por ejemplo,



Así, la solución es **x** = [15.373, 2.4626, 9.6268].

Para volver al ambiente numérico de las soluciones, presionar ENTER.

El procedimiento que describimos siguiente se puede utilizar para copiar la matriz A y el vector X de la solución en la pantalla. Para comprobar que la solución esté correcta, intentar el siguiente:

- Presione ▲▲, para destacar A:
- Presione NXT CALC ENTER, para copiar la matriz A a la pantalla.
- Presione OK para volver al ambiente de soluciones numéricas.
- Presione ▼ ▼ CALC ENTER, para copiar la solución X a la pantalla. Presione OK para volver al ambiente numérico de las soluciones.
- Presione ENTER para volver a la pantalla.

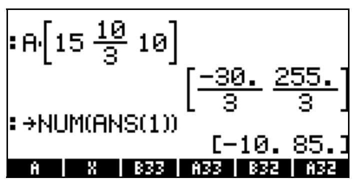
En modo de ALG, la pantalla ahora lucirá así:

Dejar nos almacenar el resultado último en una variable X, y la matriz en la variable A, como sigue:

Presione STO▶ ALPHA X ENTER para almacenar el vector solución en variable X
Presione ◀ ◀ ◀ para eliminar tres niveles de la pantalla
Presione STO▶ ALPHA A ENTER para almacenar la matriz en la variable A

Ahora, verifique la solución usando: A × X ENTER, qué resulta en: (Presione ▼ para ver los elementos del vector): [-9.99999999999 85.], bastante cercano al vector original **b** = [-10 85].

Intento también esto, A × [15,10/3,10] ENTER ↱ →NUM ENTER, i.e.,



Este resultado indica que **x** = [15,10/3,10] es también una solución al sistema, confirmando nuestra observación que un sistema con más incógnitas que ecuaciones no está determinado únicamente (sub-determinado).
Cómo hace la calculadora para obtener la solución **x** = [15.37… 2.46… 9.62…] mostrada anteriormente? Realmente, la calculadora reduce al mínimo la distancia de un punto, que constituirá la solución, a cada uno de los planos representados por las ecuaciones en el sistema linear. La calculadora utiliza un método de mínimos cuadrados, es decir, reduce al mínimo la suma de los cuadrados de esas distancias o errores.

Sistema sobre-determinado
El sistema de ecuaciones lineares

$$x_1 + 3x_2 = 15,$$
$$2x_1 - 5x_2 = 5,$$

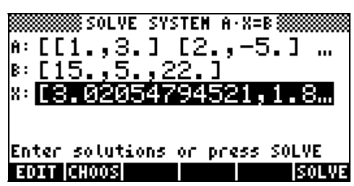
$-x_1 + x_2 = 22$,

puede ser escrito como la ecuación matricial **A·x** = **b**, si

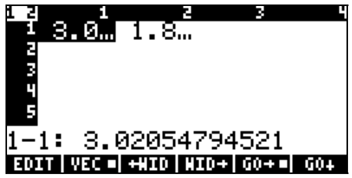
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad and \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

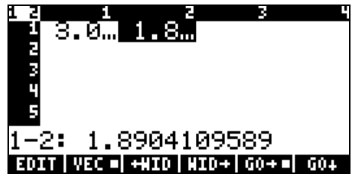
Este sistema tiene más ecuaciones que incógnitas (un sistema sobre-determinado). El sistema no tiene una sola solución única. Cada uno de las ecuaciones lineares en el sistema presentado arriba representa una línea recta en un sistema coordinado cartesiano de dos dimensiones (x_1, x_2). A menos que dos de las tres ecuaciones en el sistema representen la misma ecuación, las tres líneas tendrán más de un punto de intersección. Por esa razón, la solución no es única. Algunos algoritmos numéricos se pueden utilizar para forzar una "solución" al sistema reduciendo al mínimo la distancia del punto presunto de la solución a cada una de las líneas en el sistema. Tal es el proceso seguido por las soluciones numéricas de la calculadora.

Utilicemos las soluciones numéricas para procurar una solución a este sistema de ecuaciones: ↱ NUM.SLV ▼ ▼ ▼ OK . Escriba la matriz A y el vector b según como en el ejemplo anterior, y presione SOLVE cuando la localidad X: es seleccionada:



Para ver los detalles del vector de la solución, de ser necesario, presione EDIT . Esto activará el Escritor de matrices. Dentro de este ambiente, use las teclas direccionales horizontales para explorar el vector, por ejemplo.,

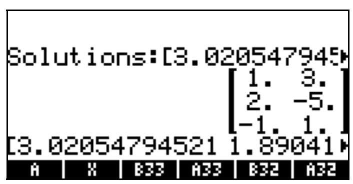




Presione [ENTER] para volver al ambiente numérico de las soluciones. Para comprobar que la solución esté correcta, intentar el siguiente:

- Presione [▲][▲], para destacar A:
- Presione [NXT] [CALC] [ENTER], para copiar la matriz A a la pantalla.
- Presione [OK] para volver al ambiente de soluciones numéricas.
- Presione [▼] [▼][CALC] [ENTER], para copiar la solución X a la pantalla. Presione [OK] para volver al ambiente numérico de las soluciones.
- Presione [ENTER] para volver a la pantalla.

En modo de ALG, la pantalla ahora lucirá así:



Almacenemos el resultado último en una variable X, y la matriz en la variable A, como sigue:

Presione [STO▶][ALPHA][X][ENTER] para almacenar el vector de solución en variable X
Presione [◀] [◀] [◀] para eliminar tres niveles de la pantalla
Presione [STO▶][ALPHA][A][ENTER] para almacenar la matriz en variable A

Ahora, verifiquemos la solución usando: [A] [×] [X] [ENTER], qué resulta en el vector [8.6917… -3.4109… -1.1301…], el cuál no es igual [15 5 22], el vector original **b**. La "solución" es simplemente el punto que está más cercano a las tres líneas representadas por las tres ecuaciones en el sistema, y no una solución exacta.

Solución de mínimos cuadrados (Función LSQ)

La función LSQ (inglés, Least SQuare, o mínimos cuadrados) produce la solución de mínimos cuadrados minimizando la norma de un sistema linear **A**x = **b**, según los criterios siguientes:

- Si **A** es una matriz cuadrada y **A** es no singular (es decir, la matriz inversa existe, o su determinante es diferente de cero), LSQ produce la solución exacta al sistema linear.
- Si **A** tiene menos que el rango de fila completo (sistema de ecuaciones sub-determinado), LSQ produce la solución con la longitud euclidiana mínima de un número infinito de soluciones.
- Si **A** tiene menos que el rango de columna completo (sistema sobre-determinado de ecuaciones), LSQ produce la "solución" con el valor residual mínimo **e** = **A**·**x** – **b**. El sistema de ecuaciones puede no tener una solución, por lo tanto, el valor producido no es una solución verdadera al sistema, sino una con el residuo más pequeño.

La función LSQ tomo como entradas el vector **b** y la matriz **A**, en ese orden. La función LSQ puede ser encontrada en el catálogo de funciones (↱ _CAT_). Después, utilizamos la función LSQ para repetir las soluciones encontradas anteriores con las soluciones numéricas:

Sistema cuadrado

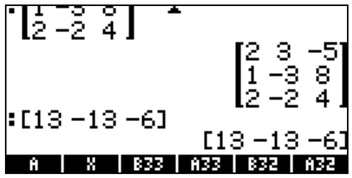
Considere el sistema

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 13,$$
$$x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -13,$$
$$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -6,$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & 8 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad and \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 13 \\ -13 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

La solución que usa LSQ se muestra aquí:



Sistema sub-determinado

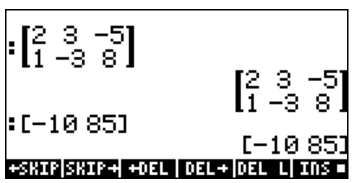
Considere el sistema

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -10,$$
$$x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 85,$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad and \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -10 \\ 85 \end{bmatrix}.$$

La solución usando LSQ se muestra aquí:



Sistema sobre-determinado

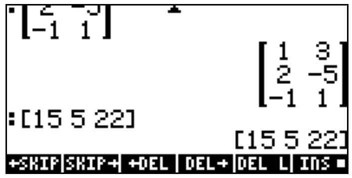
Considere el sistema

$$x_1 + 3x_2 = 15,$$
$$2x_1 - 5x_2 = 5,$$
$$-x_1 + x_2 = 22,$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad and \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

La solución usando LSQ se muestra a continuación:



Comparar estas tres soluciones con las que esta' calculadas con las soluciones numéricas.

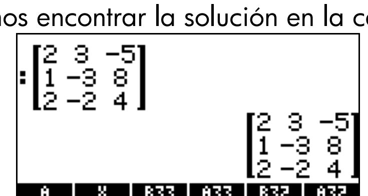
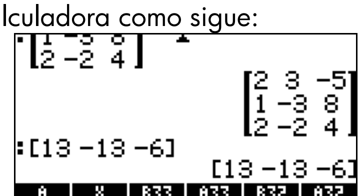
Solución utilizando la matriz inversa

La solución del sistema $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$, en el cual $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada, se obtiene utilizando $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot \mathbf{b}$. Esto resulta de multiplicar la primera ecuación por $\mathbf{A}^{-1}$, es decir, $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}$. Por definición, $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$, así escribimos $\mathbf{I}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}$. Así mismo, $\mathbf{I}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}$, así, tenemos, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot \mathbf{b}$.

Por el ejemplo usado anterior, a saber,

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 13,$$
$$x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -13,$$
$$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -6,$$

podemos encontrar la solución en la calculadora como sigue:

el cuál es el mismo resultado encontrado anteriormente.

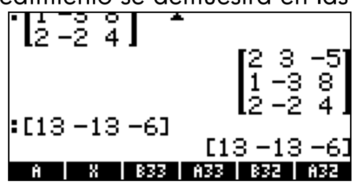
Solución a través de "división" de matrices

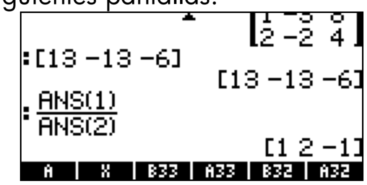
Si bien la operación de división de matrices no está definida, es posible utilizar la tecla ÷ de la calculadora para "dividir" el vector **b** por la matriz

A con el propósito de determinar **x** en la ecuación matricial **A**·**x** = **b**. . Ésta es una extensión arbitraria de la operación algebraica de la división a las matrices, es decir, a partir de **A**·**x** = **b**, nos atrevemos a escribir **x** = **b**/**A** (Los matemáticos se desmayarían si ven esto!) Esto, por supuesto, se interpreta como (1/**A**)·**b** = **A**$^{-1}$·**b**, cuál está igual que usar la matriz **A** como en la sección anterior. El procedimiento para la "división" de **b** sobre **A** se ilustra a continuación para el caso

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 13,$$
$$x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -13,$$
$$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -6,$$

El procedimiento se demuestra en las siguientes pantallas:





La misma solución según lo encontrado arriba con la matriz inversa.

Múltiples sistemas con la misma matriz de coeficientes

Suponer que usted desea solucionar los tres sistemas siguientes de ecuaciones:

X +2Y+3Z = 14,   2X +4Y+6Z = 9,   2X +4Y+6Z = -2,
3X -2Y+ Z = 2,   3X -2Y+ Z = -5,   3X -2Y+ Z = 2,
4X +2Y   -Z = 5, 4X +2Y   -Z = 19,   4X +2Y   -Z = 12.

Podemos escribir los tres sistemas de ecuaciones como sola ecuación de la matriz: **A**·**X** = **B**, en la cual

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{(1)} & X_{(2)} & X_{(3)} \\ Y_{(1)} & Y_{(2)} & Y_{(3)} \\ Z_{(1)} & Z_{(2)} & Z_{(3)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 14 & 9 & -2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 5 & 19 & 12 \end{bmatrix}.$$

Los subíndices en los nombres de las variables X, Y, y Z, determinar a qué sistema de la ecuación se refieren. Para solucionar este sistema ampliado utilizamos el procedimiento siguiente, en modo de RPN,

```
[[14,9,-2],[2,-5,2],[5,19,12]] ENTER
[[1,2,3],[3,-2,1],[4,2,-1]] ENTER ÷
```

El resultado de esta operación es:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Eliminación gaussiana y de Gauss-Jordan

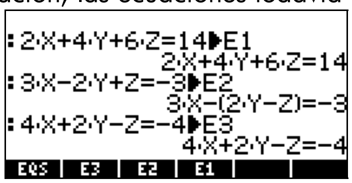
La eliminación gaussian es un procedimiento por el cual la matriz cuadrada de los coeficientes que pertenecen a un sistema de n ecuaciones lineares de n incógnitas se reduce a una matriz superior-triangular (inglés, echelon form) con una serie de operaciones de filas. Este procedimiento se conoce como *eliminación hacia adelante*. La reducción de la matriz del coeficiente a una forma superior-triangular permite la solución de las n incógnitas, utilizando solamente una ecuación a la vez, en un procedimiento conocido como al *substitución hacia atrás*.

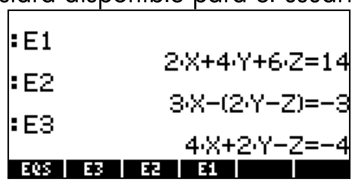
Ejemplo de la eliminación gaussiana usando ecuaciones

Para ilustrar el procedimiento de la eliminación gaussiana utilizaremos el sistema siguiente de 3 ecuaciones en 3 incógnitas:

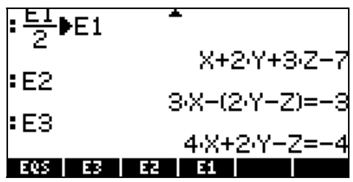
2X +4Y+6Z = 14,
3X -2Y+ Z = -3,
4X +2Y -Z = -4.

Podemos almacenar estas ecuaciones en la calculadora en las variables E1, E2, y E3, respectivamente, según lo demostrado abajo. Para los propósitos de reserva, una lista que contiene las tres ecuaciones también fue creada y almacenada en la variable EQS. De esta manera, si se incurre en una equivocación, las ecuaciones todavía estará disponible para el usuario.

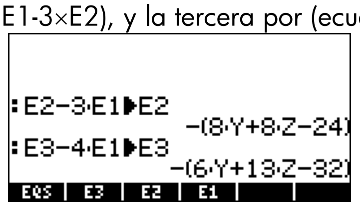


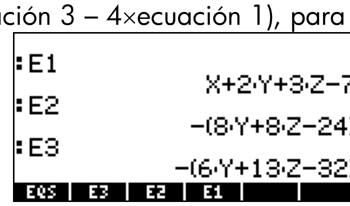


Para comenzar el proceso de la eliminación hacia adelante, dividimos la primera ecuación (E1) por 2, y la almacenamos en E1, y mostramos las tres ecuaciones otra vez:

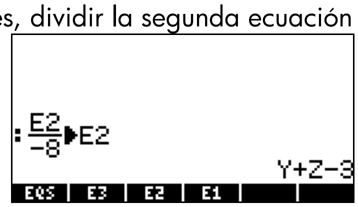


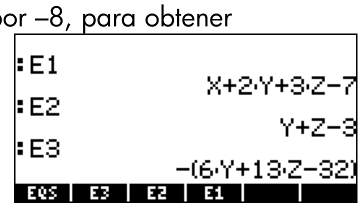
Después, substituimos la segunda ecuación E2 con (ecuación 2 – 3×ecuación 1, i.e., E1-3×E2), y la tercera por (ecuación 3 – 4×ecuación 1), para obtener



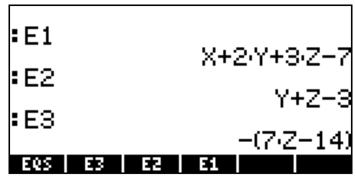


Después, dividir la segunda ecuación por –8, para obtener





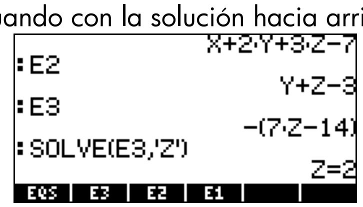
Después, sustituir la tercera ecuación, E3, con (ecuación 3 + 6×ecuación 2, i.e., E2+6×E3), para obtener

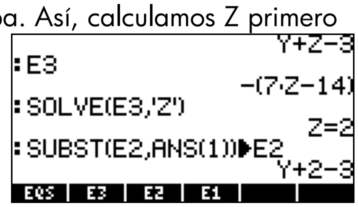


Note que cuando realizamos una combinación linear de ecuaciones la calculadora modifica el resultado a una expresión en el lado izquierdo del igual, es decir, una expresión = 0. Así, el sistema pasado de ecuaciones se interpreta como equivalente al siguiente conjunto de ecuaciones:

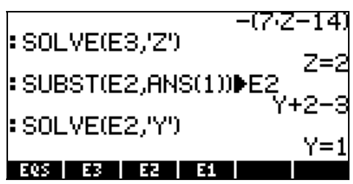
$$X + 2Y + 3Z = 7,$$
$$Y + Z = 3,$$
$$-7Z = -14.$$

El proceso de la substitución hacia atrás en la eliminación gaussian consiste en encontrar los valores de las incógnitas, partiendo de la última ecuación y continuando con la solución hacia arriba. Así, calculamos Z primero

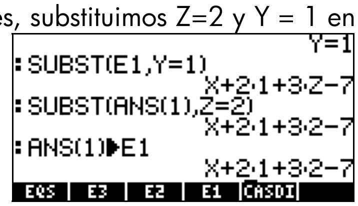


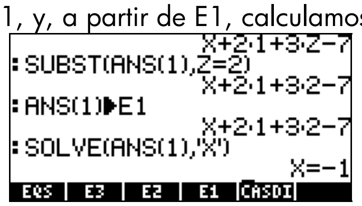


Después, substituimos Z=2 en la ecuación 2 (E2), y, a partir de E2, calculamos Y:



Después, substituimos Z=2 y Y = 1 en E1, y, a partir de E1, calculamos X:





La solución es, por lo tanto, X = -1, Y = 1, Z = 2.

Ejemplo de eliminación gaussiana utilizando matrices

El sistema de ecuaciones usadas en el ejemplo anterior se puede escribir como la ecuación matricial **A**·**x** = **b**, si utilizamos:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Para obtener una solución a la ecuación matricial usando la eliminación gaussiana, primero creamos lo qué se conoce como la matriz aumentada que corresponde a **A**, i.e.,

$$\mathbf{A}_{aug} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 14 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

La matriz $\mathbf{A}_{aug}$ está igual que la matriz original **A** con una nueva columna, correspondiendo a los elementos del vector **b**, adicionado (i.e., aumentado) a la derecha de la última columna de **A**.

Una vez que se produzca la matriz aumentada, podemos proceder a realizar operaciones de filas en ella que reduzca la matriz original **A** a una matriz superior-triangular. Para este ejercicio, utilizaremos el modo RPN (MODE +/- OK), con la bandera del sistema 117 fija a SOFT menu. En su calculadora, utilice las teclas siguientes. Primero, escriba la matriz aumentada, y haga una copia adicional en la pantalla (este paso no es necesario, excepto como garantía de que usted tiene una copia adicional de la matriz aumentada en caso de que usted incurra en una equivocación en el procedimiento que estamos a punto de emprender.):

[[2,4,6,14],[3,-2,1,-3],[4,2,-1,-4]] ENTER ENTER

Almacene la matriz aumentada en AAUG: ' ALPHA ALPHA A A U G ALPHA STO▶

Con una copia de la matriz aumentada en la pantalla, presione ← MTH MATRX ROW para activar el menú de operaciones de fila (ROW). Después, realizar las operaciones siguientes de la fila en su matriz aumentada.

Multiplicar la fila 1 por ½: 2 1/x 1 RCI

Multiplicar la fila 1 por -3 y agregar resultado a la fila 2, substituyéndola:
3 +/- SPC 1 SPC 2 RCIJ

Multiplicar la fila 1 por -4, agregar resultado a la fila 3, substituyéndola:
4 +/- SPC 1 SPC 3 RCIJ

Multiplicar la fila 2 por –1/8: 8 +/- 1/x 2 RCI
Multiplicar la fila 2 por 6, agregando resultado a la fila 3, substituyéndola:
6 SPC 2 SPC 3 RCIJ

Si usted realizara estas operaciones a mano, usted escribiría lo siguiente:

$$\mathbf{A}_{aug} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 14 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A}_{aug} \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -8 & -8 & -24 \\ 0 & -6 & -13 & -32 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -13 & -32 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A}_{aug} \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right)$$

El símbolo ≅ ("es equivalente a") indica que lo qué sigue es equivalente a la matriz anterior con algunas operaciones de la fila (o columna) implicadas.

La matriz que resulta es superior-triangular, y equivalente al sistema de ecuaciones

X +2Y+3Z = 7,
Y+ Z = 3,
-7Z = -14,

cuál puede ahora ser solucionado, una ecuación a la vez, por la substitución posterior, como en el ejemplo anterior.

Eliminación de Gauss-Jordan usando matrices

La eliminación de Gauss-Jordan consiste en la continuación de las operaciones de fila en la matriz superior-triangular que resulta del proceso de eliminación hacia adelante que una matriz identidad ocupa el lugar de la matriz original **A**. Por ejemplo, para el caso que acabamos de presentar, nosotros podemos continuar las operaciones de filas como sigue:

Multiplicar la fila 3 por –1/7: 7 +/- 1/x 3 RCI
Multiplicar la fila 3 por -1, agregarla a la fila 2, substituyéndola: 1 +/- SPC 3 SPC 2 RCIJ

Multiplicar la fila 3 por -3, agregarla a la fila 1, substituyéndola:
3 +/- SPC 3 SPC 1 RCIJ

Multiplicar la fila 2 por -2, agregarla a la fila 1, substituyéndola: 2 +/- SPC 2 SPC 1 RCIJ

Escribir este proceso a mano dará lugar a los pasos siguientes:

$$\mathbf{A}_{aug} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$A_{aug} \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Pivotes

Si usted mira cuidadosamente las operaciones de fila en los ejemplos demostrados anteriormente, usted notará que muchas de esas operaciones dividen una fila por su elemento correspondiente en la diagonal principal. Este elemento se llama un elemento de pivote, o simplemente, un pivote. En muchas situaciones es posible que el elemento del pivote se convierte en cero, en cuyo caso no podemos dividir la fila por su pivote. También, para mejorar la solución numérica de un sistema de ecuaciones usando eliminación gaussian o de Gauss-Jordan, se recomienda que el pivote sea el elemento con el valor absoluto más grande de una columna dada. En tales casos, intercambiamos filas antes de realizar operaciones de la fila. Este intercambio de filas se llama *pivoteo parcial*. Para seguir esta recomendación es a menudo necesario intercambiar filas en la matriz aumentada mientras se realiza una eliminación gaussian o de Gauss-Jordan.

Mientras que se efectúa el pivoteo en un procedimiento de eliminación matricial, usted puede mejorar la solución numérica aún más seleccionando como el pivote el elemento con el valor absoluto más grande de la columna y de la fila de interés. Esta operación puede requerir el cambio no solamente de filas, pero también columnas, en algunas operaciones de pivotes. Cuando se permiten los intercambios de filas y de columnas en el pivoteo, el procedimiento se conoce como por *pivoteo completo*.

Al intercambiar filas y columnas en pivoteo parcial o completo, es necesario no perder de vista esos intercambios porque la orden de las incógnitas en la solución es alterada por esos intercambios. Una forma de no perder de vista intercambios de columna en modo de pivoteo parcial o completo, es crear *una matriz de permutación* $\mathbf{P} = \mathbf{I}_{n\times n}$, al principio del procedimiento. Cualquier intercambio de filas o columnas requerido en la matriz aumentada $\mathbf{A}_{aug}$ también se registra como un intercambio de fila o columna, respectivamente, en la matriz de permutación. Cuando se obtiene la solución, entonces, multiplicamos la matriz de permutación por el vector incógnita $\mathbf{x}$ para obtener el orden apropiado de las incógnitas en la solución. Es decir la solución final se da por $\mathbf{P}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, en la cual $\mathbf{b}'$ es la última columna de la matriz aumentada después de que se haya encontrado la solución.

Ejemplo de la eliminación de Gauss-Jordan con pivoteo completo

Ilustremos el pivoteo completo con un ejemplo. Solucione el sistema siguiente de ecuaciones usando pivoteo completo y el procedimiento de la eliminación de Gauss-Jordania:

$$X + 2Y + 3Z = 2,$$
$$2X + \quad 3Z = -1,$$

$$8X + 16Y - Z = 41.$$

La matriz aumentada y la matriz de permutación son las siguientes:

$$\mathbf{A}_{aug} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 8 & 16 & -1 & 41 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Almacene la matriz aumentada en la variable AAUG, entonces presione ⇨ AAUG para conseguir una copia en la pantalla. Deseamos mantener la función CSWP (inglés, Column Swap, o intercambio de columnas) fácilmente disponible, para lo cual utilizamos: ⇨ _CAT_ ALPHA ALPHA C S ALPHA (encontrar CSWP), OK. Usted recibirá un mensaje de error, presione ON, e ignore el mensaje. Después, hacer el menú ROW (inglés, fila) disponible presionando: ⇦ _MATRICES_ CREAT ROW.

Estamos listos ahora a comenzar la eliminación de Gauss-Jordan con pivoteo completo. Necesitaremos no perder de vista la matriz de la permutación, así que anote la matriz **P** en papel.

Primero, comprobamos el pivote a_{11}. Notamos que el elemento con el valor absoluto más grande de la primera fila y de la primera columna es el valor a_{31} = 8. Puesto que quisiéramos que este número fuera el pivote, entonces intercambiamos las filas 1 y 3, usando: 1 SPC 3 NXT RSWP. La matriz aumentada y la matriz de permutación son ahora:

$$\begin{bmatrix} 8 & 16 & -1 & 41 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobando el pivote en la posición (1,1) ahora encontramos que 16 es un pivote mejor que 8, así, realizamos un intercambio de columnas como sigue: 1 SPC 2 ⇨ _CAT_ OK RSWP. La matriz aumentada y la matriz de permutación son ahora:

$$\begin{bmatrix} 16 & 8 & -1 & 41 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora tenemos el valor posible más grande en la posición (1,1), es decir, realizamos un pivoteo completo en (1,1). Después, procedemos a dividir por el pivote:
[1][6][1/x][1][NXT] [RCI] . La matriz de permutación no cambia, pero la matriz aumentada ahora es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/16 & 41/16 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El paso siguiente es eliminar el 2 de la posición (3,2) usando:
[2][+/-][SPC][1][SPC][3][RCIJ]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/16 & 41/16 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 25/8 & -25/8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Habiendo llenado de ceros los elementos de la columna 1 debajo del pivote, ahora procedemos a comprobar el pivote en la posición (2,2). Encontramos que el número 3 en la posición (2,3) será un pivote mejor, así, nosotros intercambiamos las columnas 2 y 3 usando: [2][SPC][3] [→][CAT] [OK]

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/16 & 1/2 & 41/16 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 25/8 & 0 & -25/82 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobando el pivote en la posición (2,2), ahora encontramos que el valor de 25/8, en la posición (3,2), es más grande de 3. Así, intercambiamos las filas 2 y 3 usando: [2][SPC][3] [NXT][RSWP]

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/16 & 1/2 & 41/16 \\ 0 & 25/8 & 0 & -25/8 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, estamos listos a dividir la fila 2 por el pivote 25/8, usando:
['] [8][÷][2][5][▶][SPC][2] [NXT][RCI]

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/16 & 1/2 & 41/16 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Después, eliminamos el 3 de la posición (3,2) usando:
`3` `+/-` `SPC` `2` `SPC` `3` `RCIJ`

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/16 & 1/2 & 41/16 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Llenando de ceros la posición debajo del pivote, procedemos a comprobar el pivote en la posición (3,3). El valor actual 2 es más grande que el ½ o 0, así que no hacemos ningún intercambio. Dividimos, sin embargo, la tercera fila entera por 2 para convertir el pivote a 1, usando: `2` `1/x` `3` `RCI`

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/16 & 1/2 & 41/16 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Después, procedemos a eliminar el ½ en la posición (1,3) usando:
`2` `1/x` `+/-` `SPC` `3` `SPC` `1` `RCIJ`

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/16 & 0 & 33/16 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, eliminamos el -1/16 de la posición (1,2) usando:
`1` `6` `1/x` `SPC` `2` `SPC` `1` `RCIJ`

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora tenemos una matriz identidad en la porción de la matriz aumentada que corresponde a la matriz original de coeficientes **A**, así podemos proceder a obtener la solución mientras llevando cuenta de los intercambios de filas y columnas cifrados en la matriz de permutación **P**. Identificamos el vector incógnita **x**, el vector independiente modificado **b**′ y la matriz de permutación **P** como:

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}'=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

La solución se da por **P**·**x**=**b**', o

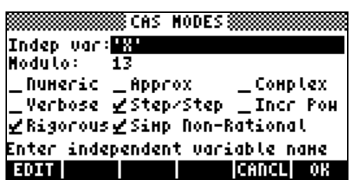
$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

Que resulta en:

$$\begin{bmatrix}Y\\Z\\X\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

Procedimiento paso a paso de la calculadora para solucionar sistemas lineares

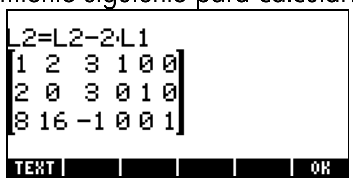
El ejemplo que acabamos de trabajar es, por supuesto, el procedimiento paso a paso, dirigido por el usuario, para utilizar pivoteo completo para la solución de la eliminación de Gauss-Jordan de los sistemas de ecuaciones lineares. Usted puede ver el procedimiento paso a paso usado por la calculadora para solucionar un sistema de ecuaciones, sin la intervención del usuario, fijando la opción Step/Step en el CAS de la calculadora, como sigues:



Entonces, para este ejemplo particular, en modo RPN, use:

`[2,-1,41]` ENTER `[[1,2,3],[2,0,3],[8,16,-1]]` ENTER ÷

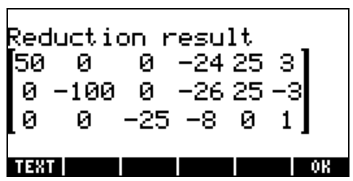
La calculadora demuestra una matriz aumentada que consiste en la matriz de los coeficientes **A** y la matriz identidad **I**, mientras que, en el mismo tiempo, demostrando el procedimiento siguiente para calcular:



L2 = L2-2·L1 significa "sustituir la fila 2 (L2) con la operación L2 – 2·L1. Si hubiéramos hecho esta operación a mano, habría correspondido a: 2 +/- SPC 1 SPC 1 L ROW. Presione OK, y siga las operaciones en la pantalla de su calculadora. Usted verá las operaciones siguientes realizadas:

L3=L3-8·L1, L1 = 2·L1–1·L2, L1=25·L1–3·L3, L2 = 25·L2-3·L3,

y finalmente un mensaje indicando "Reduction result" (resultado de la reducción) mostrando:



Cuando Ud. presione OK , la calculadora produce el resultado final [1 2 –1].

Calculando la matriz inversa paso a paso

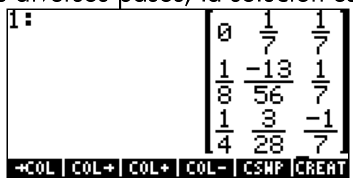
El cálculo de una matriz inversa se puede considerar como el calcular la solución al sistema aumentado [**A** | **I**]. Por ejemplo, para la matriz **A** utilizado en el ejemplo anterior, escribiríamos esta matriz aumentada como:

$$\mathbf{A}_{aug(I)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Para ver los pasos intermedios en el cálculo de la inversa, escriba la matriz **A** anterior, y presione 1/x, mientras que se mantiene activa la opción paso a paso (Step/Step) del CAS de la calculadora. Utilice lo siguiente:

`[[ 1,2,3],[3,-2,1],[4,2,-1]]` ENTER 1/x

Después de observar los diversos pasos, la solución es:



Lo qué la calculadora demostró no es exactamente una eliminación de Gauss-Jordania con pivoteo completo, sino una manera de calcular la inversa de una matriz realizando una eliminación de Gauss-Jordan, sin pivoteo. Este procedimiento para calcular la inversa se basa en la matriz aumentada $(\mathbf{A}_{aug})_{n\times n} = [\mathbf{A}_{n\times n} \,|\mathbf{I}_{n\times n}]$.

La calculadora le mostró que los pasos de la solución hasta el punto en el cual la mitad izquierda de la matriz aumentada se ha convertido en una matriz diagonal. De allí, el paso final es dividir cada fila por el pivote correspondiente de la diagonal principal. Es decir la calculadora ha transformado $(\mathbf{A}_{aug})_{n\times n} = [\mathbf{A}_{n\times n} \,|\mathbf{I}_{n\times n}]$, en $[\mathbf{I} \,|\mathbf{A}^{-1}]$.

Matrices inversas y determinantes

Notar que todos los elementos en la matriz inversa calculada arriba son divididos por el valor 56 o uno de sus factores (28, 7, 8, 4 o 1). Si usted calcula el determinante de la matriz **A**, usted consigue *det*(**A**) = 56.
Podríamos escribir, $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}/det(\mathbf{A})$, en la cual **C** es la matriz

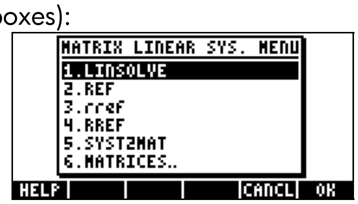
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 7 & -13 & 8 \\ 14 & 6 & -8 \end{bmatrix}.$$

El resultado $(\mathbf{A}^{-1})_{n\times n} = \mathbf{C}_{n\times n} / det(\mathbf{A}_{n\times n})$, es un resultado general que se aplica a cualquier matriz no singular **A**. Una forma general para los elementos de **C** puede ser escrita basado en el algoritmo de Gauss-Jordan.

De acuerdo con la ecuación $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}/\det(\mathbf{A})$, bosquejado arriba, la matriz inversa, $\mathbf{A}^{-1}$, no está definida si *det*(**A**) = 0. Así, la condición *det*(**A**) = 0 define también una matriz singular.

Solución a los sistemas lineales usando funciones de la calculadora

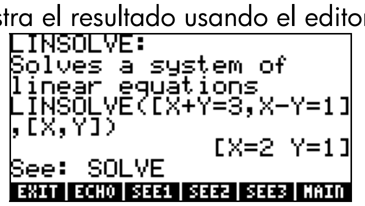
La manera más simple de solucionar un sistema de ecuaciones lineares, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$, en la calculadora consiste en escribir **b**, escribir **A**, y entonces utilizar la función de la división /. Si el sistema de ecuaciones lineares es sobre-determinado o sub-determinado, una "solución" puede ser producida usando la función LSQ (Least-SQuares), según lo demostrado anteriormente. La calculadora, sin embargo, ofrece otras posibilidades de solucionar sistemas lineares de ecuaciones usando las funciones incluidas en el sub-menú LINEAR SYSTEMS.. del menú MATRICES accesible a través de ← MATRICES (Fijar la bandera 117 del sistema a CHOOSE boxes):

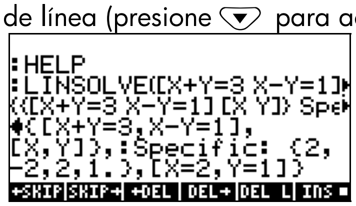


Las funciones incluidas son LINSOLVE, REF, rref, RREF, y SYST2MAT.

Función LINSOLVE

La función LINSOLVE toma como argumentos un arreglo de ecuaciones y un vector que contiene los nombres de las incógnitas, y produce la solución al sistema linear. Las pantallas siguientes muestran información y ejemplo tomada de la función informativa del CAS. La pantalla lateral derecha demuestra el resultado usando el editor de línea (presione ▼ para activarlo):





Aquí está otro ejemplo en modo de ALG. Escriba lo siguiente:

```
LINSOLVE([X-2*Y+Z=-8,2*X+Y-2*Z=6,5*X-2*Y+Z=-12],
                          [X,Y,Z])
```

para producir la solución: `[X=-1,Y=2,Z = -3].`

La función LINSOLVE trabajos con expresiones simbólicas. Las funciones REF, rref, y RREF, trabajan con la matriz aumentada en un procedimiento de eliminación gaussiana.

Las funciones REF, rref, RREF

La forma triangular superior a la cual la matriz aumentada se reduce durante la parte de eliminación de un procedimiento de eliminación gaussiana se conoce como una forma de "escalera." La función REF (Reduce to Echelon Form, o reducir a forma de escalera) produce tal matriz dada la matriz aumentada en el nivel 1 de la pantalla.

Considere la matriz aumentada,

$$\mathbf{A}_{aug} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -2 & 1 & 12 \end{array}\right].$$

Representación de un sistema linear de ecuaciones, **A**·**x** = **b**, donde

A = `[[1,-2,1],[2,1,-2],[5,-2,1]]`,

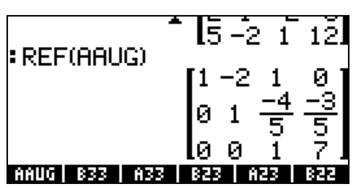
y

b = `[[0],[-3],[12]]`.

Escriba la matriz aumentada, y almacénela en la variable AAUG, en modo ALG:

`[[1,-2,1,0],[2,1,-2,-3][5,-2,1,12]] ▶ AAUG`

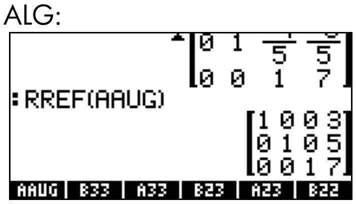
La aplicación de la función REF produce:



El resultado es la matriz triangular superior (forma de escalera) de coeficientes resultando de la eliminación en un procedimiento de eliminación gaussiana.

La matriz diagonal que resulta de una eliminación de Gauss-Jordan se llama una forma de escalera reducida por filas. La función RREF (Row-Reduced Echelon Form) produce la forma de escalera reducida por filas para reducir la matriz de coeficientes a una matriz identidad. La columna adicional en la matriz aumentada contendrá la solución al sistema de ecuaciones.

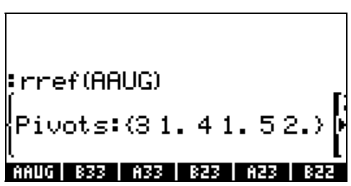
Como ejemplo, demostramos el resultado de aplicar la función RREF a la matriz AAUG en modo ALG:

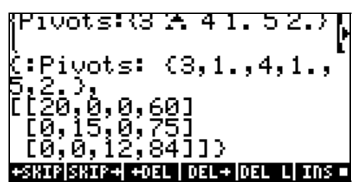


El resultado es la matriz aumentada final resultando de una eliminación de Gauss-Jordan sin pivoteo.

Una forma de escalera reducida por filas para una matriz aumentada puede ser obtenido usando la función *rref*. Esta función produce una lista de los pivotes y una matriz equivalente en forma de escalera reducida por filas para reducir la matriz de coeficientes a una matriz diagonal.

Por ejemplo, para la matriz AAUG, la función rref produce:

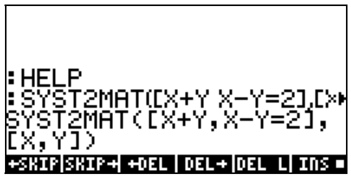




La segunda pantalla arriba se obtiene activando el editor de línea (presione). El resultado demuestra pivotes de 3, 1, 4, 1, 5, y 2, y una matriz diagonal reducida.

Función SYST2MAT

Esta función convierte un sistema de ecuaciones lineares en su matriz aumentada equivalente. El ejemplo siguiente está disponible en la función informativa de la calculadora:



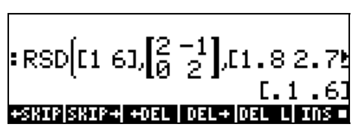
El resultado es la matriz aumentada que corresponde al sistema de ecuaciones:

X+Y = 0
X-Y =2

Errores residuales en soluciones de sistemas lineales (Función RSD)

La función RSD calcula los ReSiDuos o errores en la solución de la ecuación matricial **A**·**x**=**b**, representando un sistema de n ecuaciones lineares con n incógnitas. Podemos pensar en solucionar este sistema como solucionar la ecuación matricial: f(**x**) = **b** -**A**·**x** = 0. Suponga que, con un método numérico, producimos como primera aproximación la solución **x**(0). Evaluando f(**x**(0)) = **b** - **A**·**x**(0) = **e** ≠ 0. Así que, **e** es un vector de residuos de la función para el vector **x** = **x** (0).

Para utilizar la función RSD usted necesita los términos **b**, **A**, y **x**(0), como argumentos. El vector calculado es **e** = **b** - **A**·**x**(0). Por ejemplo, usando **A** = [[2,-1][0,2]], **x**(0) = [1.8,2.7], y **b** = [1,6], podemos encontrar el vector de residuos como sigue:



El resultado es **e** = **b** - **A**·**x**(0) = [0.1 0.6].

> **Nota**: Si el vector Δ**x** = **x** – **x** (0), representa la corrección en los valores de **x** (0), podemos escribir una nueva ecuación matricial para Δ**x**, a saber, **A**·Δ**x** = **e**. Calculando Δ**x** podemos encontrar la solución real del sistema original como **x** = **x**(0) + Δ**x**.

Valores propios y vectores propios

Dada una matriz cuadrada **A**, podemos escribir la ecuación del valor propio **A**·**x** = λ·**x**, donde los valores λ que satisfacen la ecuación se conocen como los valores propios de la matriz **A**. Para cada valor de λ, podemos encontrar, de la misma ecuación, valores de **x** eso satisface la ecuación del valor propio. Estos valores de **x** se conocen como los vectores propios de la matriz **A**. La ecuación de los valores propios se puede escribir también como (**A** – λ·**I**)**x** = 0.

Esta ecuación tendrá una solución no trivial solamente si la matriz (**A** – λ·**I**) es singular, es decir, si det(**A** – λ·**I**) = 0.

La ecuación anterior genera una ecuación algebraica que implica un polinomio de orden *n* para una matriz cuadrada $\mathbf{A}_{n\times n}$. La ecuación que resulta se conoce como el polinomio característico de la matriz **A**. La solución del polinomio característico produce los valores propios de la matriz.

La calculadora proporciona un número de funciones que proveen información con respecto a los valores propios y a los vectores propios de una matriz cuadrada. Algunas de estas funciones están situadas bajo el menú MATRICES/EIGEN activado con ← MATRICES .

Función PCAR

La función PCAR genera el polinomio característico de una matriz cuadrada usando el contenido de la variable VX (una variable CAS reservada, típicamente igual a 'X') como la incógnita en el polinomio. Por ejemplo, incorpore la matriz siguiente en modo ALG y encuentre el polinomio característico usando PCAR: `[[1,5,-3],[2,-1,4],[3,5,2]]`

Usando la variable λ representar valores propios, este polinomio característico es interpretado como λ^3-2λ^2-22λ +21=0.

Función EGVL

La función EGVL (EiGenVaLues) produce los valores propios de una matriz cuadrada. Por ejemplo, los valores propios de la matriz demostrada abajo se calculan en modo de ALG usando la función EGVL:

Los valores propios son λ = [-√10, √10].

> **Nota**: En algunos casos, usted no puede poder encontrar una solución 'exacta' al polinomio característico, y la función EGVL produce, como resultado, una lista vacía. Si sucede esto, cambie el modo de la calculadora a Approx en el CAS, y repita el cálculo.

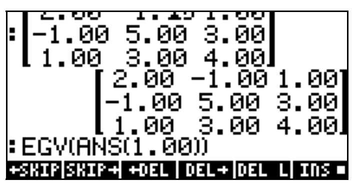
Por ejemplo, en modo exacto, el ejercicio siguiente produce una lista vacía como la solución:

Cambie el modo a Approx y repita el ejercicio, para conseguir los valores propios siguientes:
`[(1.38,2.22), (1.38,-2.22), (-1.76,0)].`

Función EGV

La función EGV (inglés, EiGenValues and eigenvectors) produce los valores propios y los vectores propios de una matriz cuadrada. Los vectores propios se muestran como las columnas de una matriz, mientras que los valores propios correspondientes son los componentes de un vector.

Por ejemplo, en modo ALG, los vectores propios y los valores propios de la matriz enumerada abajo son encontrados aplicando la función EGV:



El resultado demuestra los valores propios como columnas de la matriz en el resultado. Para ver los valores propios podemos utilizar: GET(ANS(1),2), i.e., conseguir el segundo elemento en la lista en el resultado anterior. Los valores propios son:

En resumen,

$$\lambda_1 = 0.29,\ \mathbf{x}_1 = [\ 1.00,0.79,-0.91]^T,$$
$$\lambda_2 = 3.16,\ \mathbf{x}_2 = [1.00,-0.51,\ 0.65]^T,$$
$$\lambda_3 = 7.54,\ \mathbf{x}_1 = [-0.03,\ 1.00,\ 0.84]^T.$$

Nota: Una matriz simétrica tiene valores propios reales solamente, y sus vectores propios son mutuamente perpendiculares. Para comprobar esto en el ejemplo apenas resuelto, calcule $\mathbf{x}_1 \bullet \mathbf{x}_2 = 0$, $\mathbf{x}_1 \bullet \mathbf{x}_3 = 0$, y $\mathbf{x}_2 \bullet \mathbf{x}_3 = 0$.

Función JORDAN

La función JORDAN se usa para producir la diagonalización o descomposición de ciclo de Jordan de una matriz. En modo RPN, dada una matriz cuadrada **A**, la función JORDAN produce cuatro salidas, a saber:

- El polinomio del mínimo de la matriz **A** (nivel 4)
- El polinomio característico de la matriz **A** (nivel 3)
- Una lista con los vectores propios que corresponden a cada valor propio de la matriz **A** (nivel 2)
- Un vector con los vectores propios de la matriz **A** (nivel 1)

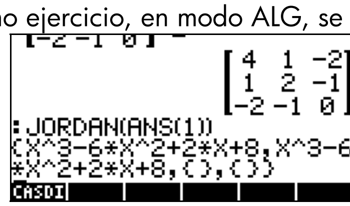
Por ejemplo, intente este ejercicio en modo RPN:

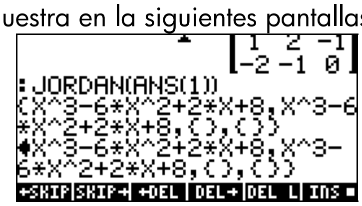
```
[[4,1,-2],[1,2,-1],[-2,-1,0]]   JORDAN
```

La salida es la siguiente:

4: 'X^3+-6*x^2+2*X+8'
3: 'X^3+-6*x^2+2*X+8'
2: { }
1: { }

El mismo ejercicio, en modo ALG, se muestra en la siguientes pantallas:





Función MAD

Esta función, aunque no está disponible en el menú EIGEN, también proporciona la información relacionada con los valores propios de una matriz. La función MAD está disponible con el sub-menú MATRICES OPERATIONS (MATRICES) y se piensa producir la matriz adjunta de una matriz. En modo RPN, la función MAD generar un número de características de una matriz cuadrada, a saber:

- el determinante (nivel 4)
- la inversa formal (nivel 3),
- en nivel 2, los coeficientes del polinomio de la matriz ($\mathbf{x}$) definido por $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A})\cdot p(\mathbf{x})=m(\mathbf{x})\cdot\mathbf{I}$,
- el polinomio característico de la matriz (nivel 1)

Note que la ecuación $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A})\cdot p(\mathbf{x})=m(\mathbf{x})\cdot\mathbf{I}$ es similar, en forma, a la ecuación del valor propio $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \lambda\cdot\mathbf{x}$.

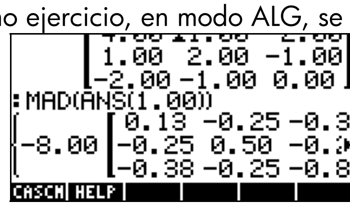
Como ejemplo, en modo RPN, intente:

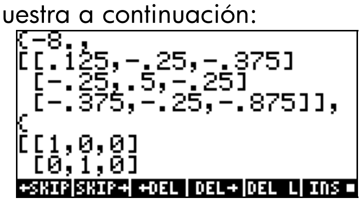
```
[[4,1,-2] [1,2,-1][-2,-1,0]] MAD
```

El resultado es:

4: -8.
3: [[0.13 –0.25 –0.38][-0.25 0.50 –0.25][-0.38 –0.25 –0.88]]
2: {[[1 0 0][0 1 0][0 0 1]] [[-2 1 –2][1 –4 –1][-2 –1 –6] [[-1 2 3][2 –4 2][3 2 7]]}
1: 'X^3+-6*x^2+2*X+8'

El mismo ejercicio, en modo ALG, se muestra a continuación:

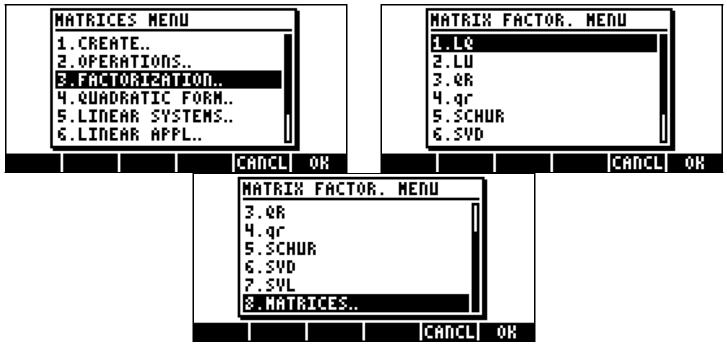




Factorización de matrices

La factorización o descomposición de matrices consiste en obtener ciertas matrices que cuando se multiplican entre ellas resulta en una matriz dada.

Presentamos la descomposición de matrices con el uso de las funciones contenidas en el menú de matrices FACT. Este menú se obtiene a través de ← MATRICES .



Las funciones contenidas en este menú son: LQ, LU, QR, SCHUR, SVD, SVL.

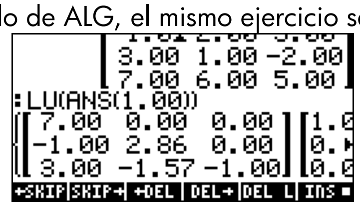
Función LU

La función LU tomas como entrada una matriz cuadrada **A**, y produce una matriz triangular inferior **L**, una matriz triangular superior **U**, y una matriz de la permutación **P**, en los niveles 3, 2, y 1 de la pantalla, respectivamente. Los resultados **L**, **U**, y **P**, satisfacen la ecuación **P**·**A** = **L**·**U**. Cuando usted activa la función LU, la calculadora realiza una descomposición LU de Crout de la matriz **A** usando pivoteo parcial.

Por ejemplo, en modo RPN: `[[-1,2,5][3,1,-2][7,6,5]] LU` produce:

3:[[7 0 0][-1 2.86 0][3 –1.57 –1]]
2: [[1 0.86 0.71][0 1 2][0 0 1]]
1: [[0 0 1][1 0 0][0 1 0]]

En modo de ALG, el mismo ejercicio será demostrado como sigue:



Matrices ortogonales y descomposición de valores singulares

Una matriz cuadrada se dice que es ortogonal si sus columnas representan los vectores de la unidad que son mutuamente ortogonal. Así, si dejamos la matriz cuadrada A se dice ser ortogonal si sus columnas representan vectores unitarios que son mutuamente ortogonales. Así, si dejamos la matriz **U** = [$\mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_2$ … $\mathbf{v}_n$] donde $\mathbf{v}_i$, i = 1, 2,, n, son vectores columnas, y si $\mathbf{v}_i \bullet \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la función delta de Kronecker, entonces **U** ser una matriz ortogonal. Estas condiciones también implican que $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{I}$.

La descomposición de valores singulares (inglés, Singular Value Decomposition, SVD) de una matriz rectangular $\mathbf{A}_{m\times n}$ consiste en la determinación de las matrices **U**, **S**, y **V**, tal que $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{U}_{m\times m} \cdot \mathbf{S}_{m\times n} \cdot \mathbf{V}^T_{n\times n}$, donde **U** y **V** son las matrices ortogonales, y **S** es una matriz diagonal. Los elementos diagonales de **S** se llaman los _valores singulares_ de **A** y ordenados generalmente de manera que $s_i \geq s_{i+1}$, para $i = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$. Las columnas [$\mathbf{u}_j$] de **U** y [$\mathbf{v}_j$] de **V** son los _vectores singulares_ correspondientes.

Función SVD

En modo RPN, la función SVD (inglés, Singular Value Decomposition, o descomposición de valores singulares) toma como entrada una matriz $\mathbf{A}_{n\times m}$, y produce las matrices $\mathbf{U}_{n\times n}$, $\mathbf{V}_{m\times m}$, y un vector **s** en los niveles 3, 2, y 1 de la pantalla, respectivamente. La dimensión del vector **s** es igual al mínimo de los valores n y m. Las matrices **U** y **V** fueron definidas anteriormente para la descomposición de valores singulares, mientras que el vector **s** representa la diagonal principal de la matriz **S** usada anteriormente.

Por ejemplo, en modo RPN: `[[5,4,-1],[2,-3,5],[7,2,8]] SVD`

3: [[-0.27 0.81 –0.53][-0.37 –0.59 –0.72][-0.89 3.09E-3 0.46]]
2: [[-0.68 –0.14 –0.72][0.42 0.73 –0.54][-0.60 0.67 0.44]]
1: [12.15 6.88 1.42]

Función SVL

La función SVL (inglés, Singular VaLues, o valores singulares) produce los valores singulares de una matriz $\mathbf{A}_{n\times m}$ como un vector **s** cuya dimensión es igual al mínimo de los valores n and m. Por ejemplo, en modo RPN,
`[[5,4,-1],[2,-3,5],[7,2,8]] SVL`
produce [12.15 6.88 1.42].

Función SCHUR

En modo RPN, la función SCHUR produce la *descomposición de Schur* de una matriz cuadrada **A** produciendo las matrices **Q** y **T**, en los niveles 2 y 1 de la pantalla, respectivamente, tales que $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T$, donde **Q** es una matriz ortogonal, y **T** es una matriz triangular. Por ejemplo, en modo RPN,

`[[2,3,-1][5,4,-2][7,5,4]] SCHUR`

resulta en:

2: [[0.66 –0.29 –0.70][-0.73 –0.01 –0.68][-0.19 –0.96 0.21]]

1: [[-1.03 1.02 3.86][0 5.52 8.23][0 –1.82 5.52]]

Función LQ

La función LQ produce la factorización LQ de una matriz $\mathbf{A}_{n\times m}$ produciendo una matriz trapezoidal inferior $\mathbf{L}_{n\times m}$, una matriz ortogonal $\mathbf{Q}_{m\times m}$, y una matriz de permutación $\mathbf{P}_{n\times n}$, en los niveles 3, 2, y 1 de la pantalla, respectivamente. Las matrices **A**, **L**, **Q** y **P** se relacionan por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}$. (Una matriz trapezoidal a partir de una matriz n×m es el equivalente de una matriz triangular a partir de una matriz n×n). Por ejemplo,

`[[ 1, -2, 1][ 2, 1, -2][ 5, -2, 1]] LQ`

produce

3: [[-5.48 0 0][-1.10 –2.79 0][-1.83 1.43 0.78]]

2: [[-0.91 0.37 -0.18] [-0.36 -0.50 0.79] [-0.20 -0.78 -0.59]]

1: [[0 0 1][0 1 0][1 0 0]]

Función QR

En modo RPN, la función QR produce la factorización *QR* de una matriz $\mathbf{A}_{n\times m}$ produciendo una matriz ortogonal $\mathbf{Q}_{n\times n}$, una matriz triangular superior $\mathbf{R}_{n\times m}$, y una matriz de permutación $\mathbf{P}_{m\times m}$, en los niveles 3, 2, y 1 de la pantalla, respectivamente . Las matrices **A**, **P**, **Q** y **R** se relacionan por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$.

Por ejemplo, `[[ 1,-2,1][ 2,1,-2][ 5,-2,1]] QR`

produce

3: [[-0.18 0.39 0.90][-0.37 –0.88 0.30][-0.91 0.28 –0.30]]

2: [[-5.48 –0.37 1.83][0 2.42 –2.20][0 0 –0.90]]

1: [[1 0 0][0 0 1][0 1 0]]

Nota: Ejemplos y definiciones para todas las funciones en este menú están disponibles a través de función informativa en la calculadora. Intente estos ejercicios en modo ALG para ver los resultados en ese modo.

Formas cuadráticas de una matriz

Una _forma cuadrática_ de una matriz cuadrada **A** es una expresión polinómica originada a partir de $\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^T$. Por ejemplo, si utilizamos **A** = [[2,1,–1][5,4,2][3,5,–1]], y **x** = [X Y Z]^T, se calcula la forma cuadrática correspondiente como

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2X+Y-Z \\ 5X+4Y+2Z \\ 3X+5Y-Z \end{bmatrix}$$

Finalmente, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^T = 2X^2+4Y^2-Z^2+6XY+2XZ+7ZY$

El menú QUADF

La calculadora proporciona el menú QUADF para las operaciones relacionadas con las formas cuadráticas. El menú QUADF se alcanzado a través de ← MATRICES .

Este menú incluye las funciones AXQ, CHOLESKY, GAUSS, QXA, y SYLVESTER.

Función AXQ

En modo de RPN, la función AXQ produce la forma cuadrática que corresponde a una matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ en el nivel 2 de la pantalla usando las n variables en un vector colocad en el nivel 1 de la pantalla. La función produce la forma cuadrática en el nivel 2 de la pantalla y el vector de variables en el nivel 1 de la pantalla. Por ejemplo,

`[[2,1,-1],[5,4,2],[3,5,-1]]` ENTER `['X','Y','Z']` ENTER `AXQ`

produce
2: '2*X^2+(6*Y+2*Z)*X+4*Y^2+7*Z*y-Z^2'
1: ['X' 'Y' 'Z']

Función QXA

La función QXA toma como argumentos una forma cuadrática en el nivel 2 de la pantalla y un vector de variables en el nivel 1 de la pantalla, produciendo la matriz cuadrada **A** de la cuál se deriva la forma cuadrática en el nivel 2 de la pantalla, y la lista de variables en el nivel 1 de la pantalla. Por ejemplo,

`'X^2+Y^2-Z^2+4*X*Y-16*X*Z'` ENTER `['X','Y','Z']` ENTER `QXA`

produce
2: [[1 2 –8][2 1 0][-8 0 –1]]
1: ['X' 'Y' 'Z']

Representación diagonal de una forma cuadrática

Dada una matriz cuadrada simétrica **A**, es posible "diagonalizar" la matriz **A** encontrando una matriz ortogonal **P** tal que $\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{D}$, donde **D** es una matriz diagonal. Si $Q = \mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^T$ es una forma cuadrática basada en **A**, es posible escribir la forma cuadrática Q de modo que contenga solamente términos cuadrados de una variable **y**, tales que $\mathbf{x} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{y}$, usando $Q = \mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^T = (\mathbf{P}\cdot\mathbf{y})\cdot\mathbf{A}\cdot(\mathbf{P}\cdot\mathbf{y})^T = \mathbf{y}\cdot(\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P})\cdot\mathbf{y}^T = \mathbf{y}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{y}^T$.

Función SYLVESTER

La función SYLVESTER toma como argumento una matriz cuadrada simétrica **A** y produce un vector que contiene los términos diagonales de una matriz diagonal **D**, y una matriz **P**, tal que $\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{D}$. Por ejemplo,

`[[2,1,-1],[1,4,2],[-1,2,-1]] SYLVESTER`

produce
2: [1/2 2/7 -23/7]
1: [[2 1 –1][0 7/2 5/2][0 0 1]]

Función GAUSS

La función GAUSS produce la representación diagonal de una forma cuadrática Q = $\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^T$ tomando como discusiones la forma cuadrática en el nivel 2 de la pantalla y el vector de variables en el nivel 1 de la pantalla. El resultado de esta llamada de función es el siguiente:

- Un arreglo de coeficientes que representan los términos diagonales de **D** (nivel 4 de la pantalla)
- Una matriz **P** tal que **A** = $\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{P}$ (nivel 3 de la pantalla)
- La forma cuadrática diagonalizada (nivel 2 de la pantalla)
- La lista de variables (nivel 1 de la pantalla)

Por ejemplo,

'X^2+Y^2-Z^2+4*X*Y-16*X*Z' ENTER
['X','Y','Z'] ENTER GAUSS

produce

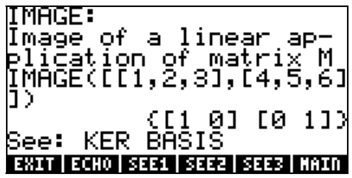
4: [1 –0.333 20.333]
3: [[1 2 –8][0 –3 16][0 0 1]]
2: '61/3*Z^2+ -1/3*(16*Z+-3*Y)^2+(-8*z+2*Y+X)^2'
1: ['X' 'Y' 'Z']

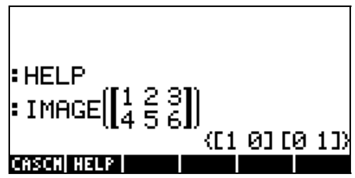
Aplicaciones Lineares

El menú LINEAR APPLICATIONS (Aplicaciones lineares) está disponible con ← MATRICES .

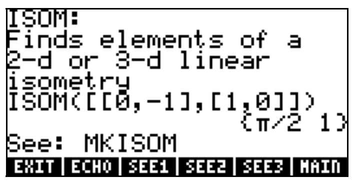
La información sobre las funciones enumeradas en este menú se presenta a continuación usando la función informativa de la calculadora. Las figuras muestran la descripción de las funciones y los ejemplos adjuntos.

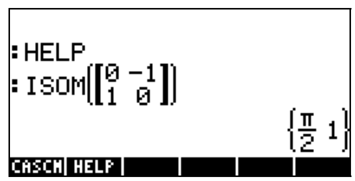
Función IMAGE



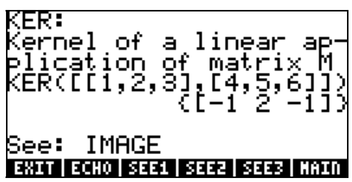


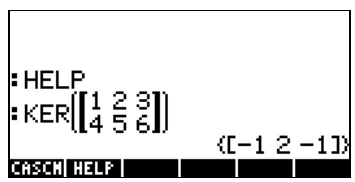
Función ISOM



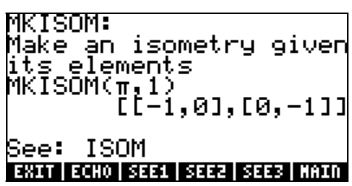


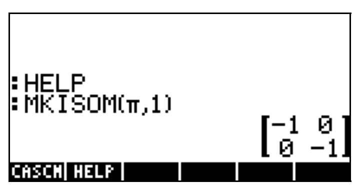
Función KER





Función MKISOM



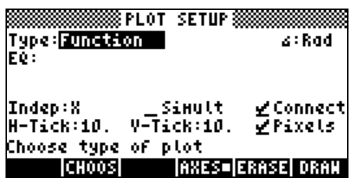


Capítulo 12
Gráficas

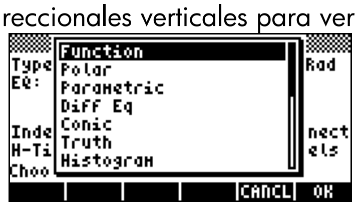
En este Capítulo se presentan algunas de las aplicaciones gráficas de la calculadora. Presentaremos gráficos de funciones en coordenadas cartesianas y polares, diagramas paramétricos, gráficos de cónicas, diagramas de barra, de puntos, y una variedad de gráficos tridimensionales

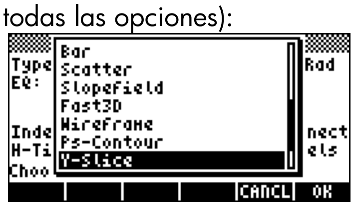
Opciones gráficas en la calculadora

Para tener acceso a la lista de formatos gráficos disponibles en la calculadora, úsese la secuencia de teclas ← 2D/3D (F4) Téngase cuidado que si se usa el modo RPN estas dos teclas deben presionarse <u>simultáneamente</u> para activar las funciones gráficas. Después de activar la función 2D/3D, la calculadora produce la forma interactiva denominada PLOT SETUP, la cual incluye la opción TYPE (tipo) como se ilustra a continuación.



Enfrente de la partícula TYPE se encuentra, con toda seguridad, que la opción Function (función) ha sido seleccionada. Este es el tipo de gráfica preseleccionado en la calculadora. Para ver la lista de formatos gráficos disponibles, presione la tecla de menú denominada CHOOS (escoger). Esta selección produce una lista de menú con las siguientes opciones (úsense las teclas direccionales verticales para ver todas las opciones):





Estas opciones de gráficas se describen brevemente a continuación

Function: para las ecuaciones de la forma y = f(x) en coordenadas cartesianas planas
Polar: para las ecuaciones de la forma r = f(θ) en coordenadas polares en el plano
Parametric: para trazar las ecuaciones de la forma x = x(t), y = y(t) en el plano
Diff Eq: para trazar la solución numérica de una ecuación diferencial linear
Conic: para trazar ecuaciones cónicas (círculos, elipses, hipérbolas, parábolas)
Truth: para trazar desigualdades en el plano
Histogram: para trazar los histogramas de la frecuencia (usos estadísticos)
Bar: para trazar las gráficas de barra simples
Scatter: para trazar los diagramas de la dispersión de datos discretos (usos estadísticos)
Slopefield: para trazar los segmentos tangentes de una función f(x,y) = 0.
Fast3D: para trazar superficies curvas en el espacio
Wireframe: para trazar superficies curvas en el espacio con rejillas
Ps-Contour: para trazar diagramas del contorno de superficies
Y- Slice: para trazar una vista rebanadora de una función f(x,y).
Gridmap: para trazas de la parte real e imaginaria de una función compleja
Pr-Surface: para las superficies paramétricas dadas por x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v).

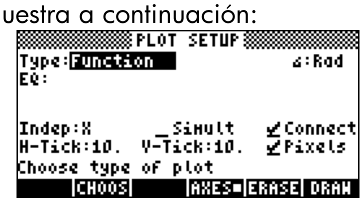
Trazar una expresión de la forma *y = f(x)*

En esta sección presentamos un ejemplo de un diagrama de una función de la forma *y = f(x).* Para proceder con el diagrama, primero, elimine la variable x, si se define en el directorio actual (x será la variable independiente el ambiente PLOT de la calculadora, por lo tanto, usted no

tiene que predefinirla). Crear un sub-directorio llamado 'TPLOT' (inglés, Test PLOT), o el otro nombre significativo, realizar el ejercicio siguiente.
Como ejemplo grafíquese la función,

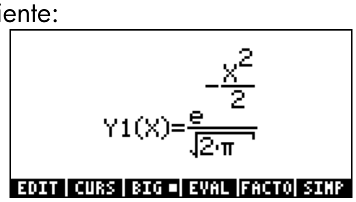
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$$

- Actívese el ambiente PLOT SETUP (diseño de la gráfica) al presionar ← 2D/3D . Selecciónese la opción Function en la especificación TYPE, y la variable 'X' como variable independiente (INDEP). Presione NXT OK para recuperar la pantalla normal. El ambiente PLOT SET UP luce como se muestra a continuación:



- **Nota:** Usted notará que una variable nueva, llamado PPAR, se muestra en las etiquetas del menú. PPAR, en inglés, significa Plot PARameters, o parámetros del diagrama. Para ver su contenido, presione → PPAR. Una explicación detallada del contenido de PPAR se proporciona más adelante en este capítulo. Presione ◄ para remover esta línea de la pantalla.

- Actívese el ambiente PLOT (gráfica) al presionar ← Y= (simultáneamente si se usa el modo RPN). Presione la tecla ADD para activar el escritor de ecuaciones. La calculadora requiere que se escriba el lado derecho de la ecuación Y1(x) = ▪. Escríbase la función a ser graficada de manera que el escritor de ecuaciones muestre lo siguiente:



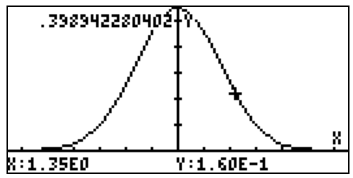
- Presiónese ENTER para regresar al ambiente PLOT. La expresión 'Y1(X) = EXP(-X^2/2)/√(2*π)' será seleccionada. Presiónese NXT OK para recuperar la pantalla normal.

> **Nota:** Dos nuevas variables se muestran en las etiquetas del menú, a saber EQ y Y1. Para ver el contenido de EQ, utilizar ↱ EQ. El contenido de EQ es simplemente el nombre de la función 'Y1(X)'. La variable EQ se utiliza por la calculadora para almacenar la ecuación, o ecuaciones, a ser trazada(s).
> Para ver el contenido de Y1 Presione ↱ Y1. Usted conseguirá la función Y1(X) definida como el programa:
>
> `<< →X 'EXP(-X^2/2)/√(2*π)' >>.`
>
> Presione ◄, dos veces, para eliminar los contenidos de la pantalla.

- Actívese el ambiente PLOT WINDOW (ventana gráfica) al presionar ↰ WIN (simultáneamente si se usa el modo RPN). Use un rango de –4 a 4 para la especificación H-VIEW (vista horizontal), presione después AUTO para generar automáticamente el rango vertical, V-VIEW. La pantalla PLOT WINDOW deberá lucir como se muestra a continuación:

- Dibújese la gráfica: ERASE DRAW (esperar hasta que se termina de dibujar la gráfica)
- Para ver los rótulos de los ejes coordenados: EDIT NXT LABEL MENU
- Para recuperar el primer menú gráfico: NXT NXT PICT
- Para recorrer o trazar la curva: TRACE (X,Y). Úsense las teclas direccionales horizontales (◄►) para recorrer la curva. Las

coordenadas de los puntos trazados se mostrarán al pié de la pantalla. Verifíquense las siguientes coordenadas: x = 1.05 , y = 0.0131, y x = -1.48 , y = 0.034. La figura se muestra a continuación:



- Para recuperar el menú y regresar al ambiente PLOT WINDOW, presiónese NXT CANCL, y después NXT OK.

Algunas operaciones de PLOT para gráficas FUNCTION

Para discutir estas opciones de PLOT, modificaremos la función para forzarla para tener algunas raíces reales (puesto que la curva actual se contiene totalmente sobre el eje de x, no tiene ninguna raíz real.) Presione ↱ Y1 para enumerar el contenido de la función Y1 en la pantalla: << →X 'EXP(-X^2/2)/ √(2*π) ' >>. Para editar esta expresión use:

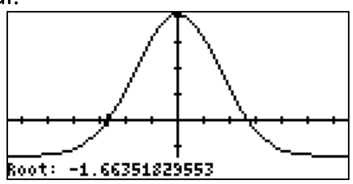
▼	Activa el editor de línea
↱ ▼	Cursor al final de la línea
◀ ◀ ◀ − 0 • 1	Modifica la expresión
ENTER	Regresa a la pantalla normal

Después, almacenar la expresión modificada en la variable y usando ↰ Y1 si en modo RPN, o ↰ ANS STO▶ Y1 en modo ALG.

La función a ser trazada es ahora, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) - 0.1$

Active el ambiente PLOT WINDOW escribiendo ↰ WIN (Presiónelas simultáneamente si en modo RPN.) Mantenga el rango de –4 a 4 para H-VIEW, Presione ▼ AUTO para generar el rango V-VIEW. Para trazar la gráfica, presione ERASE DRAW

- Una vez se traza el gráfico, presione FCN para tener acceso al menú de la función. Con este menú usted puede obtener la información adicional sobre el diagrama por ejemplo su intersección con el eje x, las raíces, las pendientes de la línea de la tangente, el área debajo de la curva, el etc. Por ejemplo, para encontrar la raíz en el lado izquierdo de la curva, mover el cursor cerca del eje x, y presione ROOT. Se obtendrá el resultado: ROOT: -1.6635…. Presione NXT para recobrar el menú. He aquí el resultado de ROOT en el diagrama actual:



- Si usted mueve el cursor hacia el lado derecho de la curva, presionando la tecla (▶), y presione ROOT, el resultado es ROOT: 1.6635... La calculadora indicó, antes de demostrar la raíz, que fue encontrado a través de *SIGN REVERSAL* (cambio de signo). Presione NXT para recobrar el menú.
- Presionando ISECT le dará la intersección de la curva con el eje x, que es esencialmente la raíz. Colocar el cursor exactamente en la raíz y presione ISECT. Usted conseguirá el mismo mensaje que antes, a saber *SIGN REVERSAL*, antes de conseguir el resultado I-SECT: 1.6635…. La función ISECT se usa para determinar la intersección de las dos curvas más cercana a la localización del cursor. En este caso, donde está implicada solamente una curva, a saber, Y1(X), la intersección buscada es la del f(x) con el eje x, sin embargo, usted debe poner la derecha del cursor en la raíz de producir el mismo resultado. Presione NXT para recobrar el menú.
- Coloque el cursor en la curva en cualquier punto y presione SLOPE para conseguir el valor de la pendiente en ese punto. Por ejemplo, en la raíz negativa, SLOPE: 0.16670…. Presione NXT para recobrar el menú.

- Para determinar el punto más alto de la curva, coloque el cursor cerca de la cima y presione EXTR El resultado es EXTRM: 0.. Presione NXT para recobrar el menú.
- Otras teclas disponible en el primer menú son AREA para calcular el área debajo de la curva, y SHADE para sombrear un área debajo de la curva. Presione NXT para ver más opciones. El segundo menú incluye un botón llamado VIEW que destella por algunos segundos la ecuación trazada. Presione VIEW. Alternativamente, usted puede presionar la tecla NEXQ (NEXt eQuation) para ver el nombre de la función Y1(x). Presione NXT para recobrar el menú.
- La tecla F(X) da el valor de f(x) que corresponde a la posición del cursor. Coloque el cursor dondequiera en la curva y presione F(X). El valor será demostrado en la esquina izquierda más baja de la pantalla. Presione NXT para recobrar el menú.
- lugar del · el cursor en cualquier punto dado de la trayectoria y presione TANL para obtener la ecuación de la línea tangente a la curva en ese punto. La ecuación será mostrada en la esquina izquierda inferior de la pantalla. Presione NXT para recobrar el menú.
- Si Ud. presiona F' la calculadora trazará la función derivada, f'(x) = df/dx, así como la función original, f(x). Note que hay dos puntos de intersección de las dos curvas. Mueva el cursor cerca del punto izquierdo de la intersección y presione FCN ISECT, para obtener I-SECT: (-0.6834…,0.21585). Presione NXT para recobrar el menú.
- Para dejar el ambiente de FCN, presione PICT (o NXT PICT).
- Presione CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW. Entonces, Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.

Nota: la pantalla demostrará todas las operaciones del gráfico realizadas, identificado correctamente.

- Active el ambiente PLOT presionando, simultáneamente si en modo RPN, ← Y= . Notar que el campo destacado en el ambiente PLOT ahora contiene la derivada de Y1(X). Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.

- Presione ⓡ EQ para comprobar el contenido de EQ. Usted notará que contiene una lista en vez de una sola expresión. La lista tiene como elementos una expresión para la derivada de Y1(X) y Y1(X) misma. Originalmente, EQ contenía solamente Y1(x). Después de que presionáramos F' en el ambiente FCN, la calculadora agregó automáticamente la derivada de Y1(x) a la lista de ecuaciones en EQ.

Almacenando un gráfico para el uso futuro

Si usted desea almacenar su gráfico a una variable, active el ambiente PICTURE presionando ◀. Entonces, presione EDIT NXT NXT PICT→. Esto captura el cuadro actual en un objeto gráfico. Para volver a la pantalla, presione PICT CANCL.

En el nivel 1 de la pantalla usted verá un objeto gráfico descrito como `Graphic 131 × 64`. Esto se puede almacenar en una variable, digamos, PIC1.

Para defender su figura otra vez, recordar el contenido de PIC1 variable a la pantalla. La pantalla mostrará la línea: `Graphic 131 × 64`. Para ver el gráfico, incorporar el ambiente PICTURE, presionando ◀.

Despeje el cuadro actual, EDIT NXT ERASE.

Mover el cursor a la esquina izquierda superior de la pantalla, usando las teclas ◀ y ▲ .

Para mostrar la figura actualmente en el nivel 1 de la pantalla, presione NXT REPL .

Para volver a la función normal de la calculadora, presione PICT CANCL.

> **Nota:** Para ahorrar espacio impreso, no incluiremos más gráficos producidos por las instrucciones en este capítulo. Se invita al usuario que produzca esos gráficos por sí mismo.

Gráficos de funciones transcendentales

En esta sección utilizamos algunas de las características de los gráficos de la calculadora para demostrar el comportamiento típico del logaritmo natural, funciones hiperbólicas exponenciales, funciones trigonométricas, etc. Usted no verá más gráficos en este capítulo, en su lugar el usuario debe verlos en la calculadora.

Gráfico de ln(X)

Presione, simultáneamente si en modo RPN, la tecla ← y la tecla 2D/3D (F4) para producir la pantalla PLOT SETUP. El campo etiquetado **Type** será destacado. Si la opción `Function` no se ha sido seleccionada, presione la tecla CHOOS, use las teclas direccionales verticales para seleccionar `Function`, y presione OK para terminar la selección. Comprobar que el campo Indep: contiene el valor ' X '. Si ese no es el caso, presione la tecla direccional vertical inferior dos veces hasta que el campo `Indep` es seleccionado, Presione la tecla etiquetada EDIT y modifique el valor de la variable independiente para leer 'X'. Presione OK al terminar. Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.

A continuación, redimensionamos la pantalla gráfica. Primero, presione, simultáneamente si en modo RPN, la tecla ← y la tecla Y= (EEX) para producir la pantalla PLOT-FUNCTION. Si hay cualquier ecuación destacada en esta ventana, presione DEL según se necesite para despejar la ventana totalmente. Cuando la pantalla PLOT-FUNCTION es vacío usted conseguirá un mensaje pronto que lea: **No Equ., Presione ADD**. Presione la tecla etiquetada ADD . Esto accionará el escritor de ecuaciones con la expresión Y1(X)=◄ . Escriba LN(X). Presione ENTER para volver a la pantalla PLOT-FUNCTION. Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.

El paso siguiente es presionar, simultáneamente si en modo RPN, las teclas ← WIN (F2) para producir la pantalla PLOT WINDOW - FUNCTION. Muy probablemente, la pantalla demostrará los rangos horizontal (H-View) y vertical (`V-View`) como: H-View: -6.5 6.5, V-View: -3.1 3.2

Éstos son los valores prefijados para los rangos x y y, respectivamente, de la pantalla actual de los gráficos. Después, cambiar <u>H-View a</u>: H-View: -1 10 usando 1 +/- OK 1 0 OK. A continuación, presione la tecla etiquetada AUTO para dejar que la calculadora determine el rango vertical correspondiente. Después de un par de segundos este rango será mostrado en la pantalla PLOT WINDOW-FUNCTION. A este punto somos listos producir el gráfico de ln(X). Presione ERASE DRAW para trazar la función logaritmo natural.

<u>Para agregar etiquetas al gráfico,</u> presione EDIT NXT LABEL. Presione LABEL para quitar las etiquetas del menú, y conseguir una vista completa del gráfico. Presione NXT para recuperar el menú gráfico actual. Presione NXT PICT para recuperar el menú gráfico original.

<u>Para determinar los coordenadas de puntos en la curva,</u> presione TRACE (el cursor se mueve encima de la curva en un punto situado cerca del centro de la gama horizontal). A continuación, presione (X,Y) para ver los coordenadas de la localización del cursor actual. Estos coordenadas serán demostrados al pié de la pantalla. Utilizar las teclas direccionales horizontales para mover el cursor a lo largo de la curva. Pues usted mueve el cursor a lo largo de la curva los coordenadas de la curva se mostrarán al pié de la pantalla. Verifique que cuando Y:1.00E0, X:2.72E0. Éste es el punto (*e,1*), dado que *ln(e) = 1*. Presione NXT para recuperar el menú de los gráficos.

A continuación, encontraremos la intersección de la curva con el eje x presionando FCN ROOT. La calculadora produce el valor `Root: 1`, confirmando que *ln(1) = 0*. Presione NXT NXT PICT CANCL para volver a la pantalla PLOT WINDOW – FUNCTION. Presione ENTER para regresar a la pantalla normal. Usted notará que la raíz encontrada en el ambiente de los gráficos fue copiada a la pantalla de la calculadora.

Nota: Cuando uno presiona VAR , su lista de las variables demostrará las nuevas variables llamadas X y Y1 . Presione ↱ Y1 para ver el contenido de esta variable. Usted conseguirá el programa << → X 'LN(X)' >> , el cuál usted reconocerá el programa del EL del como que puede resultar de definir la función 'Y1(X) = LN(X)' usando DEF . Esto es básicamente lo qué sucede cuando usted ADD (adiciona) una función en la pantalla PLOT – FUNCTION (la ventana que resulta presionando Y= , simultáneamente si en modo RPN), i.e., la función consigue y definida agregada a su lista variable.

A continuación, presione X para ver el contenido de esta variable. Un valor de 10.275 se pone adentro de la pantalla. Este valor es determinado por nuestra selección para el rango horizontal de la pantalla. Seleccionamos un rango entre -1 y 10 para X. Para producir el gráfico, la calculadora genera valores entre los límites del rango usando un incremento constante, y que almacena los valores generados, uno a la vez, en la variable X cuando se traza el gráfico. Para el rango horizontal (–1,10), el incremento usado se parece ser 0.275. Cuando el valor de X llega a ser más grande que el valor máximo en el rango (en este caso, cuando X = 10.275), el dibujo del gráfico se detiene. El valor pasado de X para el gráfico bajo consideración se mantiene en la variable X. Elimine X y Y1 antes de continuar.

Gráfico de la función exponencial

Primero, cargar la función *exp(X),* presionando, simultáneamente si en modo RPN, las teclas Y= (EEX) para tener acceso a la ventana PLOT-FUNCTION. Presione DEL para quitar la función LN(X), si usted no suprimió Y1 según lo sugerido en la nota anterior. Presione ADD y escriba e^x ALPHA X ENTER para obtener EXP(X) y regrese a la pantalla PLOT-FUNCTION. Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.

A continuación, presione, simultáneamente si en modo RPN, las teclas WIN (F2) para producir la pantalla PLOT WINDOW - FUNCTION. Cambie los valores de H-View a: H-View: -8 2 usando 8 +/- OK 2 OK. A continuación, presione AUTO. Después de que se calcule el rango vertical, presione ERASE DRAW para trazar la función exponencial.

Para agregar etiquetas a la gráfica, presione EDIT NXT LABEL. Presione MENU para remover las etiquetas del menú, y obtenga una vista completa del gráfico. Presione NXT NXT PICT CANCL para regresar a la pantalla PLOT WINDOW – FUNCTION. Presione ENTER para regresar a la pantalla normal.

La variable PPAR

Presione VAR para recobrar el menú de variables, de ser necesario. En su menú de las variables usted debe tener una variable etiquetada PPAR. Presione ↱ PPAR para conseguir el contenido de esta variable en pantalla del la. Presione la tecla direccional vertical hacia abajo, para activar el editor de línea, y use teclas direccionales verticales para ver el contenido completo de PPAR. La pantalla mostrará los siguientes valores:

PPAR significa *Plot PARameters*, su contenido de y incluye dos pares pedidos de números reales, (-8.,-1.10797263281) y (2.,7.38905609893), la cuál representa los coordenadas de la esquina izquierda inferior y la esquina derecha superior del diagrama, respectivamente. A continuación, PPAR enumera el nombre de la variable independiente, X, seguido por un número que especifique el incremento de la variable independiente en la generación del diagrama.

El valor demostrado aquí es el valor prefijado, cero (0.), lo que especifica incrementos en X que corresponden a 1 píxel en la pantalla de los gráficos. El elemento siguiente en PPAR es una lista que contiene primero los coordenadas del punto de la intersección de los ejes del diagrama, i.e., (0.,0.), seguido por una lista que especifica las marcas en los ejes x y y, respectivamente {# 10d # 10d}. A continuación, PPAR enumera el tipo de diagrama que deba ser generado, i.e., FUNCTION, y, finalmente, la etiqueta del eje y, i.e., Y.

La variable PPAR, si es no existe, se genera cada vez que usted crea un diagrama. El contenido de la función cambiará dependiendo del tipo de diagrama y en las opciones que usted seleccionó en la pantalla PLOT (la ventana generada por la activación simultánea de las teclas ⬅ y WIN (F2)).

Funciones inversas y sus gráficos

Sea $y = f(x)$, si podemos encontrar una función $y = g(x)$, tal que, $g(f(x)) = x$, decimos que $g(x)$ es la función inversa de $f(x)$. Típicamente, la notación $g(x) = f^{-1}(x)$ se utiliza denotar una función inversa. Usando esta notación podemos escribir: si $y = f(x)$, entonces $x = f^{-1}(y)$. También, $f(f^{-1}(x)) = x$, y $f^{-1}(f(x)) = x$.

Según lo indicado anterior, las funciones ln(x) y exp(x) son inversas la una con la otra, i.e., ln(exp(x)) = x, y exp(ln(x)) = x. Esto se puede verificar en la calculadora al evaluar las expresiones siguientes en el Escritor de Ecuaciones: LN(EXP(X)) y EXP(LN(X)). Ambas se evalúan a X.

Cuando una función $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$ se trazan simultáneamente en el mismo sistema de hachas, sus gráficos son reflexiones de cada una sobre la línea $y = x$. Comprobemos este hecho con la calculadora para las funciones LN(X) y EXP(X) siguiendo este procedimiento:

Presione, simultáneamente si en modo RPN, ⬅ Y=. La función Y1(X) = EXP(X) si estar disponible en la pantalla PLOT - FUNCTION del ejercicio anterior. Presione ADD, y escriba la función Y2(X) = LN(X). También, cargar la función Y3(X) = X. Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.

Presione, simultáneamente si en modo RPN, ⬅ WIN, y cambie el rango H-VIEW para mostrar: H-View: -8 8

Presione AUTO para generar el rango vertical. Presione ERASE DRAW para producir el gráfico de y = ln(x), y = exp(x), y y =x, simultáneamente si en modo RPN.

Usted notará que solamente el gráfico de y = exp(x) es claramente visible. Algo fue mal con la selección de AUTO de la gama vertical. Qué sucede es ése, cuando usted presiona AUTO en la pantalla PLOT FUNCTION –

WINDOW, la calculadora produce el rango vertical que corresponde a la primera función en la lista de las funciones que se trazarán. La cuál, en este caso, es Y1(X) = EXP(X). Tendremos que escribir el rango vertical nosotros mismos para mostrar las otras dos funciones en el mismo diagrama.

Presione CANCL para regresar a la pantalla PLOT FUNCTION - WINDOW. Modifique los rangos vertical y horizontal para mostrar: H-View: -8 8, V-View: -4 4

Seleccionando estos rangos nos aseguramos que la escala del gráfico esté mantenida 1 vertical a 1 horizontal. Presione ERASE DRAW y usted conseguirá los diagramas del logaritmo natural, exponenciales, y $y = x$. Será evidente del gráfico que LN(X) y EXP(X) son las reflexiones de la otra sobre la línea y = X. Presione CANCL para volver a la pantalla PLOT WINDOW – FUNCTION. Presione ENTER para regresar a la pantalla normal.

Resumen de la operación del diagrama FUNCTION

En esta sección presentamos la información con respecto a las pantallas PLOT SETUP, PLOT-FUNCTION, y PLOT WINDOW accesible con la combinación de la tecla ← con las teclas F1 a F4. De acuerdo con los ejemplos de gráficas presentados arriba, el procedimiento para producir un diagrama de FUNCTION (i.e., uno que traza unas o más funciones de la forma Y = F(X)), es el siguiente:

← 2D/3D, simultáneamente si en modo RPN: Acceso a la pantalla PLOT SETUP. De ser necesario, Cambie TYPE a `FUNCTION`, y escriba el nombre de la variable independiente.

Ajustes:

- Un símbolo de aprobado en `_Simult` significa que si usted tiene dos o más diagramas en el mismo gráfico, ellos será trazados simultáneamente al producir el gráfico.
- Un símbolo de aprobado en `_Connect` significa que la curva será una curva continua más bien que un sistema de puntos individuales.
- Un símbolo de aprobado en `_Pixels` significa que las marcas indicadas por `H-Tick` y `V-Tick` serán separadas por ese número de píxeles.
- El valor prefijado para ambos `H-Tick` y `V-Tick` es 10.

Opciones de teclas de menú

- Use EDIT para corregir funciones de valores en el campo seleccionado.
- Use CHOOS para seleccionar el tipo de diagrama a utilizar cuando el campo `Type:` se destaca. Para los ejercicios actuales, quisiéramos que este campo fijara a FUNCTION.

> **Nota:** las teclas EDIT y CHOOS no están disponibles en el mismo tiempo. Uno o el otro será seleccionado dependiendo de los cuales se destaca entrar el campo.

- Presione la tecla AXES para seleccionar o no el trazado de ejes en el gráfico. Si la opción 'plot axes' se selecciona, un punto cuadrado aparecerá en la etiqueta de la tecla: AXES■ . La ausencia del punto cuadrado indica que las hachas no serán trazadas en el gráfico.
- Use ERASE para borrar cualquier gráfico que existe actualmente en la ventana de pantalla de los gráficos.
- Use DRAW para producir la gráfica según el contenido actual de PPAR para las ecuaciones listadas en la pantalla PLOT-FUNCTION.
- Presione NXT para tener acceso al segundo sistema de teclas del menú en esta pantalla.
- Use RESET para reajustar cualquier campo seleccionado a su valor prefijado.
- Use CANCL cancelar cualesquiera cambia en la pantalla PLOT SETUP y volver a la pantalla normal de la calculadora.
- Presione OK para guardar cambios a las opciones en la pantalla PLOT SETUP y volver a la pantalla normal de la calculadora.

↰ Y=, simultáneamente si en modo RPN: Acceso a la pantalla PLOT (en este caso se llamará PLOT –FUNCTION).

Opciones de teclas:

- Use EDIT para corregir la ecuación destacada.
- Use ADD para agregar nuevas ecuaciones al diagrama.

> **Nota:** ADD o EDIT activarán el escritor de ecuaciones EQW que usted puede utilizar escribir nuevas ecuaciones o corregir viejas ecuaciones.

- Use DEL para quitar la ecuación destacada.

- Use CHOOS para agregar una ecuación que se define ya en su menú de las variables, pero no está enumerada en la pantalla PLOT – FUNCTION.
- Use ERASE para borrar cualquier gráfico que existe actualmente en la ventana de pantalla de los gráficos.
- Use DRAW para producir la gráfica según el contenido actual de PPAR para las ecuaciones enumeró en la pantalla PLOT-FUNCTION.
- Presione NXT para activar la segunda lista del menú.
- Use MOVE↓ y MOVE↑ para bajar la localización seleccionada de la ecuación una para arriba o, respectivamente.
- Use CLEAR si usted desea al claro todas las ecuaciones actualmente activas en la pantalla PLOT – FUNCTION. La calculadora verificará si o no usted desee eliminar todas las funciones antes de ejecutar este comando. Seleccione YES, y presione OK para proceder con despejar todas las funciones. Seleccione NO, y presione OK para desactivar la opción CLEAR.
- Presione OK cuando párrafos hechos regresar un normal del pantalla del la.

← WIN , simultáneamente si en modo RPN: Acceso a la pantalla PLOT WINDOW.

Ajustes:

- Escriba límites inferior y superior para los rangos de vista horizontal (H-View) y vertical (V-View) en la pantalla de diagramas. O,
- Escriba límites inferior y superior para la vista horizontal (H-View), y Presione AUTO, mientras que el cursor está en uno de los campos de V-View, para generar el rango de la vista vertical (V-View), automáticamente. O,
- Escriba los límites inferior y superior de la vista vertical (V-View), y presione AUTO, mientras que el cursor está en uno de los campos H-View, para generar el rango de la vista horizontal (H-View) automáticamente.
- La calculadora utilizará el rango de vista horizontal (H-View) para generar valores para la gráfica, a menos que Ud. cambie las opciones Indep Low, (Indep) High, y (Indep) Step. Estos valores determinan, respectivamente, el mínimo, máximo, y valores del incremento de la variable independiente que se utilizará en el diagrama. Si la opción default se muestra en los campos Indep Low, (Indep) High, y (Indep) Step,

la calculadora utilizará los valores máximos del mínimo y determinados cerca H-View.

- Un símbolo de aprobado en _Pixels significa que los valores de los incrementos variables independientes (Step:) se dan en píxeles más bien que en coordenadas del diagrama.

Opciones de teclas de menú:

- Use EDIT para corregir cualquier entrada en la ventana.
- Use AUTO según lo explicado en *ajustes,* arriba.
- Use ERASE para borrar cualquier gráfico que existe actualmente en la ventana de pantalla de los gráficos.
- Use DRAW para producir la gráfica según el contenido actual de PPAR para las ecuaciones enumeró adentro la pantalla PLOT-FUNCTION.
- Presione NXT para activar la segunda lista del menú.
- Use RESET para reajustar el campo seleccionado (es decir, donde se coloca el cursor) a su valor prefijado.
- Use CALC para tener acceso a la pantalla de la calculadora para realizar los cálculos que pueden ser necesarios obtener un valor para una de las opciones en esta ventana. Cuando la pantalla de la calculadora se pone a su disposición, usted también tendrá las opciones de las teclas del menú CANCL y OK .
- Use CANCL en caso que Ud. quiera cancelar el cálculo actual y regresar a la pantalla PLOT WINDOW.   O,
- Use OK para aceptar los resultados de su cálculo y volver a la pantalla PLOT WINDOW.
- Use TYPES para conseguir la información sobre el tipo de objetos que se pueden utilizar en el campo seleccionado de la opción.
- Use CANCL para cancelar cualesquiera cambia a la pantalla PLOT WINDOW y volver a la pantalla normal de la calculadora.
- Presione OK para aceptar cambios a la pantalla PLOT WINDOW vuelta de y a la pantalla normal de la calculadora.

← GRAPH , simultáneamente si en modo RPN: Traza el gráfico basado en los ajustes almacenados en PPAR variable y en las funciones actuales definidas en la pantalla PLOT – FUNCTION . Si un gráfico, diferente del que usted está trazando, existe ya en la pantalla gráfica de la pantalla, el nuevo diagrama será sobrepuesto en el diagrama existente. Éste puede no ser el resultado que usted desea, por lo tanto, se recomienda utilizar las teclas ERASE DRAW disponible en la pantallas PLOT SETUP, PLOT-FUNCTION o PLOT WINDOW.

Diagramas de funciones trigonométricas e hiperbólicas

Los procedimientos usados arriba para trazar LN(X) y EXP(X), por separadamente o simultáneamente, puede ser utilizado trazar cualquier función de la forma y = f(x). Se deja como un ejercicio al lector para producir los diagramas de funciones trigonometriítas o hiperbólicas y sus inversas. La tabla abajo sugiere los valores para utilizar para los rangos horizontal y vertical de la gráfica. Usted puede incluir la función Y=X cuando se traza simultáneamente una función y su inversa para verificar su "reflejo" sobre la línea Y = X.

	Rango de H-View		Rango de V-View	
Función	**Mínimo**	**Máximo**	**Mínimo**	**Máximo**
SIN(X)	-3.15	3.15	AUTO	
ASIN(X)	-1.2	1.2	AUTO	
SIN & ASIN	-3.2	3.2	-1.6	1.6
COS(X)	-3.15	3.15	AUTO	
ACOS(X)	-1.2	1.2	AUTO	
COS & ACOS	-3.2	3.2	-1.6	1.6
TAN(X)	-3.15	3.15	-10	10
ATAN(X)	-10	10	-1.8	1.8
TAN & ATAN	-2	-2	-2	-2
SINH(X)	-2	2	AUTO	
ASINH(X)	-5	5	AUTO	
SINH & ASINH	-5	5	-5	5
COSH(X)	-2	2	AUTO	
ACOSH(X)	-1	5	AUTO	
COS & ACOS	-5	5	-1	5
TANH(X)	-5	5	AUTO	
ATANH(X)	-1.2	1.2	AUTO	
TAN & ATAN	-5	5	-2.5	2.5

Generación de una tabla de los valores para una función

Las combinaciones de teclas ⬅ TBLSET (F5) y ⬅ TABLE (F6), presionadas simultáneamente si se usa el modo RPN, permiten al usuario producir la tabla de valores de una función. Por ejemplo, para producir una tabla de la función Y(X) = X/(X+10), en el rango -5 < X < 5, síganse las siguientes instrucciones:

- Se generarán valores de la función f(x), definida anteriormente, para valores de x de -5 a 5, en incrementos de 0.5. Para empezar, asegúrese que el tipo de gráfica seleccionado en el ambiente PLOT SETUP (⬅ 2D/3D, simultáneamente si se usa el modo RPN) es **FUNCTION**. Si ese no es el tipo seleccionado, presiónese la tecla CHOOS y selecciónese la opción **FUNCTION**, presiónese OK para terminar la selección.
- Presiónese ▼ para seleccionar la opción EQ, y escríbase la expresión: 'X/(X+10)'
- Para aceptar los cambios realizados en el ambiente PLOT SETUP y recuperar la pantalla normal, presiónese NXT OK.
- El siguiente pase es acceder el ambiente Table Set-up (diseño de tabla) usando la combinación de teclas ⬅ TBLSET (es decir, la tecla F5) – simultáneamente si se usa el modo RPN. La pantalla resultante permite al usuario seleccionar el valor inicial (*Start*) y el incremento (*Step*). Escríbanse los siguientes valores: 5 +/- OK 0 . 5 OK 0 . 5 OK (es decir, factor de amplificación = 0.5). Presiónese la tecla ✓CHK hasta que aparezca la marca ✓ enfrente de la opción *Small Font* (caracteres pequeños) de ser necesario. Presione OK para terminar y regresar a la pantalla normal.

La variable TPAR

Después de preparar la tabla, su calculadora creará una variable llamada TPAR (Table PARameters) que almacena información relevante a la tabla que será generada. Para ver el contenido de esta variable, presione ➡ TPAR.

- Para ver la tabla, presiónese ← TABLE (es decir, la tecla F6) – simultáneamente si se usa el modo RPN. Esta acción producirá una tabla de valores de *x = -5, -4.5, …,* y los valores correspondientes de f(x), listados bajo el encabezado Y1. Utilícense las teclas direccionales verticales para mover el cursor en la tabla. Nótese que no tuvimos que indicar el valor final de la variable independiente x. La tabla continua mas allá del valor máximo sugerido de x = 5.

Algunas de las opciones disponibles cuando la tabla es visible incluyen ZOOM, BIG, y DEFN:

- Cuando se selecciona la opción DEFN, la tabla muestra la definición de la función calculada.
- La tecla BIG cambia el tamaño de los caracteres. Presione esta tecla para verificar su operación.
- Cuando se selecciona la opción ZOOM (amplificar), se obtiene un menú con las opciones: *In*, *Out*, *Decimal, Integer*, y *Trig*. Practique los siguientes ejercicios:
  - Seleccione la opción *In*, y presione OK. La tabla se expande de manera que el incremento en x es de 0.25 en vez de 0.5. Lo que la calculadora hace es multiplicar el incremento original 0.5 por el factor de amplificación 0.5, para producir el nuevo incremento de 0.25. La opción *zoom in* es útil cuando se requiere una mayor resolución en la tabla.
  - Para incrementar la resolución en un factor adicional de 0.5, presiónese ZOOM, selecciónese *In* una vez más, y presiónese OK. El nuevo incremento en x es 0.0125.
  - Para recuperar el incremento anterior, presiónese ZOOM ▲ OK para seleccionar la opción *Un-zoom*. En este ejemplo, el incremento en x se incrementa a 0.25.
  - Para recuperar el incremento original de 0.5, selecciónese *un-zoom* una vez más, o úsese la opción *zoom out* (reducir amplificación) al presionar ZOUT OK.
  - La opción Decimal en ZOOM produce incrementos de 0.10.
  - La opción Integer en ZOOM produce incrementos de 1.

- La opción Trig en ZOOM produce incrementos relacionados a fracciones de π. Esta opción es útil en tablas de funciones trigonométricas.
- Para recuperar la pantalla normal presiónese la tecla ENTER.

Diagramas en coordenadas polares

Primero que todo, usted puede desear suprimir las variables usadas en ejemplos anteriores (por ejemplo, X, EQ, Y1, PPAR) usando la función PURGE (TOOL PURGE). Haciendo esto, todos los parámetros relacionados con los gráficos estarán despejados. Presione VAR para comprobar que las variables fueron eliminados.

Intentaremos trazar la función f(θ) = 2(1-sin(θ)), como sigue:

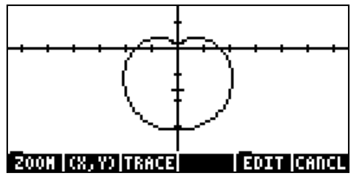
- Primero, asegúrese que la calculadora tenga ángulos en radianes.
- Presione ← 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT SETUP.
- Cambie TYPE a `Polar`, presionando CHOOS ▼ OK.
- Presione ▼ y escriba:

  ' 2 × ← () 1 − SIN ALPHA → T OK.

- El cursor está ahora en el campo `Indep` field. Presione ' ALPHA → T OK para cambiar la variable independiente a θ.
- Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.
- Presione ← WIN , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT (en este caso se llamará PLOT –POLAR).
- Cambie el rango H-VIEW a –8 a 8, usando 8 +/- OK 8 OK, y el rango V-VIEW a -6 a 2 usando 6 +/- OK 2 OK.

  Nota: Los rangos H-VIEW y la V-VIEW determinan las escalas de la ventana gráfica solamente, y rangos no se relacionan con el rango de valores de la variable independiente en este caso.

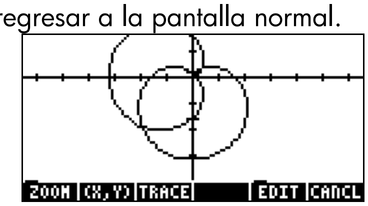
- Cambie el valor Indep Low a 0, y el valor High a 6.28 (≈ 2π), usando: 0 OK 6 . 2 8 OK.
- Presione ERASE DRAW para trazar la función en coordenadas polares. El resultado es a curve en la forma de un corazón. Esta curva se llama una *cardiode* (`cardios` significa "corazón" en griego)



- Presione EDIT NXT LABEL MENU para ver la gráfica con etiquetas. Presione NXT para recobrar el menú. Presione NXT PICT para recobrar el menú gráfico original.
- Presione TRACE (X,Y) para recorrer la curva. Los datos mostrados al pié de la pantalla son el ángulo θ y el radio r, aunque este último se denomina Y (nombre prefijado de la variable dependiente).
- Presione NXT CANCL para regresar a la pantalla PLOT WINDOW. Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.

En este ejercicio incorporamos la ecuación que se trazará directamente en la pantalla PLOT SETUP. Podemos también incorporar las ecuaciones para trazar usando la pantalla PLOT, i.e., simultáneamente si en modo RPN, presionando ← Y= . Por ejemplo, cuando Ud. presiona ← Y= después de acabar el ejercicio anterior, usted conseguirá la ecuación '2*(1-SIN(θ))' destacado. Digamos que deseamos trazar también la función '2*(1-COS(θ))' junto con la ecuación anterior.

- Presione ADD , y escriba 2 × ← () 1 − COS ALPHA → T ENTER, para escribir la nueva ecuación.
- Presione ERASE DRAW para ver las dos ecuaciones trazadas en la misma figura. El resultado son dos *cardioides* que se interceptan. Presione CANCL ON para regresar a la pantalla normal.



Trazado de curvas cónicas

La forma más general de una curva cónica en el plano x-y es: $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F = 0$. También reconocemos como ecuaciones cónicas ésos dados en la forma canónica para las figuras siguientes:

- círculo: $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2 = r^2$
- elipse: $(x-x_o)^2/a^2 + (y-y_o)^2/b^2 = 1$
- parábola: $(y-b)^2 = K(x-a)$, ó $(x-a)^2 = K(y-b)$
- hipérbola: $(x-x_o)^2/a^2 + (y-y_o)^2/b^2 = 1$, ó $xy = K$,

donde x_o, y_o, a, b, y K son constantes.

El nombre curvas cónicas se usa porque estas figuras (círculos, elipses, parábolas o hipérbolas) resultan de la intersección de un plano con un cono. Por ejemplo, un círculo es la intersección de un cono con un plano perpendicular al eje principal del cono.

La calculadora tiene la capacidad de trazar unas o más curvas cónicas seleccionando Conic como TYPE en el ambiente PLOT. Cerciorarse de suprimir las variables PPAR y EQ antes de continuar. Por ejemplo, almacenemos la lista de ecuaciones

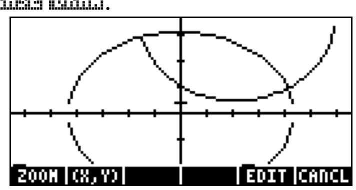
{ '(X-1)^2+(Y-2)^2=3' , 'X^2/4+Y^2/3=1' }

en la variable EQ.

Estas ecuaciones las reconocemos como la de un círculo centrado en (1.2) con el radio $\sqrt{3}$, y de una elipse centrada en (0,0) con longitudes del semi-eje $a = 2$ y $b = \sqrt{3}$.

- Active el ambiente PLOT, presionando ← 2D/3D, simultáneamente si en modo RPN, y seleccione `Conic` como el `TYPE`. La lista de ecuaciones se mostrará en la posición EQ.
- Asegúrese de que la variable independiente (`Indep`) está fija a 'X' y la variable dependiente (`Depnd`) a 'Y'.
- Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.

- Active el ambiente PLOT WINDOW, presionando ← WIN , simultáneamente si en modo RPN.
- Cambie el rango para H-VIEW a -3 a 3, usando 3 +/- OK 3 OK. También, cambie el rango V-VIEW a -1.5 a 2 usando 1 • 5 +/- OK 2 OK.
- Cambie los campos *Indep Low*: y *High:* a Default usando NXT RESET mientras que cada uno de esos campos se destaca. Seleccione la opción *Reset value* después de presionar RESET. Presione OK para terminar el reajuste de valores. Presione NXT para regresar al menú principal.
- Trace la gráfica: ERASE DRAW.

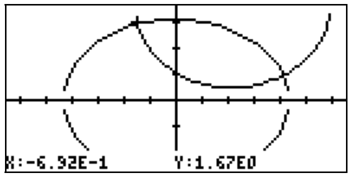


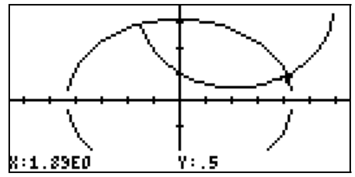
Nota: Los rangos `H-View` y `V-View` fueron seleccionados para mostrar la intersección de las dos curvas. No hay regla general para seleccionar estos rangos, excepto basado en lo que sabemos sobre las curvas. Por ejemplo, para las ecuaciones demostradas arriba, sabemos que el círculo se extenderá desde -3+1 = -2 a 3+1 = 4 en x, y desde -3+2=-1 a 3+2=5 en y. Además, la elipse, que se centra en el origen (0,0), extenderá desde -2 a 2 en x, y desde -√3 a √3 en y.

Note que para el círculo y la elipse la región que corresponde a los extremos derechos izquierdos en y de las curvas no está trazada. Éste es el caso con todos los círculos o las elipses trazados usando `Conic` como el `TYPE`.

- Para ver etiquetas: EDIT NXT LABEL MENU
- Para recobrar el menú: NXT NXT PICT
- Para estimar los coordenadas del punto de la intersección, presione la tecla (X,Y) y mueva el cursor tan cerca como sea posible a esos puntos usando las teclas direccionales. Los coordenadas del cursor se muestran en la pantalla. Por ejemplo, el punto de la intersección a la izquierda

está cerca de (-0.692, 1.67), mientras que la intersección a la derecha está cerca de (1.89,0.5).





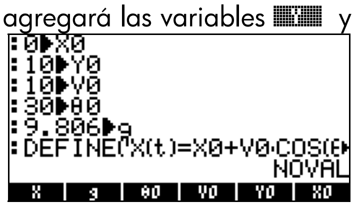
- Para recobrar el menú y regresar al ambiente PLOT, presione NXT CANCL.
- Para regresar a la pantalla normal, presione NXT OK.

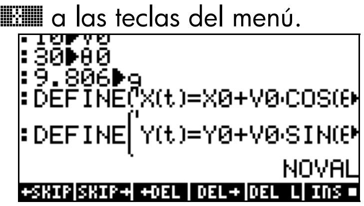
Diagramas paramétricos

Diagramas paramétricos en el plano son esos diagramas cuyas coordenadas se generan a través del sistema de ecuaciones x = x(t) y y = y(t), donde t se conoce como el parámetro. Un ejemplo de tal gráfico es la trayectoria de un proyectil, $x(t) = x_0 + v_0 \cdot COS\ \theta_0 \cdot t$, $y(t) = y_0 + v_0 \cdot \sin\ \theta_0 \cdot t - ½ \cdot g \cdot t^2$. Para trazar ecuaciones como éstas, que implican valores constantes x_0, y_0, v_0, y θ_0, necesitamos almacenar los valores de esos parámetros en variables. Para desarrollar este ejemplo, crear un sub-directorio llamado 'PROJM' (PROJectile Motion), y dentro de ese sub-directorio almacene las variables siguientes: X0 = 0, Y0 = 10, V0 = 10 , θ0 = 30, y g = 9.806. Cerciorarse de que la medida del ángulo de la calculadora está fija a DEG. A continuación, defina las funciones (use ← DEF):

X(t) = X0 + V0*COS(θ0)*t
Y(t) = Y0 + V0*SIN(θ0)*t – 0.5*g*t^2

Lo cuál agregará las variables Y y X a las teclas del menú.



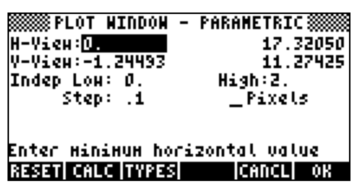


Para producir la gráfica, siga estos pasos:

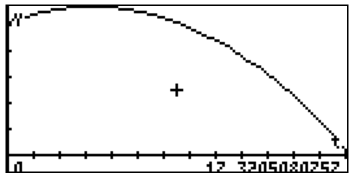
- Presione ← 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT SETUP.
- Cambie TYPE a `Parametric`, presionando CHOOS ▼ ▼ OK.
- Presione ▼ y escriba 'X(t) + i*Y(t)' OK para definir el diagrama paramétrico como el de una variable compleja. (las partes real e imaginaria de la variable compleja corresponden a las coordenadas x,y de la curva.) El cursor ahora está en el campo `Indep`. Presione ' ALPHA ← T OK para cambiar la variable independiente a *t*.
- Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.
- Presione ← WIN , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT (en este caso se llamará PLOT –PARAMETRIC). En vez de modificar primero los rangos vertical horizontal de la gráfica, como se hizo para otros tipos de diagrama, fijaremos los valores inferior y superior de la variable independiente como sigue:
- Seleccione el campo `Indep Low` field presionando ▼ ▼. Cambie este valor a 0 OK. Entonces, cambie el valor de `High` a 2 OK. Escriba 0 . 1 OK para el valor `Step` (i.e., step = 0.1).

Nota: A través de estos ajustes estamos indicando que el parámetro t tomará valores de t = 0, 0.1, 0.2, …, etc., hasta alcanzar el valor de 2.0.

- Presione AUTO. Esto generará valores automáticos de los rangos H-View y V-View de acuerdo con los valores de la variable independiente t y las definiciones de X(t) y Y(t). El resultado será:



- Presione ERASE DRAW para dibujar el diagrama paramétrico.
- Presione EDIT NXT LABEL MENU para ver la gráfica con etiquetas. Los parámetros de la ventana son tales que usted ve solamente la mitad de las etiquetas en el eje x.



- Presione NXT para recobrar el menú. Presione NXT PICT para recobrar el menú gráfico original.
- Presione TRACE (X,Y) para determinar coordenadas de cualquier punto en la gráfica. Use ▶ y ◀ para mover el cursor a lo largo de la curva. Al pié de la pantalla usted verá el valor del parámetro t y las coordenadas del cursor como (X,Y).
- Presione NXT CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW. Entonces, Presione ON , or NXT OK, para regresar a la pantalla normal.

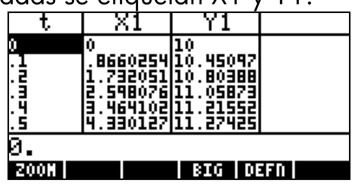
Una revisión de sus etiquetas de menú muestra que usted ahora tiene las variables siguientes: t, EQ, PPAR, Y, X, g, θ0, V0, Y0, X0. Las variables t, EQ, y PPAR son generados por la calculadora para almacenar los valores actuales del parámetro, t, de la ecuación que se trazará EQ (la cuál contiene 'X(t) + I∗Y(t)'), y los parámetros del diagrama. Las otras variables contienen los valores de las constantes usadas en las definiciones de X(t) y Y(t).

Usted puede almacenar diversos valores en las variables y producir los nuevos diagramas paramétricos de las ecuaciones del proyectil usadas en este ejemplo. Si usted desea borrar el contenido actual del cuadro antes de producir un nuevo diagrama, usted necesita tener acceso a la pantalla PLOT, PLOT WINDOW, o PLOT SETUP, presionando, ← Y= , ← WIN , o ← 2D/3D (las dos teclas deben ser presionadas simultáneamente si en modo RPN). Entonces, presione ERASE DRAW. Presione CANCL para regresar a la pantalla PLOT, PLOT WINDOW, o PLOT SETUP. Presione ON , o NXT OK, para regresar a la pantalla normal.

Generación de una tabla para las ecuaciones paramétricas

En un ejemplo anterior generamos una tabla de los valores (X,Y) para una expresión de la forma Y=f(X), i.e., un tipo de gráfico de función. En esta sección, presentamos el procedimiento para generar una tabla que corresponde a un diagrama paramétrico. Para este propósito, nos aprovecharemos de las ecuaciones paramétricas definidas en el ejemplo arriba.

- Primero, accedemos a la pantalla TABLE SETUP presionando ↰ TBLSET , simultáneamente si en modo RPN. Para la variable independiente cambie el valor inicial a 0.0, y el valor Step a 0.1. Presione OK.
- Genere la tabla presionando, simultáneamente si en modo RPN, ↰ TABLE . La tabla que resulta tiene tres columnas que representan el parámetro t, y las coordenadas correspondientes a x y. Para esta tabla los coordenadas se etiquetan X1 y Y1.



- Use las teclas, ◀▶▲▼, para moverse sobre la tabla.
- Presione ON para regresar a la pantalla normal.

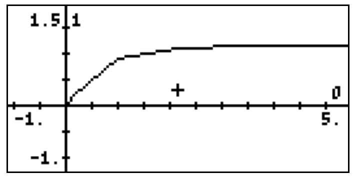
Este procedimiento para crear una tabla que corresponde al tipo actual de diagrama se puede aplicar a otros tipos del diagrama.

Trazar la solución a las ecuaciones diferenciales simples

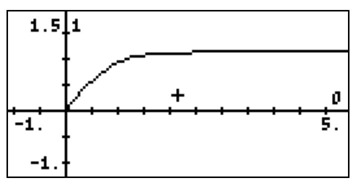
El diagrama de una ecuación diferencial simple puede ser obtenido seleccionando `Diff Eq` en el campo `TYPE` del ambiente PLOT SETUP como sigue: suponga que deseamos trazar x(t) de la ecuación diferencial dx/dt = exp(-t^2), con condiciones iniciales: x = 0 para t = 0. La calculadora permite trazar de la solución de las ecuaciones diferenciales de la forma Y'(T) = F(T,Y). Para nuestro caso, sean Y→x y T→t, por lo tanto, F(T,Y)→ f(t,x) = exp(-t^2).

Antes de trazar la solución, x(t), para t = 0 a 5, suprimir las variables EQ y PPAR.

- Presione ← 2D/3D, simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT SETUP.
- Cambie TYPE a `Diff Eq`.
- Presione ▼ y escriba ' ← e^x — ALPHA ← T Y^x 2 OK.
- El cursor ahora está en el campo `H-Var`. El campo debe de mostrar `H-Var:0` y también `V-Var:1`. Éste es el código usado por la calculadora para identificar las variables que se trazarán. `H-Var:0` significa que la variable independiente (a ser seleccionada más adelante) será trazada en el eje horizontal. También, `V-Var:` significa que la variable dependiente (nombre preseleccionado 'Y') será trazado en el eje vertical.
- Presione ▼. El cursor ahora está en el campo `Indep`. Presione → ' ALPHA ← T OK para cambiar la variable independiente a *t*.
- Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.
- Presione ← WIN, simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT (en este caso se llamará PLOT WINDOW – DIFF EQ).
- Cambie los parámetros H-VIEW y V-VIEW a los siguientes valores: H-VIEW: -1 5,
  V-VIEW: -1 1.5
- Cambie el valor `Init` a 0, y el valor Final a 5 usando: 0 OK 5 OK.
- Los valores Step y Tol representan el paso en la variable independiente y la tolerancia para que la convergencia a ser utilizada por la solución numérica. Dejemos esos valores con sus ajustes de preselección (si la palabra *default* no se demuestra en el campo Step:, use NXT RESET para reajustar ese valor a su valor prefijado. Presione NXT para regresar al menú principal.) Presione ▼ .
- El valor Init-Soln representa el valor inicial de la solución para comenzar el resultado numérico. Para el actual caso, tenemos para las condiciones iniciales x(0) = 0, así, necesitamos cambiar este valor a 0.0, usando 0 OK.
- Presione ERASE DRAW para trazar la solución a la ecuación diferencial.
- Presione EDIT NXT LABEL MENU para ver la gráfica con etiquetas.



- Presione NXT para recobrar el menú. Presione NXT PICT para recobrar el menú gráfico original.
- Cuando observamos el gráfico que era trazado, usted notará que el gráfico no es muy liso. Eso es porque el trazador está utilizando un paso del tiempo que sea demasiado grande. Para refinar el gráfico y hacerle más liso, utilice un paso de 0.1. Intente lo siguiente: CANCL ▼▼▼ · 1 OK ERASE DRAW El diagrama tomará para ser terminado, pero la forma es definitivamente más lisa que antes.
- Presione EDIT NXT LABEL MENU, para ver etiquetas de los ejes y su rango. Notar que las etiquetas para los ejes se mostrarán como 0 (horizontal) y 1 (vertical). Éstas son las definiciones para los ejes según lo dado en la pantalla PLOT WINDOW (ver arriba), i.e., H-VAR (t): 0, y V-VAR(x): 1.



- Presione NXT NXT PICT para recobrar el menú y regresar al ambiente PICT.
- Presione (X,Y) para determinar coordenadas de cualquier punto en la gráfica. Use ▶ Y ◀ para mover el cursor en el área del diagrama. Al pié de la pantalla Ud. verá las coordenadas del cursor como (X,Y). La calculadora uses X y Y como el nombres prefijados para los ejes horizontal y vertical, respectivamente.
- Presione NXT CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW. Entonces, Presione ON para regresar a la pantalla normal.

Más detalles en usar las soluciones gráficas de ecuaciones diferenciales se presentan en el capítulo 16.

Diagramas de verdad

Se utilizan los diagramas de verdad de producir diagramas de dos dimensiones de las regiones que satisfacen cierta condición matemática que pueda ser verdadera o falsa. Por ejemplo, suponga que usted desea trazar la región la cual X^2/36 + Y^2/9 < 1, proceda de esta manera:

- Presione ⬅ 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT SETUP.
- Cambie TYPE a Truth.
- Presione ▼ y escriba {'(X^2/36+Y^2/9 < 1)','(X^2/16+Y^2/9 > 1)'} OK para definir las condiciones a ser trazadas.
- El cursor está ahora en el campo `Indep` field. Dejar eso como 'X' si está fijado ya a esa variable, o cambiarla a 'X' de ser necesario.
- Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.
- Presione ⬅ WIN , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT (en este caso se llamará PLOT WINDOW – TRUTH). Guardemos el valor prefijado para los rangos de la ventana: `H-View: -6.5 6.5, V-View: -3.1  3.2` (Para reajustarlos use NXT RESET (Seleccione Reset all) OK NXT).

Nota: si los rangos de la ventana no se fijan a los valores prefijados, la manera más rápida de reajustarlos es usando NXT RESET (Seleccione *Reset all*) OK NXT .

- Presione ERASE DRAW para trazar el diagrama de verdad. Porque la calculadora hace un muestreo el dominio total del diagrama, punto por punto, le toma algunos minutos para producir un diagrama de verdad. El actual diagrama debe producir una elipse sombreada de semi-ejes 6 y 3 (en x y y, respectivamente), centrado en el origen.
- Presione EDIT NXT LABEL MENU para ver la gráfica con etiquetas. Los parámetros de la pantalla son tales que uno sólo ve la mitad de las etiquetas en el eje x. Presione NXT para recobrar el menú. Presione NXT PICT para recobrar el menú gráfico original.
- Presione (X,Y) para determinar coordenadas de cualquier punto en la gráfica. Use las teclas para mover el cursor en la región trazada. Al

pié de la pantalla usted verá el valor de los coordenadas del cursor como (X,Y).

- Presione NXT CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW. Entonces, Presione ON , or NXT OK, para regresar a la pantalla normal.

Usted puede tener más de una condición trazada en el mismo tiempo si usted multiplica las condiciones. Por ejemplo, para trazar la gráfica de los puntos para los cuales $X^2/36 + Y^2/9 < 1$, y $X^2/16 + Y^2/9 > 1$, use lo siguiente:

- Presione ← 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT SETUP.
- Presione ▽ y escriba '(X^2/36+Y^2/9 < 1)· (X^2/16+Y^2/9 > 1)' OK para definir las condiciones a ser trazadas.
- Presione ERASE DRAW para trazar el diagrama de verdad. Una vez más usted tiene que ser paciente mientras que la calculadora produce el gráfico. Si usted desea interrumpir el diagrama, presione ON , una vez. Después presione CANCL .

Trazar histogramas, diagramas de barra, y de dispersión

Histogramas, diagramas de barra y de dispersión se utilizan trazar los datos discretos almacenados en la variable reservada ΣDAT. Esta variable se utiliza no solamente para estos tipos de diagramas, pero también para toda la clase de usos estadísticos como será demostrado en el Capítulo 18. De hecho, el uso de los diagramas del histograma se pospone hasta el capítulo 18, porque el trazado de un histograma requiere el agrupar los datos y hacer un análisis de frecuencia antes del diagrama real. En esta sección demostraremos cómo cargar datos en la variable ΣDAT y cómo trazar la dispersión de los diagramas y de la barra traza.

Utilizaremos los datos siguientes para trazar diagramas de la barra y diagramas de dispersión:

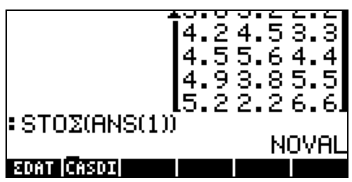
x	y	z
3.1	2.1	1.1
3.6	3.2	2.2
4.2	4.5	3.3
4.5	5.6	4.4
4.9	3.8	5.5
5.2	2.2	6.6

Diagramas de barra

Primero, cerciorarse de que el CAS de su calculadora esté en modo `Exact`. A continuación, escriba los datos demostrados arriba como una matriz, i.e.,

[[3.1,2.1,1.1],[3.6,3.2,2.2],[4.2,4.5,3.3],
[4.5,5.6,4.4],[4.9,3.8,5.5],[5.2,2.2,6.6]] ENTER

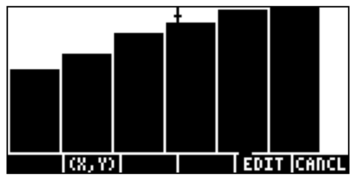
para almacenarlo en ΣDAT, use la función STOΣ (disponible en el catálogo de funciones, ↱ CAT). Presione VAR para recobrar el menú de variables. Una tecla de menú llamada ΣDAT estará disponible en la pantalla. La figura abajo demuestra el almacenaje de esta matriz en modo de ALG:



Para producir la gráfica:

- Presione ↰ 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT SETUP.
- Cambie TYPE a `Bar`.
- Una matriz se mostrará en el campo ΣDAT. Ésta es la matriz que almacenamos anterior en ΣDAT.
- Seleccione el campo `Col:`. Este campo le deja elegir la columna de ΣDAT que debe ser trazado. El valor prefijado es 1. Use ese valor para trazar la columna 1 en ΣDAT.

- Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.
- Presione ← WIN , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT.
- Cambie V-View para mostrar, `V-View: 0 5`.
- Presione ERASE DRAW para trazar el diagrama de barras.

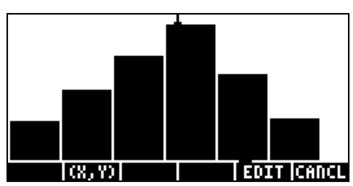


- Presione CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW. Entonces, Presione ON , or NXT OK, para regresar a la pantalla normal.

El número de las barras que se trazarán determina la anchura de la barra. Los valores H-VIEW y V-VIEW se fijan a 10, por defecto. Cambiamos V-VIEW para acomodar mejor el valor máximo en la columna 1 de ΣDAT. Los diagramas de barras son útiles al trazar datos categóricos (no numéricos).

Suponer que usted desea trazar los datos en la columna 2 de la matriz ΣDAT:

- Presione ← 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT SETUP.
- Presione ▼▼ para destacar el campo `Col:` y escriba 2 OK, seguido de NXT OK.
- Presione ← WIN , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT SETUP.
- Cambie V-View para mostrar `V-View: 0 6`
- Presione ERASE DRAW.

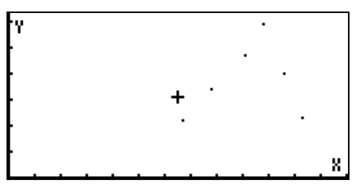


* Presione CANCL para regresar a la pantalla PLOT WINDOW, entonces ON para regresar a la pantalla normal.

Diagramas de dispersión

Usaremos la misma matriz de datos ΣDAT para producir un diagrama de dispersión. Primero, trazaremos los valores de y vs. x, y después los de y vs. z, como sigue:

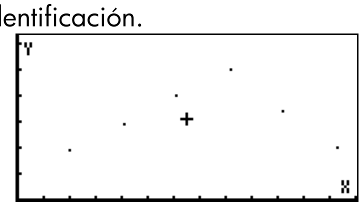
* Presione ← 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT SETUP.
* Cambie TYPE a `Scatter`.
* Presione ▼▼ para destacar el campo **Cols:**. Escriba 1 OK 2 OK para seleccionar la columna 1 como X y la columna 2 como Y en el diagrama de dispersión, Y vs. X.
* Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.
* Presione ← WIN , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT.
* Cambie los rangos de la pantalla de diagramas para mostrar: H-View: 0 6, V-View: 0 6.
* Presione ERASE DRAW para trazar el diagrama de barras. Presione EDIT NXT LABEL MENU para ver el diagrama sin las etiquetas del menú y con etiquetas de identificación (el cursor estará en el medio del diagrama, sin embargo):



* Presione NXT NXT PICT para abandonar el ambiente EDIT.
* Presione CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW. Entonces, Presione ON , or NXT OK, para regresar a la pantalla normal.

Para trazar y vs. z, use:

- Presione ← 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT SETUP.
- Presione ▼▼ para destacar el campo `Cols:` field. Escriba 3 OK 2 OK para seleccionar columna 3 como X y columna 2 como Y en el diagrama de dispersión, Y vs. X.
- Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.
- Presione ← WIN , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT.
- Cambie los rangos de la pantalla de diagramas para mostrar: H-View: 0 7, V-View: 0 7.
- Presione ERASE DRAW para trazar el diagrama de barras. Presione EDIT NXT LABEL MENU para ver el diagrama sin las etiquetas del menú y con etiquetas de identificación.



- Presione NXT NXT PICT para abandonar el ambiente EDIT.
- Presione CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW. Entonces, Presione ON , or NXT OK, para regresar a la pantalla normal.

Campos de pendientes

Los campos de los pendientes se utilizan para visualizar las soluciones a una ecuación diferencial de la forma y' = f(x,y). Básicamente, qué se presenta en el diagrama son los segmentos tangenciales a las curvas de la solución, desde entonces y' = dy/dx, evaluado en cualquier punto (x,y), representa la pendiente de la línea de la tangente en el punto (x,y).

Por ejemplo, visualizar la solución a la ecuación diferencial y' = f(x,y) = x+y, utilizar el siguiente:

- Presione ← 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT SETUP.

- Cambie TYPE a `Slopefield`.
- Presione ▼ y escriba 'X+Y' OK.
- Cerciórese que 'X' se selecciona como la variable Indep: y 'Y' como la variable Depnd:.
- Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.
- Presione ← WIN , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT .
- Cambie los rangos de la pantalla de diagramas para mostrar: X-Left:-5, X-Right:5, Y-Near:-5, Y-Far: 5
- Presione ERASE DRAW para trazar el diagrama de pendientes. Presione EDIT NXT LABEL MENU para ver el diagrama sin las etiquetas del menú y con etiquetas de identificación.

- Presione NXT NXT PICT para abandonar el ambiente EDIT.

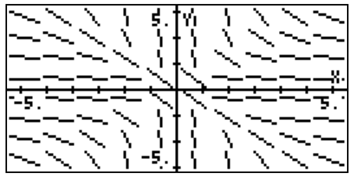
- Presione CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW. Entonces, Presione ON , or NXT OK, para regresar a la pantalla normal.

Si usted pudiera reproducir el campo de pendientes en papel, usted puede trazar a mano las líneas que son tangente a la línea segmentos demostrados en el diagrama. Estas líneas constituyen líneas de y(x, y) = constante, para la solución de y' = f(x,y). Por lo tanto, los campos de pendientes son herramientas útiles para visualizar particularmente ecuaciones difíciles para solucionar.

Intentar también una parcela de terreno de la cuesta para la función y' = f(x,y) = - $(y/x)^2$, usando:

- Presione ← 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT SETUP.
- Cambie TYPE a `Slopefield`.
- Presione ▼ y escriba '– (Y/X)^2' OK.

- Presione ERASE DRAW para trazar el diagrama de pendientes. Presione EDIT NXT LABEL MENU para ver el diagrama sin las etiquetas del menú y con etiquetas de identificación.



- Presione NXT NXT PICT para abandonar el ambiente EDIT.
- Presione CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW. Entonces, Presione ON , or NXT OK, para regresar a la pantalla normal.

Gráficas tridimensionales de acción rápida (Fast 3D plots)

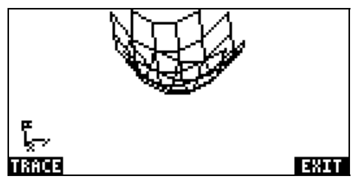
Estas gráficas se utilizan para visualizar superficies tridimensionales representadas por ecuaciones de la forma z = f(x,y). Por ejemplo, si se desea visualizar la función $z = f(x,y) = x^2+y^2$, síganse los siguientes pasos:

- Presiónese ← 2D/3D , simultáneamente si se usa el modo RPN, para acceder el ambiente PLOT SETUP.
- Cámbiese la opción `TYPE` a `Fast3D`. (CHOOS, seleccionar *Fast3D*, OK).
- Presiónese ▼ y escríbase 'X^2+Y^2' OK.
- Asegúrese que se ha seleccionado la 'X' como la variable independiente (`Indep:`) y la 'Y' como la variable dependiente (`Depnd:`).
- Presiónese NXT OK para recuperar la pantalla normal.
- Presiónese ← WIN , simultáneamente si se usa el modo RPN, para acceder al ambiente PLOT WINDOW.
- Acéptense los valores siguientes para los parámetros de la gráfica:

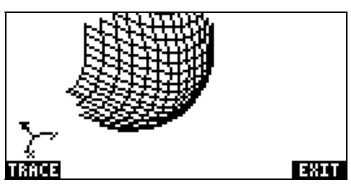
```
X-Left:-1      X-Right:1
Y-Near:-1      Y-Far: 1
Z-Low: -1      Z-High: 1

Step Indep: 10  Depnd: 8
```

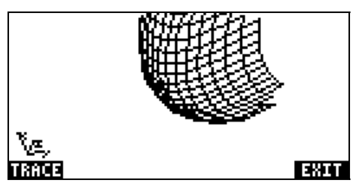
> **Nota**: Los valores Step Indep: y Depnd: representan el número de incrementos en la malla gráfica a utilizarse. A medida que se incrementan estos números, la producción de la gráfica se hace más lenta, aunque el tiempo necesario para producirla es relativamente corto.

- Presiónense las teclas ERASE DRAW para dibujar la superficie tridimensional. El resultado de esta operación es un diagrama de las trazas de la malla gráfica sobre la superficie. La figura incluye el sistema de coordenadas de referencia en la esquina inferior izquierda. Al presionar las teclas direccionales (◀▶▲▼) uno puede cambiar la orientación de la superficie. La orientación del sistema de coordenadas de referencia también se cambia al moverse el punto de vista de la superficie. Las siguientes figuras muestran dos vistas de la superficie definida anteriormente.



- Para finalizar, presiónese la tecla EXIT.
- Presiónese CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW.
- Cámbiese la información siguiente: `Step Indep: 20  Depnd: 16`
- Presiónese ERASE DRAW para dibujar la superficie nuevamente.





- Para finalizar, presiónese la tecla EXIT.
- Presiónese CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW.
- Presiónese ON , o NXT OK, para recuperar la pantalla normal.

He aquí otro ejercicio del tipo de gráfica *Fast 3D*, z = f(x,y) = sin (x^2+y^2)

- Presiónese ← 2D/3D , simultáneamente si se usa el modo RPN, para acceder al ambiente PLOT SETUP.
- Presiónese ▽ y escríbase la función 'SIN(X^2+Y^2)' OK.
- Presiónese ERASE DRAW para dibujar la superficie.
- Presiónese EXIT CANCL para regresar a la forma PLOT WINDOW.
- Presiónese ON , o NXT OK, para regresar a la pantalla normal.

Intente también un diagrama Fast 3D para la superficie z = f(x,y) = sin (x^2+y^2)

- Presione ← 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder a la pantalla PLOT SETUP.
- Presione ▽ y escriba 'SIN(X^2+Y^2)' OK.
- Presiónese ERASE DRAW para dibujar la superficie.
- Presiónese EXIT CANCL para regresar a la forma PLOT WINDOW.
- Presiónese ON , o NXT OK, para regresar a la pantalla normal.

Diagramas de grillas

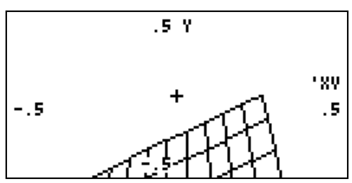
Los diagramas de grillas (*Diagramas de grillas*) son los diagramas de las superficies tridimensionales descritas por z = f(x,y). A diferencia de los diagramas *Fast 3D*, diagramas de grillas son diagramas estáticos. El usuario puede elegir el punto de vista para el diagrama, es decir, el punto desde el cual se observar la superficie. Por ejemplo, produzca un diagrama de grillas para la superficie z = x + 2y –3, usando:

- Presione ← 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT SETUP.
- Cambie TYPE a `Wireframe`.
- Presione ▽ y escriba 'X+2*Y-3' OK.
- Cerciórese de que ' X ' sea seleccionado como variable `Indep:` y 'Y' como variable `Depnd:`.
- Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.

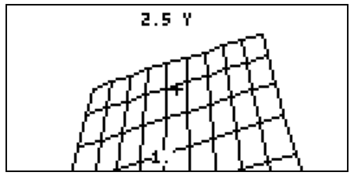
- Presione ⬅ WIN , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT .
- Mantenga los rangos prefijados de la pantalla de diagramas mostrar: X-Left:-1, X-Right:1, Y-Near:-1, Y-Far: 1, Z-Low: -1, Z-High: 1, XE:0,YE:-3, ZE:0, Step Indep: 10 Depnd: 8

Los coordenadas XE, YE, ZE, significan "coordenadas del ojo", es decir, las coordenadas desde los cuales un observador ve el diagrama. Los valores demostrados son los valores prefijados. Los valores de Indep: y Depnd: representan el número de grillas que se utilizarán en el diagrama. Mientras más grandes éstos numeran, más lenta la producción del gráfico. Los valores mostrados son los valores prefijados. Para este ejercicio usaremos los valores prefijados de 10 y 8 para los valores Step.

- Presione ERASE DRAW para trazar la superficie tridimensional. El resultado es a diagrama de grillas de la superficie.
- Presione EDIT NXT LABEL MENU para ver la gráfica con etiquetas y rangos. Esta versión particular del gráfico se limita a la parte más inferior de la pantalla. Podemos cambiar el punto de vista para ver una diversa versión del gráfico.

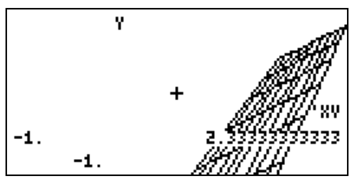


- Presione NXT NXT PICT CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW.
- Cambie las coordenadas del punto de vista para mostrar : `XE:0 YE:-3 ZE:3`
- Presione ERASE DRAW para ver el diagrama de la superficie.
- Presione EDIT NXT LABEL MENU para ver la gráfica con etiquetas y rangos.



Esta versión del gráfico ocupa más área en la pantalla que la anterior. Podemos cambiar el punto de vista, una vez más, para ver otra versión del gráfico.

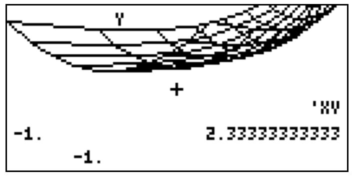
- Presione NXT NXT PICT CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW.
- Cambie los datos de las coordenadas del punto de vista para mostrar : `XE:3    YE:3    ZE:3`
- Presione ERASE DRAW para ver el diagrama de la superficie. Esta vez el bulto del diagrama está situado hacia el lado derecho de la pantalla.



- Presione CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW.
- Presione ON , or NXT OK, para regresar a la pantalla normal.

Intente también un diagrama de grillas para la superficie $z = f(x,y) = x^2+y^2$

- Presione ← 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder a la pantalla PLOT SETUP.
- Presione ▼ y escriba 'X^2+Y^2' OK.
- Presione ERASE DRAW para trazar la superficie. Presione EDIT NXT MENU LABEL para ver el diagrama sin las etiquetas del menú y con etiquetas de identificación.

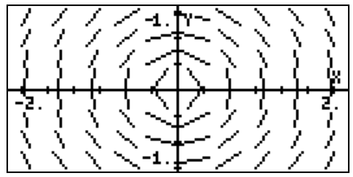


- Presione NXT NXT PICT para abandonar el ambiente EDIT.
- Presione CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW. Entonces, Presione ON , or NXT OK, para regresar a la pantalla normal.

Diagramas de contornos (Ps-Contour plots)

Los diagramas de contornos (*Ps-Contour* plots) son los diagramas del contorno de superficie tridimensional descritos por z = f(x,y). Los contornos producidos son proyecciones de superficies de nivel z = constante en el plano x-y. Por ejemplo, para producir un diagrama de contornos para la superficie z = x^2+y^2, utilizar lo siguiente:

- Presione ← 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT SETUP.
- Cambie TYPE a Ps-Contour.
- Presione ▼ y escriba 'X^2+Y^2' OK.
- Cerciórese que 'X' se selecciona como la variable Indep: y 'Y' como la variable Depnd:.
- Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.
- Presione ← WIN , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT .
- Mantenga los rangos prefijados para la pantalla del diagrama para mostrar: X-Left:-2, X-Right:2, Y-Near:-1 Y-Far: 1, Step Indep: 10, Depnd: 8
- Presione ERASE DRAW para trazar el diagrama de contornos. Esta operación tomará una cierta hora, sea así pues, paciente. El resultado es un diagrama de contornos de la superficie. Note que los contornos no son necesariamente continuos, sin embargo, proporcionan un buen estimado de las superficies planas de la función. Presione EDIT NXT LABEL MENU para ver la gráfica con etiquetas y rangos.



- Presione NXT NXT PICT CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW.
- Presione ON , or NXT OK, para regresar a la pantalla normal.

Intente también un diagrama de contornos para la superficie z = f(x,y) = sin x cos y.

- Presione ← 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder a la pantalla PLOT SETUP.
- Presione ▼ y escriba 'SIN(X)*COS(Y)' OK.
- Presione ERASE DRAW para trazar el diagrama de contornos. Presione EDIT NXT LABEL MENU para ver el diagrama sin las etiquetas del menú y con etiquetas de identificación.

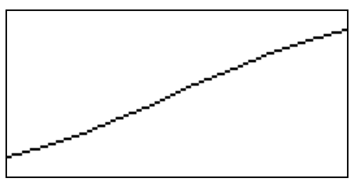
- Presione NXT NXT PICT para abandonar el ambiente EDIT.
- Presione CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW. Entonces, Presione ON , or NXT OK, para regresar a la pantalla normal.

Diagramas de corte vertical

Diagramas de corte vertical (*Diagrama de corte vertical* s) son los diagramas animados de z-vs.-y para diversos valores de x de la función z = f(x,y). Por ejemplo, para producir un diagrama de corte vertical para la superficie z = x^3-xy^3, utilice lo siguiente:

- Presione ← 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT SETUP.

- Cambie TYPE a Y-Slice.
- Presione ▼ y escriba 'X^3+X*Y^3' OK.
- Cerciórese que 'X' se selecciona como la variable Indep: y 'Y' como la variable Depnd:.
- Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.
- Presione ← WIN , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT .
- Mantenga los rangos prefijados para la pantalla para mostrar: X-Left:-1, X-Right:1, Y-Near:-1, Y-Far: 1, Z-Low:-1, Z-High:1, Step Indep: 10 Depnd: 8
- Presione ERASE DRAW para trazar el superficie tridimensional. Usted verá la calculadora producir una serie de curvas en la pantalla, que desaparecerán inmediatamente. Cuando la calculadora acaba el producir todas las curvas de corte vertical, entonces comenzará automáticamente la animación de las diversas curvas. Una de las curvas se muestra abajo.



- Presione ON para detener la animación. Presione CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW.
- Presione ON , or NXT OK, para regresar a la pantalla normal.

Intente también un diagrama Ps-Contour para la superficie z = f(x,y) = (x+y) sin y.

- Presione ← 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder a la pantalla PLOT SETUP.
- Presione ▼ y escriba '(X+Y)*SIN(Y)' OK.
- Presione ERASE DRAW para producir la animación de las curvas.
- Presione ON para detener la animación.
- Presione CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW. Entonces, Presione ON , or NXT OK, para regresar a la pantalla normal.

Diagramas de redes (Gridmap plots)

Los diagramas de redes (*Gridmap* plots) producen una red de curvas ortogonales que describen una función de una variable compleja de la forma w =f(z) = f(x+iy), donde z = x+iy es una variable compleja. Las funciones trazadas corresponden a las partes real e imaginaria de w = Φ(x,y) + iΨ(x,y), es decir, representan curvas Φ(x,y) =constante, y Ψ(x,y) = constante. Por ejemplo, par producir un diagrama de redes para la función w = sin(z), utilice lo siguiente:

- Presione ← 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT SETUP.
- Cambie TYPE a Gridmap.
- Presione ▼ y escriba 'SIN(X+i*Y)' OK.
- Cerciórese que 'X' se selecciona como la variable Indep: y 'Y' como la variable Depnd:.
- Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.
- Presione ← WIN , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT .
- Mantenga los rangos prefijados de la pantalla para mostrar: X-Left:-1, X-Right:1, Y-Near:-1 Y-Far: 1, XXLeft:-1 XXRight:1, YYNear:-1, yyFar: 1, Step Indep: 10 Depnd: 8
- Presione ERASE DRAW para trazar el diagrama de redes. El resultado es una red de funciones que corresponden a las partes verdaderas e imaginarias de una función compleja.
- Presione EDIT NXT LABEL MENU para ver la gráfica con etiquetas y rangos.

- Presione NXT NXT PICT CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW.
- Presione ON , or NXT OK, para regresar a la pantalla normal.

Otras funciones de una variable compleja dignas de intentar para diagrama de redes son:

(1) SIN((X,Y))	i.e., $F(z) = \sin(z)$	(2)(X,Y)^2	i.e., $F(z) = z^2$
(3) EXP((X,Y))	i.e., $F(z) = e^z$	(4) SINH((X,Y))	i.e., $F(z) = \sinh(z)$
(5) TAN((X,Y))	i.e., $F(z) = \tan(z)$	(6) ATAN((X,Y))	i.e., $F(z) = \tan^{-1}(z)$
(7) (X,Y)^3	i.e., $F(z) = z^3$	(8) 1/(X,Y)	i.e., $F(z) = 1/z$
(9) √ (X,Y)	i.e., $F(z) = z^{1/2}$		

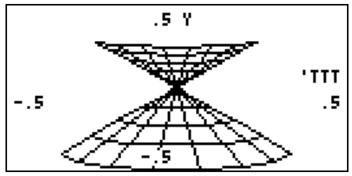
Diagramas de superficies paramétricas (Pr-Surface plots)

Los diagramas *Pr-Surface* (de superficie paramétrica) se utilizan para trazar una superficie tridimensional cuyas coordenadas (x, y, z) están descritas por x = x(X,Y), y = y(X,Y), z=z(X,Y), donde X y Y son parámetros independientes.

Nota: Las ecuaciones x = x(X,Y), y = y(X,Y), z=z(X,Y) representar una descripción paramétrica de una superficie. X y Y son los parámetros independientes. La mayoría de los libros de textos utilizarán (u,v) como los parámetros, más bien que (X,Y). Por lo tanto, la descripción paramétrica de una superficie se da como x = x(u,v), y = y(u,v), z=z(u,v).

Por ejemplo, para producir un diagrama Pr-Surface para la superficie x = x(X,Y) = X sin Y, y = y(X,Y) = x cos Y, z=z(X,Y)=X, utilice lo siguiente:

- Presione ⓵ 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT SETUP.
- Cambie TYPE a Pr-Surface.
- Presione ▼ y escriba '{X*SIN(Y), X*COS(Y), X}' OK.
- Cerciórese que 'X' se selecciona como la variable Indep: y 'Y' como la variable Depnd:.
- Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.
- Presione ⓵ WIN , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT .
- Mantenga los rangos prefijados de la pantalla para mostrar: X-Left:-1, X-Right:1, Y-Near:-1, Y-Far: 1, Z-Low: -1, Z-High:1, XE: 0, YE:-3, zE:0, Step Indep: 10, Depnd: 8
- Presione ERASE DRAW para trazar el superficie tridimensional.
- Presione EDIT NXT LABEL MENU para ver la gráfica con etiquetas y rangos.



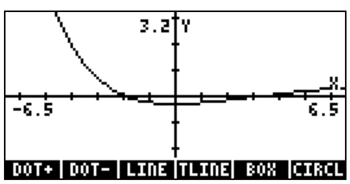
- Presione NXT NXT PICT CANCL para regresar al ambiente PLOT WINDOW.
- Presione ON , or NXT OK, para regresar a la pantalla normal.

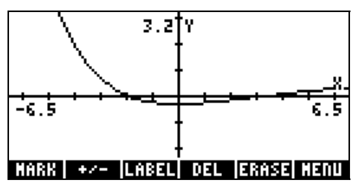
La variable VPAR

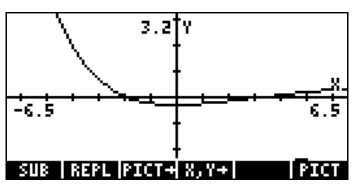
La variable VPAR (inglés, Volume Parameter, o parámetros de volumen) contiene la información con respecto al "volumen" usado para producir un gráfico tridimensional. Por lo tanto, usted verá que se produce esta variable siempre que usted cree un diagrama tridimensional, por ejemplo, Fast3D, Wireframe, or Pr-Surface.

Dibujo interactivo

Siempre que produzcamos un gráfico de dos dimensiones, encontramos en los gráficos defendemos una tecla de menú etiquetada EDIT. Presionando EDIT produce un menú que incluye las opciones siguientes (Presione NXT para ver funciones adicionales):







Con los ejemplos arriba, usted tiene la oportunidad de probar funciones LABEL, MENU, PICT→, y REPL. Muchas de las funciones restantes, por ejemplo, DOT+, DOT-, LINE, BOX, CIRCL, MARK, DEL, etc., puede ser utilizadas para dibujar puntos, líneas, círculos, etc.. en la pantalla de los gráficos, según lo descrito abajo. Para ver cómo utilizar estas funciones intentaremos el ejercicio siguiente:

Primero, conseguimos la pantalla de los gráficos que corresponde a las instrucciones siguientes:

- Presione ← 2D/3D , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT SETUP.
- Cambie TYPE a `Function`, de ser necesario
- Cambie EQ a 'X'
- Asegúrese que Indep: está fija a 'X'
- Presione NXT OK para regresar a la pantalla normal.
- Presione ← WIN , simultáneamente si en modo RPN, para acceder la pantalla PLOT (en este caso se llamará PLOT –POLAR).
- Cambie el rango H-VIEW a –10 a 10, usando 1 0 +/- OK 1 0 OK, y el rango V-VIEW a -5 a 5 usando 5 +/- OK 5 OK.
- Presione ERASE DRAW para trazar la función.
- Presione EDIT NXT LABEL para agregar etiquetas a la gráfica. Presione NXT NXT (or ← PREV) para recuperar el menú original EDIT

A continuación, ilustramos el uso de las diversas funciones de dibujo en la pantalla de los gráficos que resulta. Requieren el uso del cursor y las teclas (◄►▲▼) para mover el cursor sobre la pantalla de los gráficos.

DOT+ y DOT-

Cuando se selecciona DOT+, los píxeles serán activados dondequiera que el cursor se mueva, es decir, siguiendo la posición del cursor. Cuando se selecciona DOT-, el efecto opuesto ocurre, i.e., pues usted mueve el cursor, los píxeles serán suprimidos.

Por ejemplo, utilice ►▲ para mover el cursor en alguna parte en el centro del primer cuadrante del plano x-y, entonces presione DOT+. La etiqueta será seleccionada (DOT+■). Presione y mantenga presionada la tecla ► para ver una línea horizontal que es trazada. Ahora, presione DOT-, para seleccionar esta opción (DOT-■). Presione y mantenga presionada la tecla ◀ para ver la línea que usted acaba de trazar siendo borrada. Presione DOT-, cuando haya terminado para deseleccionar esta opción.

MARK

Este comando permite que el usuario fije una marca que se pueda utilizar para un número de propósitos, por ejemplo:

- Comienzo de la línea con las instrucciones LINE o TLINE
- La esquina de una instrucción BOX
- El centro de una instrucción CIRCLE

Uso de la instrucción MARK por sí misma simplemente coloca una x en la localización de la marca (Presione NXT MARK para verla en acción).

LINE

Se utiliza este comando para dibujar una línea entre dos puntos en el gráfico. Para verlo en acción, coloque el cursor en alguna parte en el primer cuadrante, y presione ← PREV LINE. Una marca (MARK) se coloca sobre el cursor que indica el origen de la línea. Utilice la tecla ▶ para mover el cursor a la derecha de la posición actual, digamos, cerca de 1 centímetro a la derecha, y presione LINE. Una línea se traza entre el primer y el último punto.

Note que el cursor en el extremo de esta línea sigue activo indicando que la calculadora está lista a trazar una línea que comienza en ese punto. Presione ▼ para mover el cursor hacia abajo, digamos, otro centímetro, y presione LINE otra vez. Ahora usted debe tener un ángulo recto trazado por un segmento horizontal y un segmento vertical. El cursor sigue activo. Para desactivarlo, sin moverlo del todo, presione LINE. El cursor vuelve a su forma normal (una cruz) y la función LINE se desactiva.

TLINE

(Inglés, Toggle LINE, cambie estado de la línea) Mueva el cursor al segundo cuadrante para ver esta función en acción. Presione TLINE. Una marca

(MARK) se coloca en el comienzo de la línea. Mueva el cursor con las teclas lejos de este punto, y presione TLINE. Una línea se dibuja de la posición actual del cursor al punto de referencia seleccionado anteriormente. Los píxeles que están encendido en la línea trayectoria serán apagados, y viceversa. Para remover la línea trazada más reciente trazada, presione TLINE una vez más. Para desactivar TLINE, mueva el cursor al punto original donde TLINE fue activada, y presione LINE LINE.

BOX

Se utiliza este comando para dibujar una caja en el gráfico. Mueva el cursor a un área clara del gráfico, y presione BOX. Esto destaca el cursor. Mueva el cursor con las teclas a un punto diferente, y en una dirección diagonal, lejos de la posición actual del cursor. Presione BOX una vez más. Se dibuja un rectángulo cuya diagonal junta las posiciones del cursor de la inicial a la final. La posición inicial de la caja todavía está marcada con una x. Mueva el cursor a otra posición y presione BOX para generar una caja nueva que contiene el punto inicial. Para desactivar BOX, mueva el cursor al punto original donde BOX fue activada, y presione LINE LINE.

CIRCL

Este comando produce un círculo. Marque el centro del círculo con una marca (instrucción MARK), entonces mueva el cursor a un punto que sea parte de la periferia del círculo, y presione CIRCL. Para desactivar CIRCL, volver el cursor a la posición MARK y presione LINE.

Intente este comando moviendo el cursor a una parte clara del gráfico, y presione MARK. Mueva el cursor a otro punto, y presione CIRCL. Un círculo centrado en la marca (MARK), y que pasa a través del punto pasado será dibujado.

LABEL

Presionando LABEL coloca las etiquetas en los ejes x y y del diagrama actual. Esta función se ha utilizado extensivamente con este capítulo.

DEL
Se utiliza este comando para remover las partes del gráfico entre dos posiciones MARK. Mueva el cursor a un punto en el gráfico, y presione MARK. Mueva el cursor a un punto diferente, y presione MARK una vez más. Entonces, presione DEL. La sección del gráfico contenida entre las dos marcas será suprimida.

ERASE
La función ERASE despeja la ventana entera de los gráficos. Este comando está disponible en el menú PLOT, así como en las ventanas gráficas y estará accesible con una tecla del menú.

MENU
Presionando MENU quitará las etiquetas del menú para mostrar que el gráfico sin esas etiquetas. Para recuperar las etiquetas, Presione NXT .

SUB
Utilizar este comando para extraer un subconjunto de un objeto gráfico. El objeto extraído se coloca automáticamente en la pantalla. Seleccione el subconjunto que usted desea extraer poniendo una marca (MARK) en un punto en el gráfico, moviendo el cursor a la esquina diagonal del rectángulo que incluye el subconjunto de los gráficos, y presionando SUB. Esta función se puede utilizar para mover partes de los gráficos alrededor del gráfico.

REPL
Este comando coloca el contenido de un objeto gráfico actualmente en el nivel 1 de la pantalla en la localización de cursor en la ventana de los gráficos. La esquina izquierda superior del objeto gráfico que se inserta será coincidirá con la posición del cursor. Por lo tanto, si usted desea que un gráfico de la pantalla llene totalmente la ventana gráfica, cerciórese de que el cursor está colocado en la esquina izquierda superior de la pantalla.

PICT→

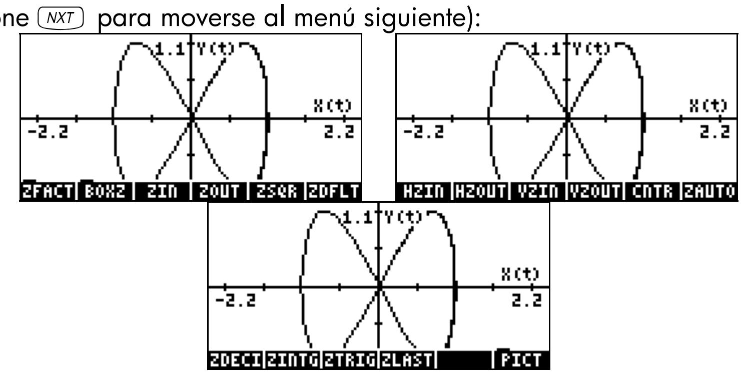
Este comando coloca una copia del gráfico actualmente en la ventana de los gráficos a la pantalla como un objeto gráfico. El objeto gráfico puesto en la pantalla puede ser asignada al nombre de una variable para almacenaje u otro tipo de manipulación.

X,Y→

Este comando copia los coordenadas de la posición actual del cursor, en coordenadas de usuario, a la pantalla.

Enfoques en la pantalla gráfica

Siempre que usted produzca un gráfico de dos dimensiones de una función, interactivamente, la primera tecla del menú, etiquetada ZOOM, le deja acceder a funciones que se pueden utilizar para enfocar hacia adentro y hacia fuera en los gráficos actuales. El menú ZOOM incluye las funciones siguientes (Presione NXT para moverse al menú siguiente):



Presentamos cada uno de siguiente de estas funciones. Usted necesita solamente producir un gráfico según lo indicado en el capítulo 12, o con uno de los programas usados anteriormente en este capítulo.

ZFACT, ZIN, ZOUT, y ZLAST

Presionando ZFACT produce una pantalla de la entrada que permita que usted cambie los factores X y Y actuales. Los factores X y Y relacionan las escalas de unidades de usuario a los rangos de píxel correspondientes. Cambie el H-Factor para mostrar 8., y presione OK, después cambie el V-Factor para mostrar 2., y presione OK. Seleccione la opción ✓Recenter on cursor, y presione OK.

De vuelta en la pantalla de los gráficos, presione ZIN. El gráfico re-se dibuja con los nuevos factores de posicionamiento horizontales de la vertical y, centrados en la posición donde el cursor fue localizado, mientras que se mantiene el tamaño original de PICT (es decir, el número original de píxeles en ambas direcciones). Usando las teclas direccionales, deslice la pantalla horizontalmente o verticalmente hasta donde se posible en el gráfico enfocado.

Para enfocar hacia fuera, sujeto a los factores horizontal (H) y vertical (V) fijados en ZFACT, presione ZOOM ZOUT. El gráfico que resulta proporcionará más detalle que la gráfica enfocada.

Usted puede volver siempre a la última ventana de enfoque usando ZLAST.

BOXZ

El enfoque dentro y fuera de un gráfico dado puede ser realizado usando la tecla de menú BOXZ. Con BOXZ usted selecciona el sector rectangular (la "caja") donde usted desea enfocar. Mueva el cursor a una de las esquinas de la caja (usando las teclas direccionales), y presione ZOOM BOXZ. Usando las teclas direccionales una vez más, mueva el cursor a la esquina opuesta de la caja de enfoque deseada. El cursor trazará la caja de enfoque en la pantalla. Cuando se selecciona la caja de enfoque deseada, presione ZOOM. La calculadora enfocará en el contenido de la caja del zumbido que usted seleccionó para llenar la pantalla.

Si usted presiona ZOUT, la calculadora enfocará hacia fuera de la caja actual usando los factores H y V y. Es posible que no se pueda recuperar el gráfico original.

ZDFLT, ZAUTO

Presionando ZDFLT re-traza el diagrama actual usando los rangos prefijados de x y y, es decir, -6.5 a 6.5 en x, y –3.1 a 3.1 en y. La instrucción ZAUTO, por otra parte, crea una ventana de enfoque usando el rango actual de la variable independiente (x), pero ajustando el rango de la variable dependiente (y) para que la curva quepa en la pantalla (como cuando se usa la función AUTO en la pantalla PLOT WINDOW, ← WIN , simultáneamente en modo RPN).

HZIN, HZOUT, VZIN y VZOUT

Estas funciones enfocan hacia adentro y hacia afuera de la pantalla de los gráficos en la dirección horizontal o vertical según los factores H y V actuales.

CNTR

Enfoca hacia adentro con el centro de la ventana de enfoque en la localización de cursor actual. Los factores de enfoque usados son los valores actuales de los factores H y V.

ZDECI

Enfoca el gráfico para redondear los límites del intervalo x a un valor decimal.

ZINTG

Enfoca el gráfico de modo que las unidades de píxel se convierten a unidades de usuario. Por ejemplo, la ventana PICT mínima tiene 131 píxeles. Cuando usted utiliza ZINTG, con el cursor en el centro de la pantalla, la ventana se enfoca de modo que el eje x se extiende de -64.5 a 65.5.

ZSQR

Enfoca el gráfico de modo que la escala se mantiene en 1:1 ajustando la escala de x, manteniendo la escala de y fijada, si la ventana es más ancha que más alta. Esto fuerza un enfoque proporcional.

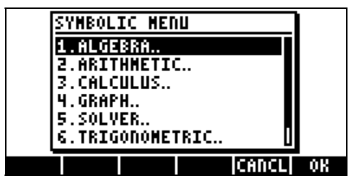
ZTRIG

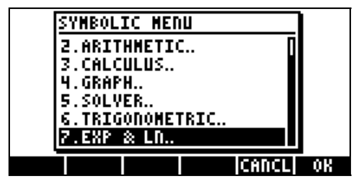
Enfoca el gráfico de modo que la escala de x incorpore un rango de -3π a $+3\pi$ (aproximadamente), el rango preferido para las funciones trigonométricas.

> **Nota:** Ningunas de estas funciones son programables. Son solamente útiles de una manera interactiva. No confunda el comando [illegible] en el menú ZOOM con la función ZFACTOR, la cuál se utiliza aplicaciones en dinámica de los gases y en la química (ver el capítulo 3).

El menú SYMBOLIC y los gráficos

El menú SYMBOLIC se activa presionando la tecla SYMB (cuarta tecla de la izquierda en la cuarta fila de del teclado). Este menú proporciona una lista de los menús relacionados con el sistema algebraico de la computadora o CAS, éstos son:





Todos sino uno de estos menús están disponibles directamente en el teclado presionando la combinación de teclas apropiada como sigue. El capítulo del manual de usuario donde se describen los menús también se enumera:

ALGEBRA..	→ ALG (tecla 4)	Cap. 5
ARITHMETIC..	← ARITH (tecla 1)	Cap. 5
CALCULUS..	← CALC (tecla 4)	Cap.13
SOLVER..	← S.SLV (tecla 7)	Cap. 6
TRIGONOMETRIC..	→ TRIG (tecla 8)	Cap. 5
EXP&LN..	← EXP&LN (tecla 8)	Cap. 5

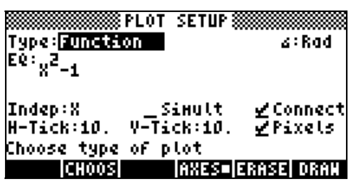
El menú SYMB/GRAPH

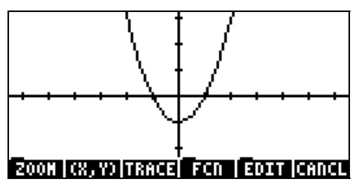
El sub-menú GRAPH dentro del menú SYMB incluye las funciones siguientes:

DEFINE: igual como la secuencia ← DEF (la tecla 2)
GROBADD: junta dos GROBs, el primero sobre el segundo (Ver El Capítulo 22)
PLOT(función): traza una función, similar a ← 2D/3D
PLOTADD(función): agrega esta función a la lista de funciones al diagrama, similar a ← 2D/3D
Plot setup..: igual que ← 2D/3D
SIGNTAB(función): firmar la tabla de la función dada que demuestra intervalos de variación positiva y negativa, raíces y asíntotas infinitas
TABVAL: tabla de los valores para una función
TABVAR: tabla de la variación de una función

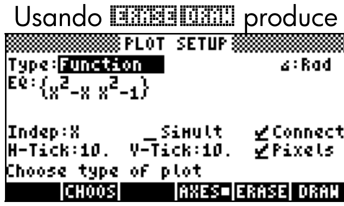
Los ejemplos de algunas de estas funciones se proporcionan después.

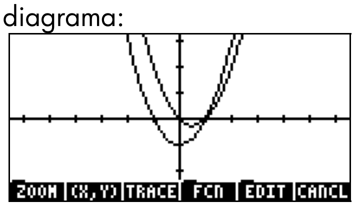
PLOT(X^2-1) es similar a ← 2D/3D con EQ: X^2 -1. Usando ERASE DRAW produce el diagrama:



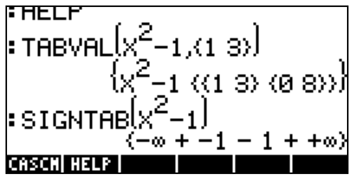


PLOTADD(X^2-X) es similar a ← 2D/3D pero agregando esta función a EQ: X^2 -1. Usando ERASE DRAW produce el diagrama:



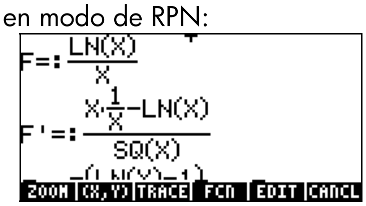


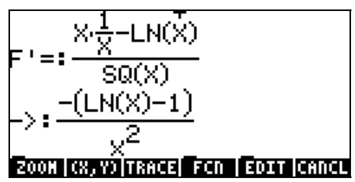
TABVAL(X^2-1,{1, 3}) produce una lista de valores {min max} de la función en el intervalo {1,3}, mientras que SIGNTAB(X^2-1) muestra el signo de la función en el intervalo (-∞,+), con f(x) > 0 en (-∞,-1), f(x) <0, in (-1,1), y f(x) > 0 in (1,+ ∞).

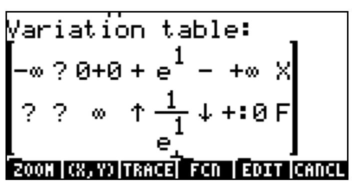


TABVAR(LN(X)/X) produce la tabla siguiente de la variación:

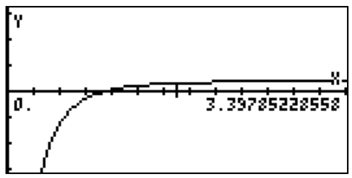
Una interpretación detallada de la tabla de la variación es más fácil de seguir en modo de RPN:





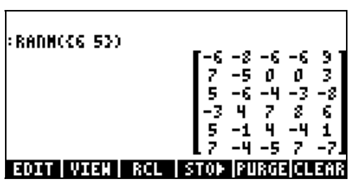


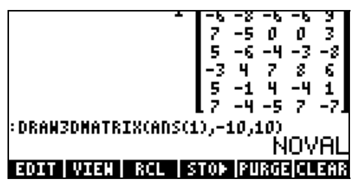
La salida está en un formato gráfico, demostrando la función original, F(X), la derivada F'(X) después de la derivación y después de la simplificación, y finalmente una tabla de la variación. La tabla consiste en dos filas, etiquetadas en el lado derecho. Por lo tanto, la fila superior representa valores de X y la segunda fila representa valores de F. Los signos de interrogación indican incertidumbre o la no-definición. Por ejemplo, para X<0, LN(X) no está definido, así que la línea X muestra un signo de interrogación en ese intervalo. Derecho en cero (0+0) F es infinito, para X = e, F = 1/e. F aumenta antes de alcanzar este valor, según lo indicado por la flecha ascendente, y disminuye después de este valor (X=e) el llegar a ser levemente más grande de cero (+:0) cuando X va al infinito. Un diagrama del gráfico se demuestra abajo para ilustrar estas observaciones:



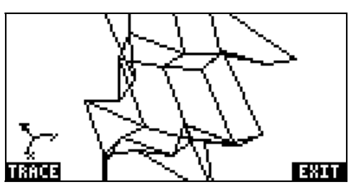
Función DRAW3DMATRIX

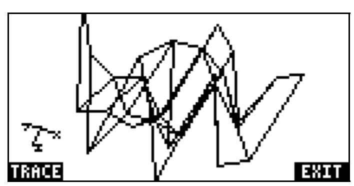
Esta función toma como argumento una matriz n×m, **Z**, = [z_{ij}], y valores mínimo y máximo para el diagrama. Usted desea seleccionar los valores de v_{min} y v_{max} de modo que contengan los valores enumerados en **Z**. La llamada general a la función es, por lo tanto, DRAW3DMATRIX(**Z**,v_{min},v_{max}). Para ilustrar el uso de esta función primero generamos una matriz 6×5 usando RANM({6,5}), y entonces activamos la función DRAW3DMATRIX, según lo demostrado abajo:





El diagrama está en el estilo de un FAST3DPLOT. Diversas vistas del diagrama se muestran abajo:





Capítulo 13
Aplicaciones en el Cálculo

Este Capítulo discute las aplicaciones de la calculadora a operaciones relacionadas al cálculo diferencial e integral, es decir, límites, derivadas, integrales, series de potencias, etc.

El menú CALC (Cálculo)

La mayoría de las funciones utilizadas en este Capítulo se presentan en el menú CALC de la calculadora. Este menú está disponible a través de la secuencia de teclado ← CALC (asociada con la tecla 4):

Las primeras cuatro opciones en este menú son en realidad sub-menús que se aplican a (1) derivadas e integrales, (2) límites y series de potencias, (3) ecuaciones diferenciales, y (4) gráficas. Las funciones en las opciones (1) y (2) se presentan en este Capítulo. Las ecuaciones diferenciales, el tema de la opción (3), se presentan en el capítulo 16. Las funciones gráficas, el tema de la opción (4), fueron presentadas en el final del capítulo 12. Finalmente, las opciones 5. DERVX y 6.INTVX son las funciones para obtener derivadas e integrales indefinidas para funciones de la variable del CAS (típicamente, 'X'). Las funciones DERVX e INTVX se discuten detalladamente más adelante.

Límites y derivadas

El cálculo diferencial se orienta principalmente al estudio de las derivadas de funciones y a sus aplicaciones en el análisis matemático. La derivada de una función se define como el límite de la diferencia de la función a medida que el incremento en la variable independiente tiende a cero. Los límites se utilizan así mismo para verificar la continuidad de las funciones.

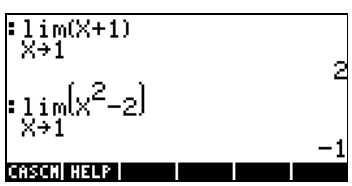
La función lim

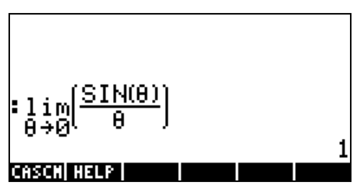
La calculadora provee la función *lim* para calcular límites de funciones. Esta función utiliza como argumento una expresión que representa una función y el valor de la variable independiente donde se evaluará el límite. La función *lim* se obtiene a través del catálogo de funciones de la calculadora (→ _CAT ALPHA ← L) o, a través de la opción 2. LIMITS & SERIES… del menú CALC, que se presentó anteriormente.

> **Nota**: Las funciones disponibles in el menú LIMITS & SERIES se muestran a continuación:
>
> 
>
>
> La función DIVPC se utiliza para dividir dos polinomios produciendo una expansión en una serie de potencias. Las funciones DIVPC, SERIES, TAYLOR0, y TAYLOR se utilizan en las expansiones de series de potencias y se presentan más detalladamente en este capítulo.

La función *lim* se escribe en modo ALG como `lim(f(x),x=a)` para calcular el límite $\lim_{x \to a} f(x)$. En modo RPN, escríbase primero la función, seguida de la expresión 'x=a', y actívese finalmente la función *lim*. Algunos ejemplos en modo ALG se presentan a continuación, incluyendo algunos límites al infinito (utilizando el modo Algebraico, y con la bandera de sistema 117 fija a la opción CHOOSE boxes):

← CALC 2 OK 2 OK X + 1 → , X → = 1 ENTER





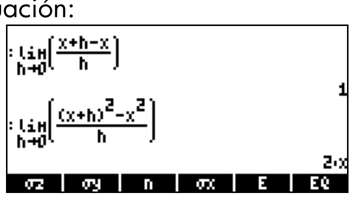
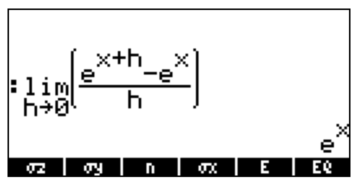
El símbolo del infinito se asocia con la tecla `0`, es decir, `←` `∞`.

Derivadas

La derivada de una función f(x) para x = a se define como el límite

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{h->0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

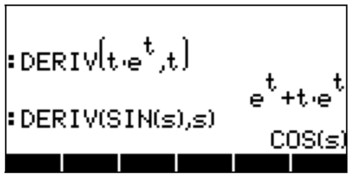
Algunos ejemplos de las derivadas que usan este límite se muestran a continuación:

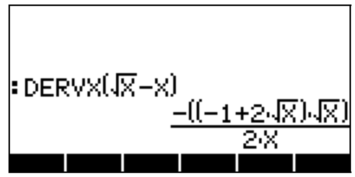



Las funciones DERIV y DERVX

La función DERIV se utiliza para calcular derivadas de cualquier variable independiente, mientras que la función DERVX calcula derivadas con respecto a la variable independiente definida por el CAS (usualmente definida por 'X'). Mientras la función DERVX se encuentra disponible directamente en el menú CALC, ambas funcione se encuentran disponibles en el sub-menú DERIV.&INTEG dentro del menú CALC (`←` `CALC`).

La función DERIV requiere una función, por ejemplo f(t), y una variable independiente, t, mientras que la función DERVX requiere solamente una función de la variable VX. Algunos ejemplos en modo ALG se presentan a continuación. Recuérdese que en el modo RPN los argumentos de la función deben listarse antes de aplicar la función.





El menú DERIV&INTEG

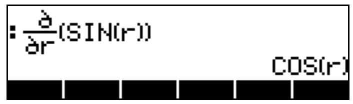
Las funciones disponibles en este sub-menú se muestran a continuación:

De esta lista de funciones, las funciones DERIV y DERVX se utilizan para calcular derivadas. Las otras funciones incluyen funciones relacionadas con los antiderivadas y las integrales (IBP, INTVX, PREVAL, RISCH, SIGMA, y SIGMAVX), a las series de Fourier (FOURIER), y al análisis vectorial (CURL, DIV, HESS, LAPL). A continuación se presentan las funciones DERIV y DERVX, las funciones restantes se presentan más adelante en este capítulo o en capítulos subsecuentes.

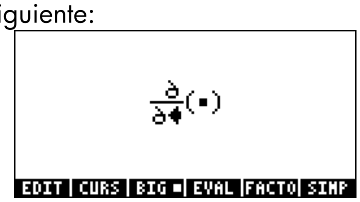
Calculando derivadas con ∂

Este símbolo se obtiene al usar las teclas [→] ∂ (la tecla [COS]).). Este símbolo se puede utilizar para escribir una derivada en la pantalla o en el escritor de ecuaciones (véase el capítulo 2). Si usted utiliza el símbolo para escribir una derivada en la pantalla, escríbase la variable independiente inmediatamente después, seguida de un par de paréntesis que incluyen la función que se derivará. De esta forma, para calcular la derivada d(sin(r), r), utiliza, en modo ALG: [→] ∂ [ALPHA] [←] [R] [←] () [SIN] [ALPHA] [←] [R] [ENTER]

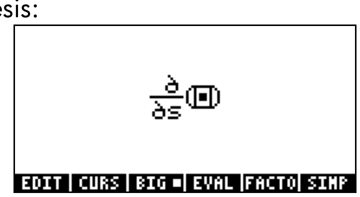
En modo RPN, esta expresión se debe incluir entre comillas antes de incorporarla en la pantalla. El resultado en modo de ALG es:



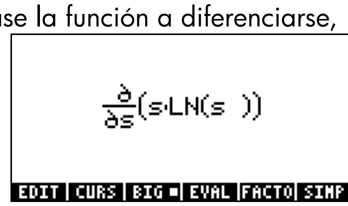
En el escritor de la ecuación, cuando usted presiona ⟳ ∂, la calculadora produce la expresión siguiente:



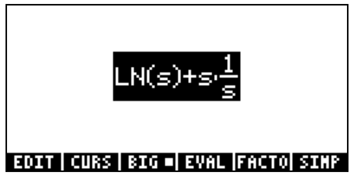
El cursor de inserción (◆) estará situado a la derecha en el denominador, en espera de que el usuario escriba una variable independiente, por ejemplo, s: ALPHA ← S. Presiónese entonces la tecla direccional (▶) para mover el cursor entre los paréntesis:



A continuación, escríbase la función a diferenciarse, por ejemplo, s*ln(s):



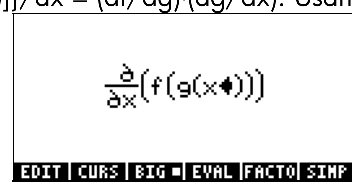
Para evaluar la derivada en el escritor de ecuaciones, presione la tecla ▲, cuatro veces, para seleccionar la expresión completa. A continuación, presione la tecla EVAL. El resultado es el siguiente:

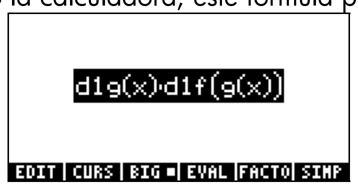


> **Nota**: El símbolo ∂ se utiliza formalmente en matemática para indicar una derivada parcial, es decir, la derivada de una función con más de una variable. Sin embargo, la calculadora no distingue entre las derivadas ordinarios y parciales, y utiliza el mismo símbolo para ambos. El usuario debe tener esta distinción presente al traducir resultados de la calculadora al papel.

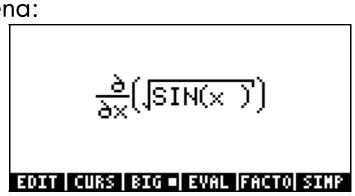
La regla de la cadena

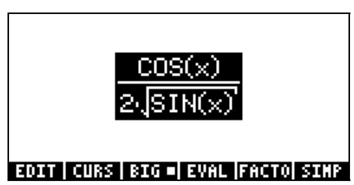
la regla de la cadena para las derivadas se aplica a las derivadas de funciones compuestas. Una expresión general para la regla de la cadena d{f[g(x)]}/dx = (df/dg)·(dg/dx). Usando la calculadora, este fórmula produce:





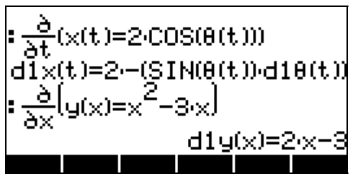
Los términos d1 delante de g(x) y de f(g(x)) en la expresión anterior son abreviaturas que la calculadora utiliza para indicar una derivada de primer orden cuando la variable independiente, en este caso x, se define claramente. Así, el último resultado se interpreta como en la fórmula para la regla de cadena mostrada anteriormente. He aquí otro ejemplo del uso de la regla de la cadena:

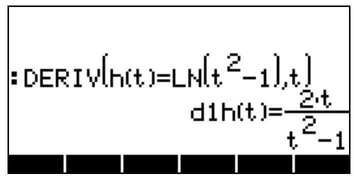


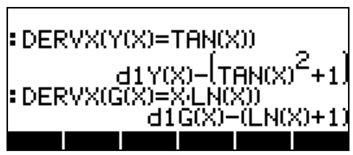


Derivadas de ecuaciones

Uno puede utilizar la calculadora para calcular derivad*as de* ecuaciones, es decir, las expresiones en las cuales l*a*s derivad*a*s existirán en ambos lados del *signo* igual. Algunos ejemplos se demuestran a continuación:



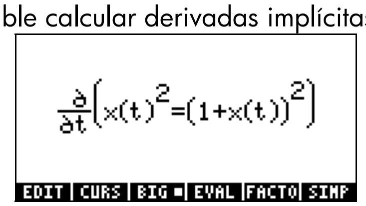


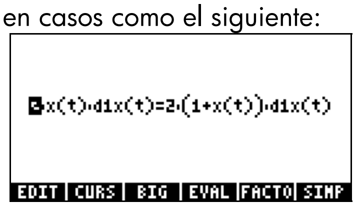


Nótese que en las expresiones donde se utiliza el signo de derivada (∂) o la función DERIV, el signo igual se preserva en la ecuación, pero no en los casos donde la función DERVX fue utilizada. En estos casos, la ecuación fue re-escrita con todos sus términos pasados al lado izquierdo del signo igual. Así mismo, el signo igual se remueve en estos casos, pero queda sobre-entendido que la expresión resultante es igual a cero.

Derivadas implícitas

Es posible calcular derivadas implícitas en casos como el siguiente:





Aplicaciones de las derivadas

Las derivadas se pueden utilizar para analizar los gráficos de funciones y para optimizar las funciones de una variable (es decir, encontrar máximos y mínimos). Algunas aplicaciones de las derivadas se muestran a continuación:

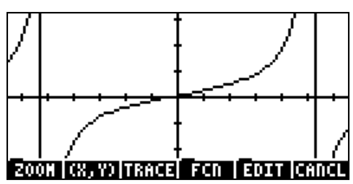
Analizando las gráficas de las funciones

En el capítulo 11 presentamos algunas funciones que están disponibles en la pantalla gráfica para analizar gráficos de las funciones de la forma y = f(x). Estas funciones incluyen (X,Y) y TRACE para determinar puntos en el gráfico, así como funciones en el menú ZOOM y FCN. Las funciones en el menú ZOOM permiten que el usuario enfoque dentro de un gráfico para analizarlo más detalladamente. Estas funciones se describen en detalle en el capítulo 12. Dentro de las funciones del menú de FCN, podemos utilizar las funciones SLOPE, EXTR, F ', y TANL para determinar la pendiente de una tangente al gráfico, los valores extremos (mínimos y máximos) de la función, para trazar la derivada, y para encontrar la ecuación de la línea de la tangente, respectivamente.

Ejecútese el siguiente ejemplo para la gráfica de y = tan x:

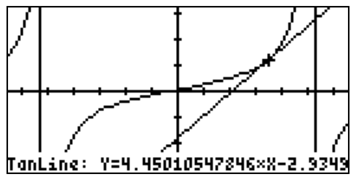
- Presiónese ← 2D/3D, simultáneamente si se usa modo RPN, para acceder a la pantalla PLOT SETUP.
- Cámbiese la opción `TYPE` a `FUNCTION`, si es necesario, utilizando [CHOOS].
- Presiónese ▼ y escríbase la ecuación ‘TAN(X)’.
- Asegúrese que la variable independiente es ‘X’.
- Presiónese NXT OK para recobrar la pantalla normal.
- Presiónese ← WIN, simultáneamente si se usa modo RPN, para acceder a la pantalla PLOT.
- Cámbiese el rango H-VIEW a –2 a 2, y el rango V-VIEW a –5 a 5.
- Presiónese ERASE DRAW para graficar la función.

El diagrama que resulta se presenta a continuación:



- Nótense las líneas verticales que representan asíntotas. Éstas no son parte del gráfico, sino demuestran puntos donde TAN(X) toma valores de ± ∞ para ciertos valores de X.

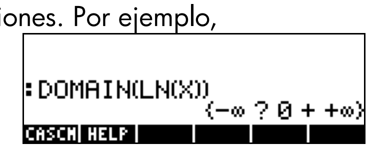
- Presiónese TRACE (X,Y), y muévase el cursor al punto X: 1.08E0, Y: 1.86E0. A continuación, presione NXT FCN SLOPE. El resultado es Slope: 4.45010547846 (la pendiente).
- Presiónese NXT NXT TANL. Esta operación produce la ecuación de la línea tangente, y traza el gráfico de la misma en la figura. El resultado se muestra a continuación:



- Presiónese NXT PICT CANCL ON para volver a la pantalla normal de la calculadora. Notar que la pendiente y la línea tangente requeridas se listan en la pantalla.

La función DOMAIN

La función DOMAIN, disponible a través del catálogo de funciones (→ CAT), provee el dominio de definición de una función en la forma de una lista de números y especificaciones. Por ejemplo,

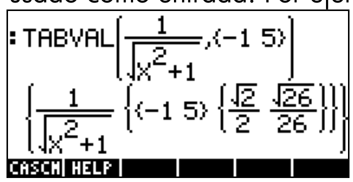


indica que entre los valores –∞ y 0, la función LN(X) no está definida (?), mientras que para el intervalo 0 a +∞, la función está definida (+). Por otro lado,

indica que esta función no está definida entre –∞ y -1, ni entre 1 y +∞. El dominio de la función es, por lo tanto, -1<X<1.

La función TABVAL

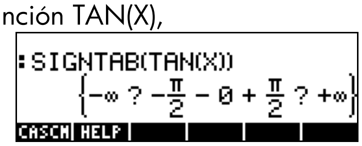
Esta función se puede activar a través del catálogo de funciones o con el sub-menú GRAPH en el menú CALC. La función TABVAL toma como argumentos una función de la variable del CAS, f(X), y una lista de dos números que representan un dominio del interés para la función f(X). La función TABVAL reproduce los argumentos de entrada más el rango de la función que corresponde al dominio usado como entrada. Por ejemplo,



Este resultado indica que el rango de la función $f(X)=\dfrac{1}{\sqrt{X^2+1}}$ correspondiente al dominio D = { -1,5 } es R = $\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{26}}{26}\right\}$.

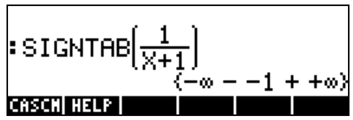
La función SIGNTAB

La función SIGNTAB, disponible a través del catálogo de funciones (⮫ CAT), proporciona información relacionada al signo de una función en su dominio. Por ejemplo, para la función TAN(X),



SIGNTAB indica que TAN(x) es negativa entre $-\pi/2$ y 0, y positiva entre 0 y $\pi/2$. Para este caso, SIGNTAB no provee información (?) en los intervalos entre $-\infty$ y $-\pi/2$, y entre $+\pi/2$ y ∞. Por lo tanto, la función SIGNTAB, para este caso, provee información solamente en el dominio principal de la función TAN(X), a saber, $-\pi/2 < X < +\pi/2$.

Otro ejemplo de aplicación de SIGNTAB se muestra a continuación:



Para este caso, la función es negativa para X<-1 y positiva para X> -1.

La función TABVAR

Esta función se activa a través del catálogo de funciones o con el sub-menú GRAPH en el menú CALC. TABVAR utiliza como entrada la función f(VX), en la cual VX es la variable independiente del CAS. La función produce lo siguiente, en modo de RPN:

- Nivel 3: la función f(VX)

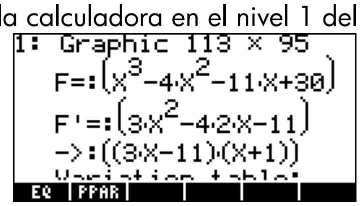
- Dos listas, la primera indica la variación de la función (es decir, donde crece y donde decrece) en términos de la variable independiente VX, la segunda indica la variación de la función en términos de la variable dependiente.

- Un objeto gráfico mostrando como se calcula la tabla de variación de la función.

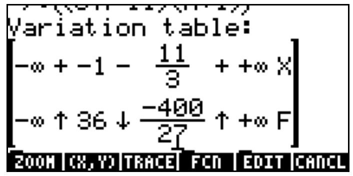
Ejemplo: Analice la función Y = X^3-4X^2-11X+30, usando la función TABVAR. Use lo siguiente, en modo RPN:

`'X^3-4*X^2-11*X+30'` ENTER → CAT ALPHA T (seleccione TABVAR) OK

Esto es lo que muestra la calculadora en el nivel 1 del apilado:



Este resultado es un objeto gráfico. Para ver el resultado completo, presiónese ▼. La tabla de variación de la función se muestra a continuación:



Presiónese ON para recobrar la pantalla normal. Presiónese ◄ para eliminar el último resultado en la pantalla.

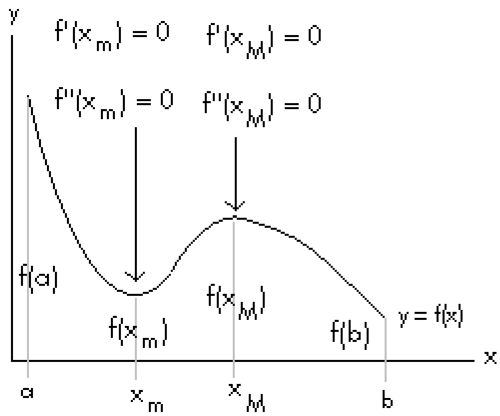
Dos listas, correspondiendo a las filas superior e inferior de la matriz gráfica mostrada anterior, ocupan ahora el nivel 1. Estas listas pueden ser útiles para propósitos de programación. Presiónese ◄ para eliminar el último resultado de la pantalla.

La interpretación de la tabla de la variación mostrada anteriormente es la siguiente: la función F(X) crece cuando X pertenece al intervalo (-∞, -1), alcanzando un máximo de 36 cuando X = -1. Después, F(X) decrece hasta el punto X = 11/3, alcanzando un mínimo de –400/27. Después de esto, F(X) crece hasta que X se hace +∞. Así mismo, cuando X = ±∞, F(X) = ±∞.

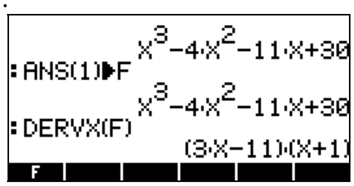
Uso de derivadas para calcular puntos extremos

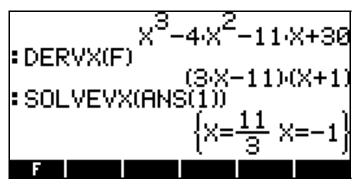
El término "puntos extremos," es la designación general para los valores máximos y mínimos de una función en un intervalo dado. Puesto que la derivada de una función en un punto dado representa la pendiente de una línea tangente a la curva en ese punto, los valores de x para los cuales f'(x) = 0 representa los puntos donde el gráfico de la función alcanza un máximo o un mínimo. Además, el valor de la segunda derivada de la función, f"(x), en esos puntos determina si el punto es un máximo relativo o local [f"(x)<0] o un mínimo relativo o local [f"(x)>0]. Estas ideas se ilustran en la figura que se muestra en la página siguiente.

En esa figura nos limitamos a determinar los puntos extremos de la función y = f(x) en el x-intervalo [a,b]. Dentro de este intervalo encontramos dos puntos, $x = x_m$ y $x = x_M$, donde f'(x)=0. El punto $x = x_m$, donde f"(x)>0, representa un mínimo local, mientras que el punto x = el x_M, donde f"(x)<0, representa un máximo local. Del gráfico de y = f(x) se observa que el máximo absoluto en el intervalo [a,b] ocurre en x = a, mientras que el mínimo absoluto ocurre en x = b.

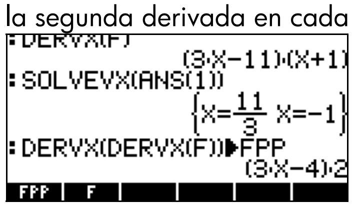


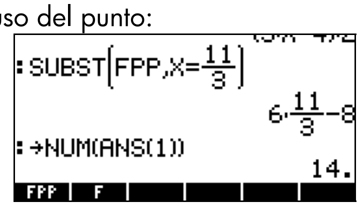
Por ejemplo, para determinar dónde ocurren los puntos críticos de la función 'X^3-4*x^2-11*x+30 ', podemos utilizar las expresiones siguientes en modo de ALG:



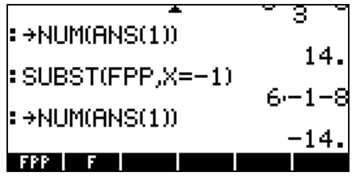


Encontramos dos puntos críticos, uno en x = 11/3 y uno en x = -1. Para evaluar la segunda derivada en cada uso del punto:

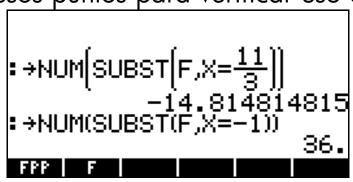




La pantalla anterior muestra que f"(11/3) = 14, de manera que, x = 11/3 es un mínimo relativo. Para x = -1, tenemos el siguiente resultado:



Este resultado indica que f"(-1) = -14, así que, x = -1 es un máximo relativo. Evalúese la función en esos puntos para verificar eso de hecho f(-1) > f(11/3).



Derivadas de orden superior

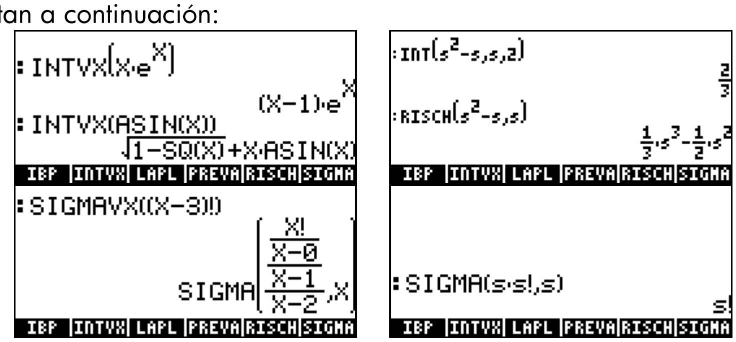
Las derivadas de orden superior pueden calcularse al aplicar una función de derivación varias veces, por ejemplo,

Antiderivadas e integrales

Una antiderivada de la función f(x) es una función F(x) tal que f(x) = dF/dx. Por ejemplo, dado que d(x^3) /dx = $3x^2$, una antiderivada de f(x) = $3x^2$ es la función F(x) = x^3 + C, en la cual C es una constante. La antiderivada puede representarse como una integral indefinida, i.e., $\int f(x)dx = F(x) + C$, si y sólo si, f(x) = dF/dx, y C = constante.

Las funciones INT, INTVX, RISCH, SIGMA y SIGMAVX

La calculadora provee las funciones INT, INTVX, RISCH, SIGMA y SIGMAVX para calcular antiderivadas. Las funciones INT, RISCH, y SIGMA operan con funciones de cualquier variable, mientras que las funciones INTVX y SIGMAVX utilizan funciones de la variable CAS VX (usualmente, 'X'). Las funciones INT y RISCH requieren, por lo tanto, no solamente la expresión de la función a integrar, sino también el nombre de la variable independiente. La función INT requiere también el valor de x donde se evaluará la integral. Las funciones INTVX y SIGMAVX requieren solamente la expresión de la función a integrarse en términos de la variable VX. La función INTVX se localiza en el menú CALC, las otras funciones de interés se pueden localiza utilizando el catálogo de funciones. Algunos ejemplos en modo ALG se presentan a continuación:



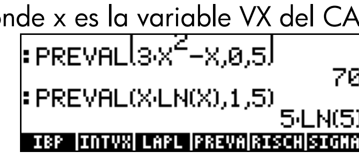
Nótese que las funciones SIGMAVX y SIGMA están diseñadas a operar en integrandos que incluyen ciertas funciones de números enteros como la función factorial (!) como se indica en un ejemplo anterior. El resultado representa la llamada derivada discreta, es decir, una derivada definida para números enteros solamente.

Integrales definidas

En la integral definida de una función, la antiderivada que resulta se evalúa en los límites superior e inferior de un intervalo (a,b), y los valores evaluados se sustraen. Simbólicamente esto se indica como:

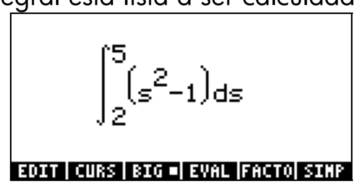
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$ donde f(x) = dF/dx.

La función PREVAL(f(x),a,b) del CAS puede simplificar dicho cálculo retornando f(b)-f(a), donde x es la variable VX del CAS.

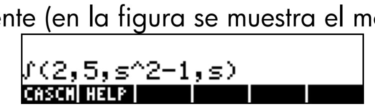


Para calcular integrales definidas la calculadora provee el símbolo integral a través de la combinación [→] ∫ (asociado con la tecla [TAN]). La manera más simple de construir un integral consiste en utilizar el escritor de ecuaciones (el capítulo 2 presenta un ejemplo). Dentro del escritor de ecuaciones, el símbolo [→] ∫ produce el signo integral y proporciona las localidades para los límites de integración (a,b), para la función f(x), y para la variable de la integración x. Las siguientes pantallas muestran cómo construir un integral particular.

El cursor de inserción se localiza primero en el límite inferior de integración. Escríbase un valor y presiónese la tecla direccional [▶] para mover el cursor al límite superior de integración. Escríbase otro valor y presiónese [▶] otra vez para mover el cursor a la posición del integrando. Escríbase la expresión del integrando, y presiónese [▶] una vez más para mover el cursor a la posición del diferencial. Escríbase la variable de integración en esta posición. Después de esta acción, la integral está lista a ser calculada.



Presiónese [ENTER] para pasar la integral a la línea de entrada en la pantalla, la cual mostrará lo siguiente (en la figura se muestra el modo ALG):



Éste es el formato general para la integral definida cuando se escribe directamente en la pantalla, es decir,

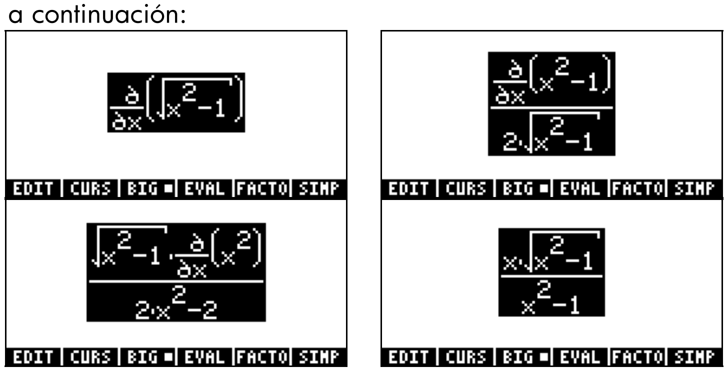
∫(límite inferior, límite superior, integrando, variable de integración)

Al presionar [ENTER] se evaluará la integral en la pantalla:

La integral se puede evaluar también en el escritor de ecuaciones, al seleccionar la expresión completa y presionar la tecla de menú EVAL.

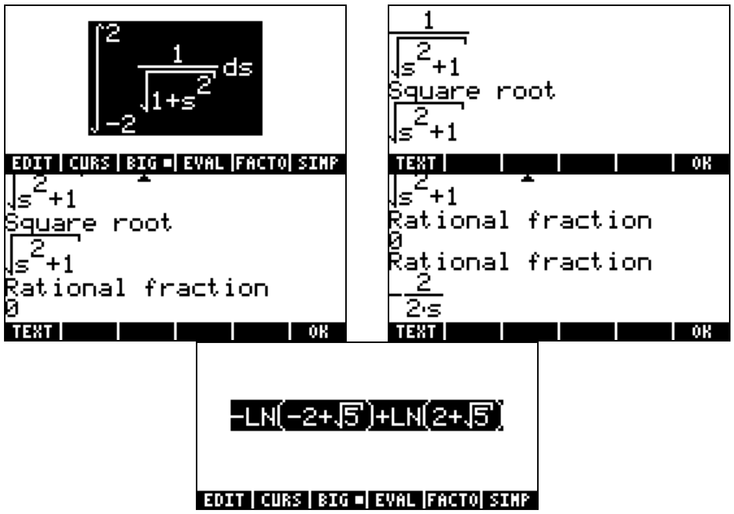
Evaluación de derivadas e integrales paso a paso

Cuando se selecciona la opción Step/Step en la pantalla CAS MODES (ver el capítulo 1), la evaluación de derivadas e integrales se mostrará paso a paso. Por ejemplo, la evaluación de una derivada en el escritor de ecuaciones se muestra a continuación:



Nótese el uso de la regla de la cadena en el primer paso, dejando el derivado de la función bajo la derivada explícita en el numerador. En el segundo paso, se racionaliza (se elimina la raíz cuadrada del denominador), y se simplifica la fracción que resulta. La versión final se muestra en el tercer paso. Cada paso se ejecuta al presionar la tecla de menú EVAL, hasta que se alcance el punto en que ya no se producen más cambios en la expresión al presionar esa tecla.

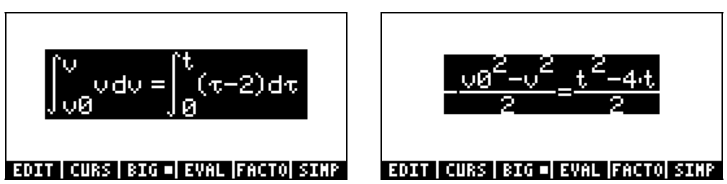
El ejemplo siguiente muestra la evaluación de una integral definida en el escritor de ecuaciones, paso a paso:



Nótese que el proceso paso a paso proporciona información sobre los pasos intermedios seguidos por el CAS para evaluar esta integral. Primero, el CAS identifica la integral de una raíz cuadrada, después, una fracción racional, y una segunda expresión racional, hasta obtener el resultado final. Nótese que estos pasos son entendidos por la calculadora, aunque no se provee suficiente información al usuario sobre los pasos individuales.

Integración de una ecuación

La integración de una ecuación es simple: la calculadora integra ambos lados de la ecuación simultáneamente, es decir,

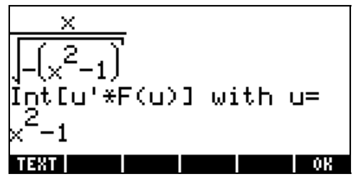


Técnicas de integración

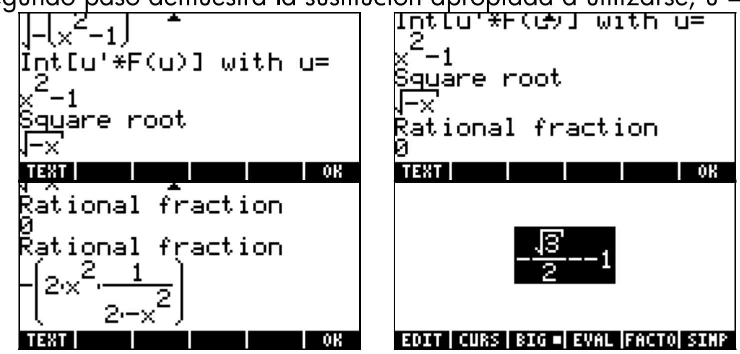
Varias técnicas de integración se pueden implementar en la calculadora, como se muestra en los ejemplos siguientes.

Sustitución o cambio de variable

Supóngase que se desea calcular la integral $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Si utilizamos el cálculo paso a paso en el escritor de ecuaciones, la siguiente es la secuencia de sustituciones de las variables:



Este segundo paso demuestra la sustitución apropiada a utilizarse, $u = x^2-1$.



Los cuatro pasos anteriores muestran la progresión de la solución: una raíz cuadrada, seguida por una fracción, una segunda fracción, y el resultado final. Este resultado puede ser simplificado usando la función SIMP, resultando en:

Integración por partes y diferenciales

El diferencial de una función $y = f(x)$, se define como $dy = f'(x)\,dx$, en la cual $f'(x)$ es la derivada de $f(x)$. Los diferenciales se utilizan para representar incrementos infinitesimales en las variables. El diferencial de un producto de dos funciones, y = u(x)v(x), se calcula usando dy = u(x)dv(x) +du(x)v(x), o, simplemente, d(uv) = udv + vdu. De manera que la integral de udv = d(uv) - vdu se escribe como $\int udv = \int d(uv) - \int vdu$. Dado que, por definición, ∫dy = y, la expresión anterior se escribe como

$$\int udv = uv - \int vdu \, .$$

Esta formulación, conocida como integración por partes, se puede utilizar para encontrar un integral si dv es fácilmente integrable. Por ejemplo, la integral $\int xe^x dx$ puede calculares por partes si se toma u = x, dv = $e^x dx$, dado que, v = e^x. Con du = dx, la integral se convierte en $\int xe^x dx = \int udv = uv - \int vdu = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$.

La calculadora proporciona la función IBP, bajo menú CALC/DERIV&INTG, que toma como argumentos la función original a integrar, a saber, u(X)*v'(X), y la función v(X), y produce los resultados u(X)*v(X) y - v(X)*u'(X). Es decir la función IBP produce los dos términos del lado derecho en la integración por partes. Para el ejemplo usado anteriormente, podemos escribir, en modo de ALG:

De esta forma, podemos utilizar la función IBP para obtener las componentes de una integración por partes. El paso siguiente tendrá que ser realizado por separado.

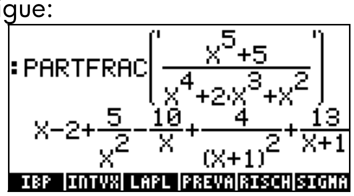
Es importante mencionar que la integral puede ser calculada directamente usando, por ejemplo,

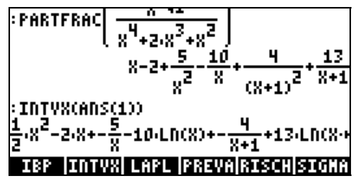
Integración por fracciones parciales

La función PARTFRAC, presentada en el capítulo 5, provee la descomposición de una fracción en fracciones parciales. Esta técnica es útil para reducir una fracción complicada en una suma de las fracciones simples que puedan integrarse término a término. Por ejemplo, para integrar

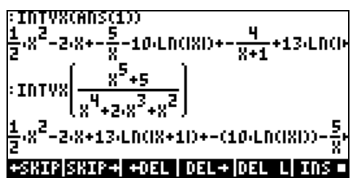
$$\int \frac{X^5+5}{X^4+2X^3+X}dX$$

podemos descomponer la fracción en sus fracciones componentes parciales, como sigue:





La integración directa produce el mismo resultado, con una cierta conmutación de los términos (modo Rigorous seleccionado para CAS - véase el capítulo 2):

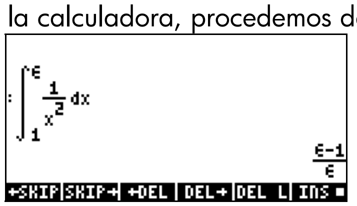
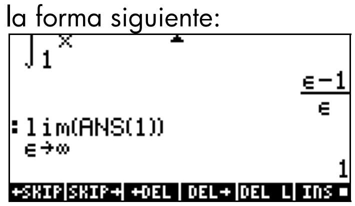


Integrales impropias

Éstas son integrales con límites infinitos de integración. Típicamente, par calcular una integral impropia se calcula un límite al infinito, por ejemplo

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_1^\varepsilon \frac{dx}{x^2}.$$

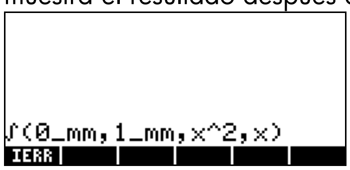
Usando la calculadora, procedemos de la forma siguiente:

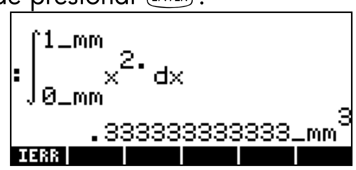



Alternativamente, usted puede evaluar la integral al infinito directamente, es decir,

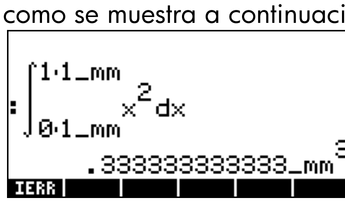
Integración incluyendo unidades de medida

Una integral se puede calcular con las unidades incorporadas en los límites de la integración, como en el ejemplo siguiente que utiliza el modo ALG, con el CAS fijado a modo Aprox. La figura de la izquierda muestra la integral escrita en la línea de entrada antes de presionar ENTER. La figura de la derecha muestra el resultado después de presionar ENTER.



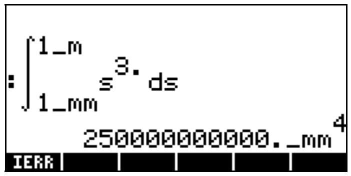


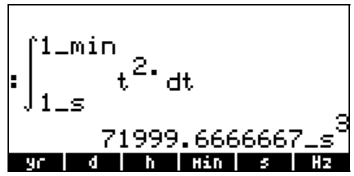
Si usted incorpora el integral con el CAS fijo en modo Exact, se le solicitará cambiar al modo Aprox, sin embargo, los límites de la integral se mostrarán en un formato diferente como se muestra a continuación:



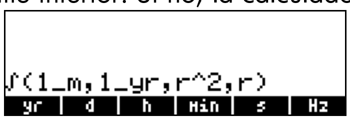
Estos límites representan 1×1_mm y 0×1_mm, que es lo mismo que 1_mm y 0_mm, como se mostró previamente. Manténgase alerta de los diversos formatos en la salida dependiendo del modo de operación.

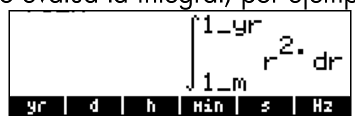
Algunas notas en el uso de unidades en los límites de integraciones:
1 – Las unidades del límite inferior de integración serán las que se usen en el resultado final, según lo ilustrado en los dos ejemplos siguientes:



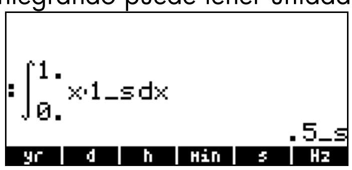


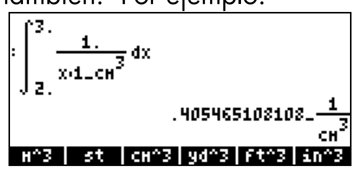
2 - Las unidades del límite superior deben ser consistentes con las unidades del límite inferior. Si no, la calculadora no evalúa la integral, por ejemplo:



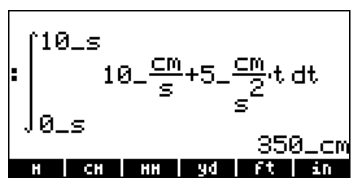


3 – El integrando puede tener unidades también. Por ejemplo:





4 – Si los límites de la integración y el integrando tienen unidades, las unidades que resultan se combinan según las reglas de la integración. Por ejemplo:



Series infinitas

Una serie infinita se escribe como $\sum_{n=0,1}^{\infty} h(n)(x-a)^n$. La serie infinita comienza típicamente con índices n = 0 o n = 1. Cada término en la serie tiene un coeficiente h(n) que dependa del índice n.

Series de Taylor y de Maclaurin

Una función f(x) se puede expandir en una serie infinita alrededor de un punto $x=x_0$ usando una serie de Taylor, es decir,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}\cdot(x-x_o)^n\ ,$$

en la cual $f^{(n)}(x)$ representa la n-sima derivada de f(x) con respecto a x, y $f^{(0)}(x)$ = f(x). Si x_0 = 0, la serie se denomina una serie de Maclaurin, es decir,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$$

Polinomio y residuo de Taylor

En la práctica, no podemos evaluar todos los términos en una serie infinita, en su lugar, aproximamos la serie por un polinomio de orden k, $P_k(x)$, y estimamos el orden de una residuo, $R_k(x)$, tal que

$$f(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}\cdot(x-x_o)^n+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}\cdot(x-x_o)^n\ ,$$

es decir, $$f(x)=P_k(x)+R_k(x).$$

El polinomio $P_k(x)$ se denomina polinomio de Taylor's. El orden del residuo se estima en términos de una cantidad pequeña $h = x\text{-}x_0$, es decir, se evalúa el polinomio en un valor de x muy cercano a x_0. El residuo se define por

$$R_k(x)=\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}\cdot h^{k+1},$$

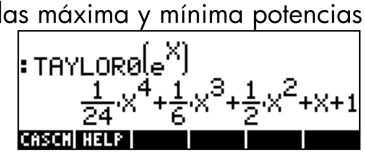
en la cual ξ es un número cercano a $x = x_0$. Dado que ξ es desconocido en la mayoría de los casos, en vez de proveer un estimado del residuo, se provee un estimado del orden de magnitud del residuo en términos de h, es decir, se dice que $R_k(x)$ representa un orden de h^{n+1}, ó $R \approx O(h^{k+1})$. Si h es una cantidad pequeña, digamos, h<<1, entonces h^{k+1} es típicamente mucho más pequeño, es decir, $h^{k+1}<<h^k<< \ldots << h << 1$. Por lo tanto, para x cercano a

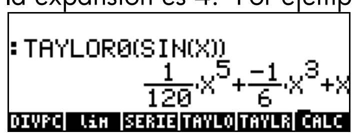
x_0, mientras más elementos en el polinomio de Taylor, menor será el orden de magnitud del residuo.

Las funciones TAYLR, TAYLR0, y SERIES

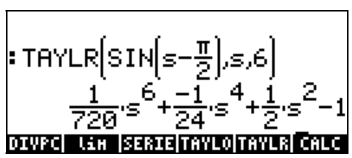
Las funciones TAYLR, TAYLR0, y SERIES se utilizan para generar polinomios de Taylor, así como series Taylor con residuos. Estas funciones se encuentran disponibles en el menú CALC/LIMITS&SERIES descrito anteriormente.

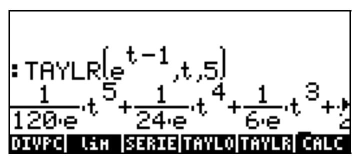
La función TAYLOR0 produce una serie de Maclaurin, es decir, alrededor de X = 0, de une expresión de la variable CAS VX (usualmente 'X'). La expansión utiliza una potencia relativa del 4to orden, es decir, la diferencia entre las máxima y mínima potencias en la expansión es 4. Por ejemplo,





La función TAYLR produce una serie de Taylor de una función f(x) de cualquier variable x alrededor del punto x = a de orden k especificado por el usuario. La función sigue el formato TAYLR(f(x-a),x,k). Por ejemplo,





La función SERIES produce un polinomio de Taylor utilizando como argumentos la función f(x) a expandirse, el nombre de una variable solamente (para series de Maclaurin) o una expresión de la forma 'variable = valor' que indica el punto de expansión de una serie de Taylor, y el orden de la serie a producirse. La función SERIES produce dos resultados, una lista de cuatro elementos, y una expresión de la forma h = x - a, si el segundo argumento de la función es 'x=a', es decir, una expresión del incremento h. La lista en el primer resultado incluye los siguientes elementos:

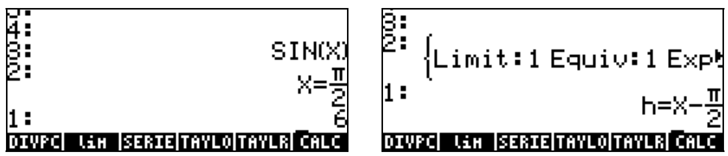
1 - El límite bi-direccional de la función en el punto de expansión, $\lim_{x\to a} f(x)$

2 - El valor equivalente de la función cerca del valor x = a

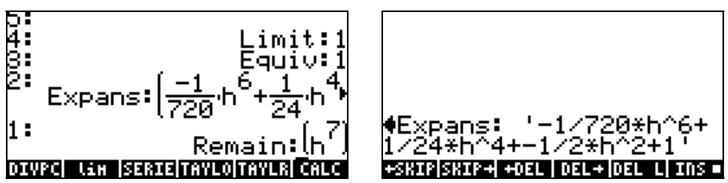
3 - La expresión del polinomio de Taylor

4 - El orden del residuo del polinomio de Taylor

Debido a la cantidad de resultados, esta función se puede observar más fácilmente en el modo RPN. Por ejemplo, la figure siguiente muestra la pantalla RPN antes y después de utilizar la función SERIES:



Elimine el contenido del nivel 1 de la pantalla al presionar la tecla ⬅, y presione la tecla EVAL, para descomponer la lista. Los resultados se muestran a continuación:



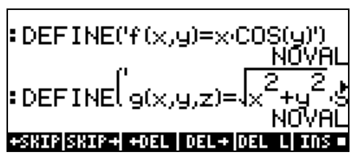
En la figura de la derecha se ha utilizado el editor de línea para visualizar la expansión en detalle.

Capítulo 14
Aplicaciones en el Cálculo Multivariado

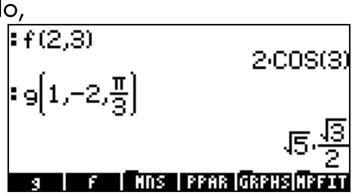
El cálculo multivariado se aplica a funciones de dos o más variables. En este Capítulo se discuten los conceptos básicos conceptos del cálculo multivariado: derivadas parciales e integrales múltiples.

Funciones de múltiple variables

Una función de dos o más variables puede definirse en la calculadora usando la función DEFINE (← DEF). Para ilustrar el concepto de la derivada parcial, definiremos un par de funciones de múltiple variables, f(x,y) = x cos(y), y g(x,y,z) = $(x^2+y^2)^{1/2}$sin(z), como se muestra a continuación:



Estas funciones pueden evaluarse como se evalúan otras funciones en la calculadora, por ejemplo,



Es posible graficar funciones bi-dimensionales utilizando las funciones gráficas Fast3D, Wireframe, Ps-Contour, Y-Slice, Gridmap, y Pr-Surface que se describen en el Capítulo 12.

Derivadas parciales

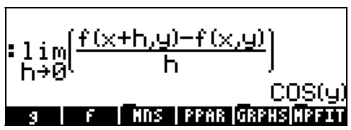
Considérese la función de dos variables z = f(x, y), la derivada parcial de la función con respecto a x se define por el límite

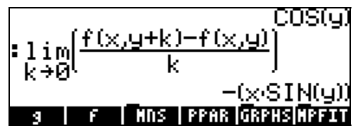
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad .$$

Similarmente,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} .$$

Utilizaremos las funciones multi-variadas definidas anteriormente para calcular derivadas parciales usando estas definiciones. A continuación se muestran las derivadas de f(x, y) con respecto a x y a y, respectivamente:





Nótese que la definición de la derivada parcial con respecto a x, por ejemplo, requiere que mantengamos fija la y mientras que tomen el límite como h→0. Esto sugiere una manera de calcular rápidamente los derivados parciales de funciones multi-variadas: úsense las reglas de las derivadas ordinarias con respecto a la variable de interés, mientras se consideran las demás variables como constantes. Por ejemplo,

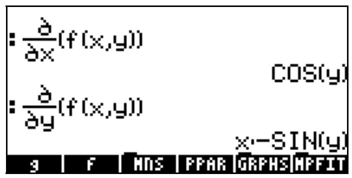
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\cos(y)\right) = \cos(y), \ \frac{\partial}{\partial y}\left(x\cos(y)\right) = -x\sin(y),$$

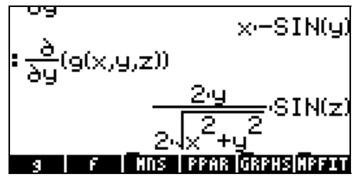
que es el mismo resultado encontrado con los límites calculados anteriormente. Considérese otro ejemplo,

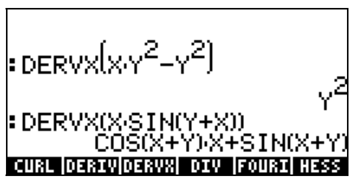
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(yx^2 + y^2\right) = 2yx + 0 = 2xy$$

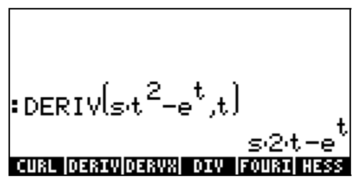
En este cálculo tratamos a la y como constante y tomamos los derivados de la expresión con respecto a x.

De manera similar, uno puede utilizar las funciones de derivadas de la calculadora: DERVX, DERIV, ∂, descritas en el Capítulo 13 de esta Guía, para calcular derivadas parciales (DERVX utiliza la variable CAS VX, usualmente, 'X'). Algunos ejemplos de derivadas parciales del primer orden se muestran a continuación. Las funciones utilizadas en los primeros dos ejemplos son f(x,y) = SIN(y), y g(x,y,z) = $(x^2+y^2)^{1/2}$sin(z).









Derivadas de orden superior

Las siguientes derivadas de segundo orden pueden ser definidas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

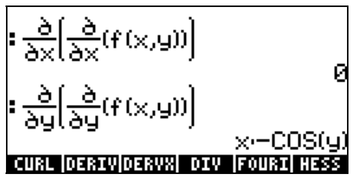
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

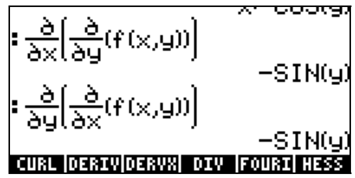
Las dos últimas expresiones representan derivadas mixtas, las derivadas parciales en el denominador muestran el orden de la derivación. En el lado izquierdo, la derivación está tomada primero con respecto a x y después con respecto a y, mientras que en el lado derecho, sucede lo contrario. Es importante indicar que, si una función es continua y diferenciable, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Derivadas de órdenes 3, 4, y mayor, se definen de manera similar.

Para calcular derivadas de un orden superior en la calculadora, repítase simplemente la derivada tantas veces tan necesarias. Algunos ejemplos se demuestran a continuación:



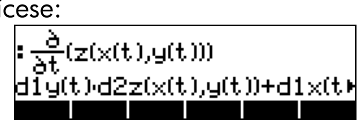


La regla de la cadena para derivadas parciales

Considérese la función z = f(x, y), tal que x = x(t), y = y(t). La función z representa realmente una función compuesta de t si la escribimos como z = f[x(t), y(t)]. La regla de la cadena para la derivada dz/dt para este caso se escribe como

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

Para ver la expresión que la calculadora produce para esta aplicación de la regla de la cadena utilícese:



El resultado es d1y(t)×d2z(x(t), y(t))+d1x(t)×d1z(x(y), y(t)). El término d1y(t) debe ser interpretado como "la derivada del y(t) con respecto a la 1ra variable independiente, es decir, t", o d1y(t) = dy/dt. De manera similar, d1x(t) = dx/dt. Por otra parte, d1z(x(t), y(t)) significa “la primera derivada de z(x, y) con respecto a la primera variable independiente, es decir, x", o d1z(x(t), y(t)) = z/x. Así mismo, d2z(x(t), y(t)) = z/y. Por lo tanto, la expresión anterior debe ser interpretada como:

$dz/dt = (dy/dt)\cdot(\partial z/\partial y) + (dx/dt)\cdot(\partial z/\partial x)$.

El diferencial total de una función z = z(x,y)
De la ecuación pasada, si nos multiplicamos por despegue, conseguimos el diferencial total de la función $z = z(x, y)$, es decir, $dz = (\partial z/\partial x)\cdot dx + (\partial z/\partial y)\cdot dy$.

Una versión diferente de la regla de la cadena se aplica al caso en el cual $z = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, tal que $z = f[x(u, v), y(u, v)]$. Las fórmulas siguientes representan la regla de la cadena para esta situación:

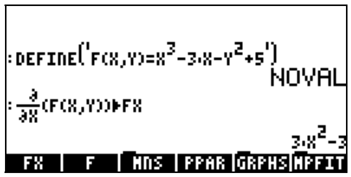
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

Determinación de extremos en funciones de dos variables

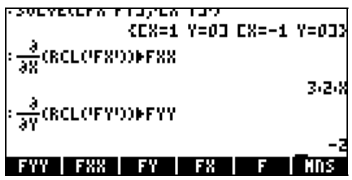
Para que la función $z = f(x, y)$ tenga un punto extremo en (x_o, y_o), sus derivadas $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ deben ser iguales a cero en ese punto. Éstas son condiciones necesarias. Las condiciones suficientes para que la función tenga un extremo en el punto (x_o,y_o) son $\partial f/\partial x = 0$, $\partial f/\partial y = 0$, y $\Delta = (\partial^2 f/\partial x^2)\cdot(\partial^2 f/\partial y^2)-[\partial^2 f/\partial x\partial y]^2 > 0$. El punto (x_o,y_o) es un máximo relativo si $\partial^2 f/\partial x^2 < 0$, o un mínimo relativo si $\partial^2 f/\partial x^2 > 0$. El valor Δ se conoce como el discriminante.

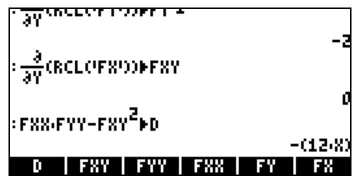
Si $\Delta = (\partial^2 f/\partial x^2)\cdot(\partial^2 f/\partial y^2)-[\partial^2 f/\partial x\partial y]^2 < 0$, tenemos una condición conocida como punto de la montura, donde la función alcanza un máximo en x si mantenemos y constante, mientras que, al mismo tiempo, alcanza un mínimo x se mantiene constante, o viceversa.

Ejemplo 1 - Determínense los puntos extremos (si existen) de la función, $f(X,Y) = X^3-3X-Y^2+5$. Primero, definimos la función, f(X,Y), y sus derivadas, $fX(X,Y) = \partial f/\partial X$, $fY(X,Y) = \partial f/\partial Y$. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones fX(X,Y) = 0 y fY(X,Y) = 0, resulta en:

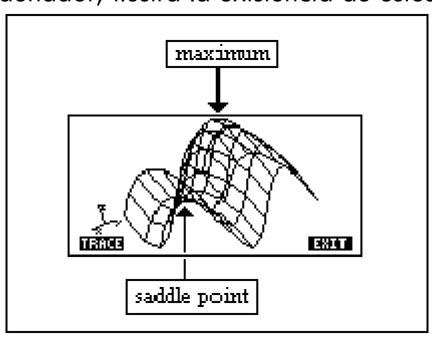


Encontramos puntos críticos en (X,Y) = (1.0), y (X,Y) = (-1.0). Para calcular el discriminante, procedemos a calcular las segundas derivadas, fXX(X,Y) = $\partial^2 f/\partial X^2$, fXY(X,Y) = $\partial^2 f/\partial X/\partial Y$, y fYY(X,Y) = $\partial^2 f/\partial Y^2$.





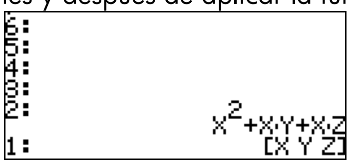
El resultado último indica que es el discriminante Δ = -12X, así que, para (X,Y) = (1.0), $\Delta < 0$ (punto de montura), y para (X,Y) = (-1.0), $\Delta > 0$ y $\partial^2 f/\partial X^2 < 0$ (máximo relativo). La figura siguiente, producida en la calculadora, y modificada en un ordenador, ilustra la existencia de estos dos puntos:

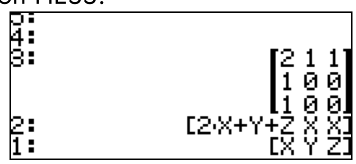


Uso de la función HESS para analizar valores extremos

La función HESS puede ser utilizada para analizar valores extremos de una función de dos variables según se muestra a continuación. La función HESS, en general, toma como argumentos una función de las variables independientes $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, y un vector de las funciones ['x_1' 'x_2'…'x_n']. La función HESS produce la matriz Hessiana de la función ϕ, definida como la matriz $\mathbf{H} = [h_{ij}] = [\partial^2\phi/\partial x_i \partial x_j]$, el gradiente de la función con respecto a las n-variables, **grad** f = [$\partial\phi/\partial x_1$, $\partial\phi/\partial x_2$, … $\partial\phi/\partial x_n$], y la lista de variables ['x_1' 'x_2'…'x_n'].

La función HESS es más fácil de visualizar en el modo RPN. Considérese como ejemplo la función $f(X, Y, Z) = X^2 + XY + XZ$, aplicaremos la función HESS a la función ϕ en el ejemplo siguiente. Las pantallas muestra la pantalla RPN antes y después de aplicar la función HESS.





Cuando se aplica HESS a una función de dos variables, el gradiente en el nivel 2, cuando se iguala a cero, representa las ecuaciones para los puntos críticos, es decir, $\partial\phi/\partial x_i = 0$, mientras que la matriz en el nivel 3 representa las segundas derivadas. Por lo tanto, los resultados de la función de HESS se pueden utilizar para analizar extrema en funciones de dos variables. Por ejemplo, para la función $f(X, Y) = X^3\text{-}3X\text{-}Y^2+5$, procédase de la forma siguiente en modo RPN:

'X^3-3*X-Y^2+5' ENTER ['X','Y'] ENTER	Escribir función y variables
HESS	Aplicar la función HESS
SOLVE	Encontrar los puntos críticos
EVAL	Descomponer el vector
's1' STO▶ 's2' STO▶	Almacenar puntos críticos

Las variables s1 y s2, a este punto, contienen los vectores [' X=-1', 'y=0] y [' X=1', 'y=0], respectivamente. La matriz Hessiana estará en el nivel 1 a este punto.

'H' STO▶	Almacenar matriz Hessiana
VAR [H] [S1] SUBST →NUM	Sustituir s1 en H

La matriz resultante **A** contiene los elementos $a_{11} = \partial^2\phi/\partial X^2 =$ -6., $a_{22} = \partial^2\phi/\partial X^2 =$ -2., y $a_{12} = a_{21} = \partial^2\phi/\partial X\partial Y =$ 0. El discriminante para este punto crítico, s1(-1,0), es $\Delta = (\partial^2 f/\partial x^2)\cdot(\partial^2 f/\partial y^2)-[\partial^2 f/\partial x\partial y]^2 = (-6.)(-2.) = 12.0 > 0$. Dado que $\partial^2\phi/\partial X^2 <0$, el punto s1 representa un máximo relativo.

A continuación, sustituimos el segundo punto, s2, en H:

VAR H S2 SUBST →NUM Substituir s2 en H

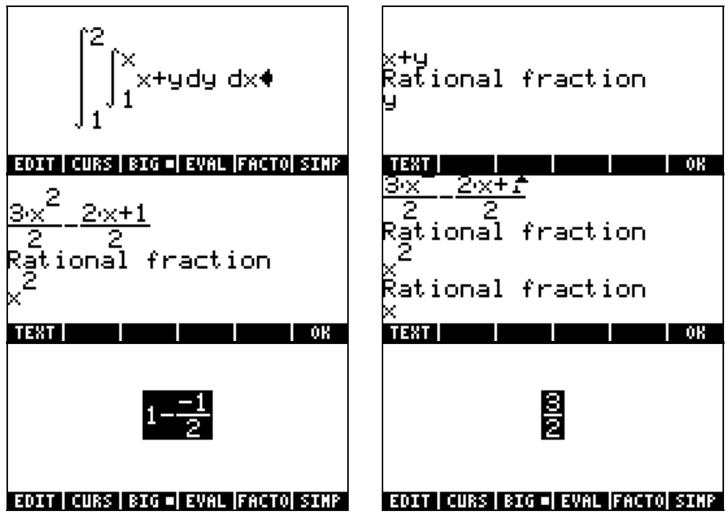
La matriz resultante **A** contiene los elementos $a_{11} = \partial^2\phi/\partial X^2 =$ 6., $a_{22} = \partial^2\phi/\partial X^2 =$ -2., y $a_{12} = a_{21} = \partial^2\phi/\partial X\partial Y =$ 0. El discriminante para este punto crítico, s2(1,0) es $\Delta = (\partial^2 f/\partial x^2)\cdot(\partial^2 f/\partial y^2)-[\partial^2 f/\partial x\partial y]^2 = (6.)(-2.) = -12.0 < 0$, indicando un punto.

Integrales múltiples

La interpretación física de la integral simple, $\int_a^b f(x)dx$, es el área bajo la curva y = f(x) y las abcisas x = a y x = b. La generalización a tres dimensiones de la integral simple es la doble integral de la función f(x,y) sobre una región R en el plano x-y representando el volumen del sólido contenido bajo la superficie f(x,y) encima de la región R. La región R puede describirse como R = {a<x<b, f(x)<y<g(x)}, o como R = {c<y<d, r(y)<x<s(y)}. La integral doble correspondiente se puede escribir como sigue:

$$\iint_R \phi(x,y)dA = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \phi(x,y)dydx = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} \phi(x,y)dydx$$

La evaluación de una integral doble en la calculadora es relativamente simple. Una integral doble puede escribirse en el escritor de ecuaciones (véase el ejemplo en el Capítulo 2), como se muestra a continuación. Esta integral doble puede calcularse directamente en el escritor de ecuaciones al seleccionar la expresión completa y utilizar la función EVAL. El resultado es 3/2. Es posible también calcular la integral paso a paso al seleccionar la opción Step/Step en la pantalla CAS MODES.



El Jacobiano de una transformación de coordenadas

Considérese la transformación de coordenadas x = x(u,v), y = y(u,v). El Jacobiano de esta transformación se define como:

$$|J| = \det(J) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Cuando se calcula una integral doble utilizando esta transformación, la expresión a utilizar es $\iint_R \phi(x,y)dydx = \iint_{R'} \phi[x(u,v),y(u,v)]\,|\,J\,|\,dudv$, en la cual R' es la región R expresada en términos de las coordenadas (u,v).

Integral doble en coordenadas polares

Para transformar de coordenadas polares a cartesianas utilizamos x(r,θ) = r cos θ, y y(r, θ) = r sin θ. Por lo tanto, el Jacobiano de la transformación es

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cdot \cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

Con este resultado, las integrales en coordenadas polares se escriben como

$$\iint_{R'} \phi(r,\theta)dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{f(\theta)}^{g(\theta)} \phi(r,\theta) r dr d\theta$$

en la cual la región R' en coordenadas polares es R' = {$\alpha < \theta < \beta$, $f(\theta) < r < g(\theta)$}.

Los integrales dobles en coordenadas polares se pueden escribir en la calculadora, cerciorándose de que el Jacobiano |J| = r se incluye en el integrando. El siguiente es un ejemplo de una integral doble calculada en coordenadas polares, paso a paso:

Capítulo 15
Aplicaciones en Análisis Vectorial

En este capítulo presentamos un número de funciones del menú CALC que se apliquen al análisis de los campos escalares y vectoriales. El menú CALC fue presentado detalladamente en el capítulo 13. En el menú DERIV&INTEG identificamos un número de funciones que tienen usos en el análisis vectorial, a saber, CURL, DIV, HESS, LAPL. Para los ejercicios en este capítulo, cambie su medida angular a radianes.

Definiciones

Una función definida en una región del espacio tal como $\phi(x, y, z)$ se conoce como campo escalar, ejemplos: temperatura, densidad, y voltaje cerca de una carga. Si la función es definida por un vector, es decir, **F**(x, y, z) = f(x, y, z)i+g(x, y, z)j+h(x, y, z)k, se conoce como un campo vectorial.

El operador que se muestra a continuación, llamado el operador 'del' o 'nabla', es un operador vectorial que puede aplicarse a una función escalar o vectorial:

$$\nabla[\ ] = i\cdot\frac{\partial}{\partial x}[\ ] + j\cdot\frac{\partial}{\partial y}[\ ] + k\cdot\frac{\partial}{\partial z}[\ ]$$

Cuando este operador se aplica a una función escalar se obtiene el gradiente de la función, y cuando se aplica a una función vectorial se puede obtener la divergencia y el rotacional (curl) de la función. La combinación del gradiente y la divergencia producen el Laplaciano de una función escalar.

Gradiente y derivada direccional

El <u>gradiente</u> de una función escalar $\phi(x,y,z)$ es la función vectorial definida como

$$grad\phi = \nabla\phi = i\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x} + j\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y} + k\cdot\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

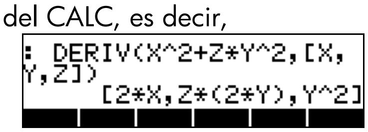
El producto punto del gradiente de una función con un vector unitario dado representa el índice del cambio de la función a lo largo de ese vector particular. Este índice del cambio se conoce como la derivada direccional de la función, $D_u\phi(x,y,z) = \mathbf{u}\bullet\nabla\phi$.

En cualquier punto particular, el índice del cambio máximo de la función ocurre en la dirección del gradiente, es decir, a lo largo de un vector unitario, $\mathbf{u} = \nabla\phi/|\nabla\phi|$.

El valor de esta derivada direccional es igual a la magnitud del gradiente en cualquier punto $D_{max}\phi(x,y,z) = \nabla\phi \bullet\nabla\phi/|\nabla\phi| = |\nabla\phi|$

La ecuación $\phi(x,y,z) = 0$ representa una superficie en el espacio. Resulta que el gradiente de la función en cualquier punto en esta superficie es normal a la superficie. Así, la ecuación de una tangente plana a la curva en ese punto puede ser encontrada usando la técnica presentada en el capítulo 9.

La manera más simple de obtener el gradiente está usando la función DERIV, disponible en el menú del CALC, es decir,

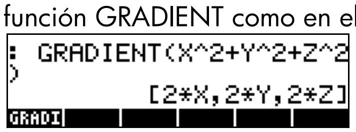


Un programa para calcular el gradiente

El programa siguiente, que usted puede almacenar en la variable GRADIENTE, utiliza la función DERIV para calcular el gradiente de una función escalar de X, Y, Z, solamente. El programa no operará en otras variables de base. Si usted trabaja con frecuencia en el sistema (X, Y, Z), sin embargo, esta función facilitará el cálculo del gradiente:

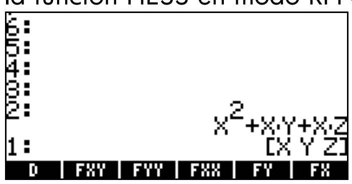
<< X Y Z 3 →ARRY DERIV >>

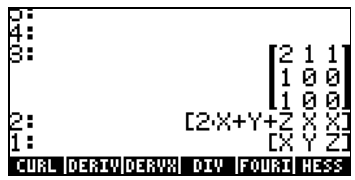
Escriba el programa en modo RPN. Después de cambiar al modo de ALG, usted puede ejecutar la función GRADIENT como en el ejemplo siguiente:



Utilizando la función HESS para obtener el gradiente

La función HESS puede utilizarse para obtener el gradiente de una función. La función HESS toma como argumentos una función de n variables independientes, $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, y un vector de las variables [‘x_1’ ‘x_2’…’x_n’]. La función HESS produce la <u>matriz Hessiana</u> de la función ϕ, $\mathbf{H} = [h_{ij}] = [\partial\phi/\partial x_i \partial x_j]$, el gradiente de la función con respecto a las n variables, **grad** f = $[\ \partial\phi/\partial x_1\ \partial\phi/\partial x_2 \ldots \partial\phi/\partial x_n]$, y la lista de variables [‘x_1’, ‘x_2’,…,’x_n’]. Esta función se visualiza mejor en el modo RPN. Tómese como ejemplo la función $\phi(X,Y,Z) = X^2 + XY + XZ$. La aplicación de la función HESS produce el resultado siguiente (La figura muestra la pantalla antes y después de aplicar la función HESS en modo RPN):



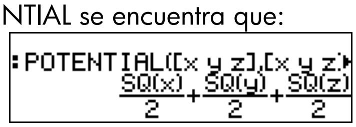


El gradiente que resulta es [2X+Y+Z, X, X]. Alternativamente, uno puede utilizar la función DERIV como sigue: DERIV(X^2+X*Y+X*Z,[X,Y,Z]), para obtener el mismo resultado.

Potencial de un gradiente

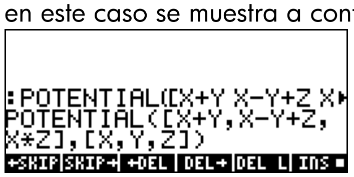
Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$, si existe la función $\phi(x,y,z)$, tal que $f = \partial\phi/\partial x$, $g = \partial\phi/\partial y$, $h = \partial\phi/\partial z$, entonces $\phi(x,y,z)$ se conoce como la función potencial para el campo vectorial **F**. Resulta que **F** = grad $\phi = \nabla\phi$.

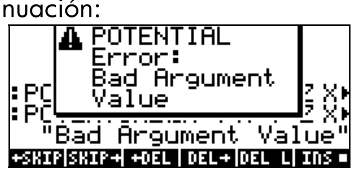
La calculadora proporciona la función POTENTIAL, disponible a través del catálogo de funciones (⇨ _CAT_), para calcular la función potencial de un campo vectorial, si ésta existe. Por ejemplo, si $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, al aplicar la función POTENTIAL se encuentra que:



Dado que la función SQ(x) representa x^2, esto resulta indica que la función potencial para el campo vectorial **F**(x,y,z) = x**i** + y**j** + z**k**, es ϕ(x,y,z) = $(x^2+y^2+z^2)/2$.

Note que las condiciones para la existencia de ϕ(x,y,z), a saber, f = $\partial\phi/\partial x$, g = $\partial\phi/\partial y$, h = $\partial\phi/\partial z$, ser equivalente a las condiciones: $\partial f/\partial y = \partial g/\partial x$, $\partial f/\partial z = \partial h/\partial x$, $\partial g/\partial z = \partial h/\partial y$. Estas condiciones proporcionan una manera rápida de determinarse si el campo del vector tiene una función potencial asociada. Si una de las condiciones $\partial f/\partial y = \partial g/\partial x$, $\partial f/\partial z = \partial h/\partial x$, $\partial g/\partial z = \partial h/\partial y$, no se cumple, no existe la función potencial ϕ(x,y,z). En tal caso, la función POTENTIAL produce un mensaje indicando un error. Por ejemplo, el campo vectorial **F**(x,y,z) = (x+y)**i** + (x-y+z)**j** + xz**k**, no tiene una función potencial asociada, dado que $\partial f/\partial z \neq \partial h/\partial x$. La respuesta de la calculadora en este caso se muestra a continuación:



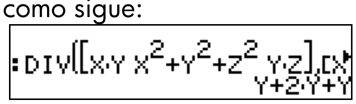


Divergencia

La divergencia de una función vectorial, **F**(x,y,z) = f(x,y,z)**i** +g(x,y,z)**j** +h(x,y,z)**k**, es definida tomando un "producto punto" del operador del con la función, es decir,

$$divF = \nabla \bullet F = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

La función DIV se puede utilizar para calcular la divergencia de un campo vectorial. Por ejemplo, para **F**(X,Y,Z) = [XY,$X^2+Y^2+Z^2$,YZ], la divergencia se calcula, en modo ALG, como sigue:

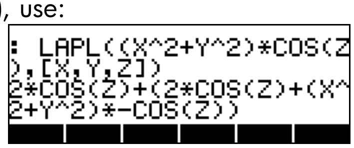


Laplaciano

La divergencia del gradiente de una función escalar produce a operador llamado el operador Laplaciano. Así, el Laplaciano de una función escalar $\phi(x,y,z)$ resulta ser

$$\nabla^2\phi = \nabla \bullet \nabla\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

La ecuación diferencial parcial $\nabla^2\phi = 0$ se conoce como la ecuación de Laplace. La función LAPL se puede utilizar para calcular el Laplaciano de una función escalar. Por ejemplo, para calcular el Laplaciano de la función $\phi(X,Y,Z) = (X^2+Y^2)\cos(Z)$, use:



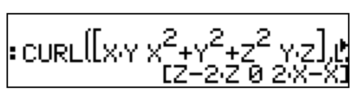
Rotacional (Curl)

El rotacional de un campo vectorial **F**(x,y,z) = f(x,y,z)**i**+g(x,y,z)**j**+h(x,y,z)**k**, es definido por un "producto cruz" del operador del con el campo vectorial, es decir,

$$curl\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}[\;] & \dfrac{\partial}{\partial y}[\;] & \dfrac{\partial}{\partial z}[\;] \\ f(x,y,z) & g(x,y,z) & h(x,y,z) \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)$$

El rotacional de un campo vectorial puede calcularse con la función CURL. Por ejemplo, para la función **F**(X,Y,Z) = [XY,$X^2+Y^2+Z^2$,YZ], se calcula el rotacional como sigue:



Campos irrotacionales y la función potencial

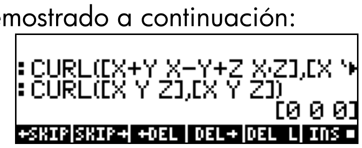
En una sección anterior en este capítulo introdujimos la función POTENTIAL para calcular la función potencial $\phi(x,y,z)$ de un campo vectorial, **F**(x,y,z) = f(x,y,z)**i**+ g(x,y,z)**j**+ h(x,y,z)**k**, tal que **F** = grad $\phi = \nabla\phi$. También indicamos que las condiciones para la existencia de ϕ son: $\partial f/\partial y = \partial g/\partial x$, $\partial f/\partial z = \partial h/\partial x$, $\partial g/\partial z = \partial h/\partial y$. Estas condiciones son equivalentes a la expresión vectorial:

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = 0.$$

Un campo vectorial **F**(x,y,z), con rotacional cero, se conoce como un campo irrotacional. Así, concluimos que una función potencial $\phi(x,y,z)$ existe siempre para un campo irrotational **F**(x,y,z).

Como ilustración, en un ejemplo anterior procuramos encontrar una función potencial para el campo del vector **F**(x,y,z) = (x+y)**i** + (x-y+z)**j** + xz**k**, y obtuvimos un mensaje de error de la función POTENTIAL. Para verificar que este sea un campo rotacional (i.e., $\nabla\times\mathbf{F} \neq 0$), usamos la función CURL aplicada a este campo:

Por otra parte, el campo vectorial **F**(x,y,z) = **xi** + y**j** + z**k**, es de hecho irrotational según lo demostrado a continuación:

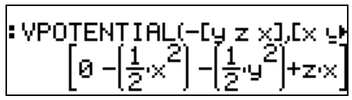


Potencial vectorial

Dado un campo vectorial **F**(x,y,z) = f(x,y,z)**i**+g(x,y,z)**j**+h(x,y,z)**k**, si existe una función vectorial $\Phi(x,y,z) = \phi(x,y,z)$**i**+$\psi(x,y,z)$**j**+$\eta(x,y,z)$**k**, tal que **F** = curl $\Phi = \nabla\times\Phi$, la función $\Phi(x,y,z)$ se conoce como un potencial vectorial de **F**(x,y,z).

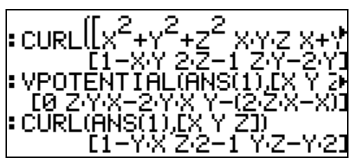
La calculadora proporciona la función VPOTENTIAL, disponible a través del catálogo de funciones (CAT), para calcular el potencial vectorial,

Φ(x,y,z), dado el campo vectorial, **F**(x,y,z) = f(x,y,z)**i**+g(x,y,z)**j**+h(x,y,z)**k**. Por ejemplo, dado el campo vectorial, **F**(x,y,z) = -(y**i**+z**j**+x**k**), la función VPOTENTIAL produce el resultado siguiente:



es decir, $\Phi(x,y,z) = -x^2/2$**j** + $(-y^2/2+zx)$**k**.

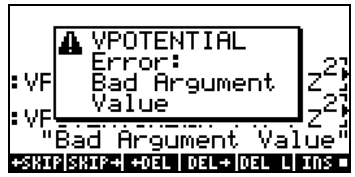
Debe ser indicado que hay más de un potencial vectorial Φ posible para un campo vectorial dado **F**. Por ejemplo, la siguiente pantalla muestra que el rotacional de la función vectorial $\Phi_1 = [X^2+Y^2+Z^2,XYZ,X+Y+Z]$ es el vector **F** = $\nabla\times\ \Phi_2$ = [1-XY,2Z-1,ZY-2Y]. La aplicación de la función VPOTENTIAL produce la función potencial vectorial Φ_2 = [0, ZYX-2YX, Y-(2ZX-X)], la cual es diferente de Φ_1. La última instrucción en la pantalla muestra que **F** = $\nabla\times\ \Phi_2$. Así pues, una función potencial vectorial no se determina únicamente para este caso.



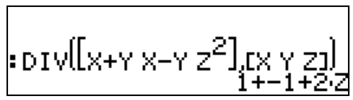
Las componentes de una función vectorial, **F**(x,y,z) = f(x,y,z)**i**+g(x,y,z)**j** +h(x,y,z)**k**, y las de la función potencial vectorial, Φ(x,y,z) = ϕ(x,y,z)**i**+ψ(x,y,z)**j**+η(x,y,z)**k**, se relacionan de la siguiente manera:

$$f = \partial\eta/\partial y - \partial\psi/\partial x,\ g = \partial\phi/\partial z - \partial\eta/\partial x,\ h = \partial\psi/\partial x - \partial\phi/\partial y.$$

Una condición para que exista la función Φ(x,y,z) es que div **F** = $\nabla\bullet$**F** = 0, es decir, $\partial f/\partial x + \partial g/\partial y + \partial f/\partial z = 0$. Por lo tanto, si esta condición no se satisface, la función potencial vectorial Φ(x,y,z) no existe. Por ejemplo, dada la función vectorial **F** = [X+Y,X-Y,Z^2], la función VPOTENTIAL produce un mensaje de error, dado que **F** no satisface la condición $\nabla\bullet$**F** = 0:

La condición ∇•**F** ≠ 0 se verifica en la siguiente pantalla:



Capítulo 16
Ecuaciones Diferenciales

En este Capítulo se presentan ejemplos de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) utilizando funciones de la calculadora. Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra derivadas de la variable independiente. En la mayoría de los casos, se busca una función dependiente que satisface la ecuación diferencial.

Operaciones básicas con ecuaciones diferenciales

En esta sección presentamos algunas aplicaciones de la calculadora para incorporar, comprobar y visualizar la solución de EDOs.

Escritura de ecuaciones diferenciales

La clave para usar ecuaciones diferenciales en la calculadora consiste en escribir las derivadas en la ecuación. La manera más fácil de producir una ecuación diferencial es escribiéndola en el escritor de ecuaciones. Por ejemplo, para escribir la siguiente EDO:
(x-1)·(dy(x)/dx)^2 + 2·x·y(x) = e^x sin x, use:

[↱] EQW [↰] () [ALPHA] [↰] [X] [−] [1] [▶] [▶] [▶] [×] [↱] ∂ [ALPHA] [↰] [X]
[▶] [ALPHA] [↰] [Y] [↰] () [ALPHA] [↰] [X] [▶] [▶] [Y^x] [2] [▶] [▶] [+] [2] [×]
[ALPHA] [↰] [X] [×] [ALPHA] [↰] [Y] [↰] () [ALPHA] [↰] [X] [▶] [▶] [▶] [▶]
[↱] = [↰] e^x [ALPHA] [↰] [X] [▶] [×] [SIN] [ALPHA] [↰] [X] [ENTER]

La derivada dy/dx se representa por `∂x(y(x))` o por `d1y(x)`. Para los propósitos de la solución o del cálculo, es necesario escribir y(x) en la expresión, es decir, la variable dependiente debe incluir su variable (o variables) independiente en las derivadas en la ecuación.

Usted puede también escribir una ecuación directamente en la pantalla usando el símbolo de derivada. Por ejemplo, para escribir la siguiente EDO que involucra derivadas de segundo orden: d^{2}u(x)/dx^2 + 3·u(x)·(du(x)/dx) + u(x)^2 = 1/x, directamente en la pantalla, use:

['] [↱] ∂ [ALPHA] [↰] [X] [↰] () [↱] ∂ [ALPHA] [↰] [X] [↰] () [ALPHA] [↰] [U]
[↰] () [ALPHA] [↰] [X] [▶] [▶] [▶] [+] [3] [×] [ALPHA] [↰] [U] [↰] ()
[ALPHA] [↰] [X] [▶] [×] [↱] ∂ [ALPHA] [↰] [X] [↰] () [ALPHA] [↰] [U] [↰] ()

ALPHA ← X ▶ ▶ + ALPHA ← U ← () ALPHA ← X ▶ Y^x 2
→ = / ÷ ALPHA ← X ENTER

El resultado es ‘∂x(∂x(u(x)))+3*u(x)*∂x(u(x))+u^2=1/x ’. Este formato muestra se muestra en la pantalla cuando la opción _Textbook no está seleccionada para la pantalla (MODE DISP). Presione ▼ para ver la ecuación en el Escritor de ecuaciones.

Una notación alternativa para los derivados escritas directamente en la pantalla es el uso de ‘d1’ para la derivada con respecto a la primera variable independiente, ‘d2’ para la derivada con respecto a la segunda variable independiente, etc. Una derivada de segundo orden, por ejemplo, d^2x/dt^2, con x = x(t), se escribe como ‘d1d1x(t)’, mientras que $(dx/dt)^2$ se escribe como ‘d1x(t)^2’. Por lo tanto, la EDP $\partial^2 y/\partial t^2 - g(x,y)\cdot (\partial^2 y/\partial x^2)^2 = r(x,y)$, se escribiría, usar esta notación, as ‘d2d2y(x,t)-g(x,y)*d1d1y(x,t)^2=r(x,y)’.

La notación que usa ‘d’ y la orden de la variable independiente es la notación preferida por la calculadora cuando los derivados están implicados en un cálculo. Por ejemplo, usando la función DERIV, en modo de ALG, como se muestra a continuación, DERIV(‘x*f(x,t)+g(t,y) = h(x,y,t)’,t), produce la expresión siguiente:‘x*d2f(x,t)+d1g(t,y)=d3h(x,y,t)’. Traducida al papel, esta expresión representa la ecuación diferencial parcial $x\cdot(\partial f/\partial t) + \partial g/\partial t = \partial h/\partial t$.

Porque la orden de la variable t es diferente en f(x,t), g(t,y), y h(x,y,t), las derivadas con respecto a t tienen diversos índices, es decir, d2f(x,t), d1g(t,y), y d3h(x,y,t). Todos, sin embargo, representan derivadas con respecto a la misma variable.

Expresiones para las derivadas que usan la notación del orden de la variable no se traducen a la notación de derivadas en el escritor de ecuaciones, como usted puede comprobar presionando ▼ cuando el resultado anterior está en nivel 1. Sin embargo, la calculadora entiende ambas notaciones y opera propiamente sin importar la notación usada.

Comprobación de soluciones en la calculadora

Para comprobar si una función satisface cierta ecuación usando la calculadora, use la función SUBST (ver el capítulo 5) substituya la solución en la forma 'y = f(x)' o 'y = f(x,t)', etc., en la ecuación diferencial. Puede ser que Usted necesite simplificar el resultado usando la función EVAL para verificar la solución. Por ejemplo, compruebe que u = A sin $\omega_o t$ es una solución de la ecuación $d^2u/dt^2 + \omega_o{}^2 \cdot u = 0$, usando:

En modo ALG:

SUBST('∂t(∂t(u(t)))+ ω0^2*u(t) = 0','u(t)=A*SIN (ω0*t)') ENTER

EVAL(ANS(1)) ENTER

En modo RPN:

'∂t(∂t(u(t)))+ ω0^2*u(t) = 0' ENTER 'u(t)=A*SIN (ω0*t)' ENTER

SUBST EVAL

El resultado es '0=0'.

Para este ejemplo, usted podría también utilizar: '∂t(∂t(u(t))))+ ω0^2*u(t) = 0' para escribir la ecuación diferencial.

Visualización de soluciones con gráficas de pendientes

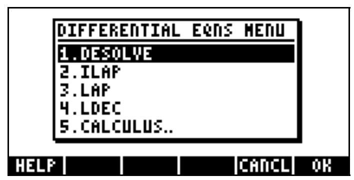
Las gráficas de pendientes, presentadas en el capítulo 12, se utilizan para visualizar las soluciones a una ecuación diferencial de la forma dy/dx = f(x,y). La gráfica de pendientes muestran segmentos tangenciales a las curvas de la solución, y = f(x). La pendiente de los segmentos en cualquier punto (x,y) dada por dy/dx = f(x,y), evaluada en el punto (x,y), representa la pendiente de la línea tangente en el punto (x,y).

Ejemplo 1 – Trace la solución a la ecuación diferencial y' = f(x,y) = sin x cos y, usar una gráfica de pendientes. Para solucionar este problema, siga las instrucciones en el capítulo 12 para gráficas *slopefield*.

Si usted pudiera reproducir la gráfica de pendientes en el papel, se podría trazar a mano las líneas tangentes a los segmentos mostrados en el diagrama. Esto alinea constituye líneas de y(x,y) =constante, para la solución de y' = f(x,y). Por lo tanto, las gráficas de pendientes son herramientas útiles para visualizar las curvas y = g(x) que corresponden a ecuaciones difíciles de resolver analíticamente.

El menú CALC/DIFF

El sub-menú DIFFERENTIAL EQNS.. dentro del menú CALC (⇦ CALC) provee funciones para la solución de las ecuaciones diferenciales. El menú CALC/DIFF que resulta cuando la opción CHOOSE boxes se selecciona para la señal de sistema 117 es el siguiente:



Estas funciones se describen brevemente a continuación. Las funciones se describen en forma detallada más adelante en este Capítulo.

DESOLVE: Función para resolver ecuaciones diferenciales, de ser posible
ILAP: Transformada inversa de Laplace, $L^{-1}[F(s)] = f(t)$
LAP: Transformada de Laplace, $L[f(t)]=F(s)$
LDEC: Función para resolver ecuaciones diferenciales lineales

Solución de las ecuaciones lineales y no lineales

Una ecuación en la cual la variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado se conoce como una <u>ecuación diferencial lineal</u>. De no ser así, la ecuación se dice que es <u>no lineal</u>. Ejemplos de ecuaciones diferenciales lineales son: $d^2x/dt^2 + \beta\cdot(dx/dt) + \omega_o\cdot x = A \sin \omega_f t$, y $\partial C/\partial t + u\cdot(\partial C/\partial x) = D\cdot(\partial^2 C/\partial x^2)$.

Una ecuación cuyo lado derecho (sin involucrar la función o sus derivadas) es igual a cero se llama una ecuación homogénea. Si no, se llama no homogénea. La solución a la ecuación homogénea se conoce como solución general. Una solución particular es una que satisface la ecuación no homogénea.

La función LDEC

La calculadora provee la función LDEC para determinar la solución general de una EDO lineal de cualquier orden con coeficientes constantes, ya sea que la EDO es homogénea o no. Esta función requiere dos argumentos

- El lado derecho de la EDO
- La ecuación característica de la EDO

Estos dos argumentos deberás escribirse en términos de la variable del CAS (usualmente X). El resultado de la función es la solución general de la EDO. Los ejemplos mostrados a continuación se ejecutan en el modo RPN:

<u>Ejemplo 1</u> – Resuélvase la EDO homogénea d^3y/dx^3-4·(d^2y/dx^2)-11·(dy/dx)+30·y = 0. Escríbase:

`0` ENTER `'X^3-4*X^2-11*X+30'` ENTER `LDEC`

La solución es (esta figura se construyó a partir de figuras del escritor de ecuaciones, EQW):

$$\frac{(120\cdot cC0+16\cdot cC1-8\cdot cC2)\cdot e^{3\cdot X}\cdot e^{2\cdot X}-\left((30\cdot cC0-(5\cdot cC1+8\cdot cC2))\cdot e^{5\cdot X}\cdot e^{3\cdot X}-(30\cdot cC0-(21\cdot cC1-3\cdot cC2))\right)}{120\cdot e^{3\cdot X}}$$

en la cual cC0, cC1, y cC2 son constantes de integración. Este resultado puede re-escribirse como:

$$y = K_1\cdot e^{-3x} + K_2\cdot e^{5x} + K_3\cdot e^{2x}.$$

La razón por la que el resultado proveído por LDEC muestra tan complicada combinación de constantes es que, internamente, para producir la solución, LDEC utiliza transformadas de Laplace (a ser presentadas más adelante en este capítulo), las cuáles transforman la solución de una EDO en una solución algebraica. La combinación de constantes resulta al factorizar los términos exponenciales después obtener la solución por transformada de Laplace.

<u>Ejemplo 2</u> – Utilizando la función LDEC, resuélvase la EDO no homogénea:

$$d^3y/dx^3\text{-}4\cdot(d^2y/dx^2)\text{-}11\cdot(dy/dx)+30\cdot y = x^2.$$

Escríbase:

`'X^2'` ENTER `'X^3-4*X^2-11*X+30'` ENTER `LDEC`

La solución es:

$$-\frac{750\cdot cC0-(125\cdot cC1+125\cdot cC2+2)}{3000}\cdot e^{5\cdot X}+\frac{270\cdot cC0-(189\cdot cC1-(27\cdot cC2-2))}{1080}\cdot e\cdot e^{-(3\cdot X)}+\frac{450\cdot X^2+330\cdot X+241}{13500}\cdot e^{(}$$

Substituyendo la combinación de las constantes que acompañan los términos exponenciales por valores más simples, la expresión se puede simplificar a

$$y = K_1\cdot e^{-3x} + K_2\cdot e^{5x} + K_3\cdot e^{2x} + (450\cdot x^2+330\cdot x+241)/13500.$$

Reconocemos los primeros tres términos como la solución general de la ecuación homogénea (ver el ejemplo 1, arriba). Si y_h representa la solución a la ecuación homogénea, es decir., $y_h = K_1\cdot e^{-3x} + K_2\cdot e^{5x} + K_3\cdot e^{2x}$. Usted puede probar que los términos restantes en la solución demostrada anteriormente, es decir, $y_p = (450\cdot x^2+330\cdot x+241)/13500$, constituir una solución particular del EDO.

Nota: Este resultado es general para toda EDO linear no homogéneo, es decir, dado la solución de la ecuación homogénea, $y_h(x)$, la solución de la ecuación no homogénea correspondiente, $y(x)$, puede ser escrito como

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

en la cual $y_p(x)$ está una solución particular a la EDO.

Para verificar que $y_p = (450\cdot x^2+330\cdot x+241)/13500$, es en realidad una solución particular de la EDO, use:

```
'd1d1d1Y(X)-4*d1d1Y(X)-11*d1Y(X)+30*Y(X) = X^2' ENTER
'Y(X)=(450*X^2+330*X+241)/13500' ENTER
SUBST  EVAL
```

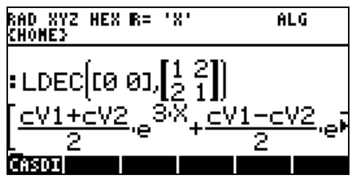
No prohibir a calculadora cerca de diez segundos para producir el resultado: 'X^2 = X^2'.

<u>Ejemplo 3</u> - Solucionar un sistema de ecuaciones diferenciales lineares con coeficientes constantes. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales lineares:

$$x_1'(t) + 2x_2'(t) = 0,$$
$$2x_1'(t) + x_2'(t) = 0.$$

En forma algebraica, se escribe esto como: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}'(t) = 0$, donde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

El sistema puede ser solucionado usando la función LDEC con argumentos [0,0] y la matriz A, según lo demostrado al usar siguiente de la pantalla usando el modo ALG:



La solución se da como un vector que contiene las funciones [$x_1(t)$, $x_2(t)$]. Al presionar activará el escritor de matrices permite que el usuario vea los dos componentes del vector. Para ver todos los detalles de cada componente, presione la tecla EDIT. Verificar que sean los componentes:

La función DESOLVE

La calculadora provee la función DESOLVE para resolver cierto tipo de ecuaciones diferenciales. La función requiere como argumentos la ecuación diferencial y el nombre de la función incógnita. La función DESOLVE produce la solución a la ecuación diferencial, de ser posible. Uno puede también proveer como primer argumento de la función DESOLVE un vector que contenga la ecuación diferencial y las condiciones iniciales del problema, en vez de proveer solamente una ecuación diferencial. La función DESOLVE está disponible en el menú CALC/DIFF. Ejemplos de aplicaciones de la función DESOLVE se muestran a continuación utilizando el modo RPN.

Ejemplo 1 – Resuélvase la EDO de primer orden:

$$dy/dx + x^2\cdot y(x) = 5.$$

Escríbase en la calculadora:

'd1y(x)+x^2*y(x)=5' ENTER 'y(x)' ENTER DESOLVE

La solución proveída es

{‘y = (INT(5*EXP(xt^3/3),xt,x)+C0)*1/EXP(x^3/3))’ }, es decir,

$$y(x) = \exp(-x^3/3) \cdot \left(\int 5 \cdot \exp(x^3/3) \cdot dx + C_0 \right)$$

La variable ODETYPE

Nótese la existencia de una nueva variable denominada ODETY (ODETYPE). Esta variable se produce al utilizar la función DESOLVE y contiene una cadena de caracteres que identifican el tipo de EDO utilizada como argumento de la función DESOLVE. Presiónese la tecla de menú ODETY para obtener el texto “`1st order linear`” (lineal de primer orden).

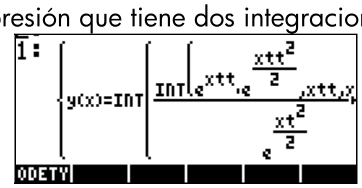
<u>Ejemplo 2</u> – Resolver la EDO de segundo order:

$$d^2y/dx^2 + x\ (dy/dx) = \exp(x).$$

En la calculadora, use:

‘d1d1y(x)+x*d1y(x) = EXP(x)’ ENTER ‘y(x)’ ENTER DESOLVE

El resultado es una expresión que tiene dos integraciones implícitas, a saber,



Para esta ecuación particular, sin embargo, realizamos que el lado izquierdo de la ecuación representa d/dx(x dy/dx), así, la EDO ahora se escribe:

d/dx(x dy/dx) = exp x,

y

x dy/dx = exp x + C.

Después, podemos escribir

$$dy/dx = (C + \exp x)/x = C/x + e^x/x.$$

En la calculadora, usted puede intentar integrar:

‘d1y(x) = (C + EXP(x))/x’ ENTER ‘y(x)’ ENTER DESOLVE

El resultado es { ‘y(x) = INT((EXP(xt)+C)/xt,xt,x)+C0’ }, es decir,

$$y(x) = \int \cdot \frac{e^x + C}{x} dx + C_0$$

Realizando la integración a mano, podemos llevarla solamente hasta:

$$y(x) = \int \cdot \frac{e^x}{x} dx + C \cdot \ln x + C_0$$

porque el integral de exp(x)/x no está disponible en forma cerrada.

Ejemplo 3 – Resuélvase la siguiente ecuación sujeta a condiciones iniciales. La ecuación es

$$d^2y/dt^2 + 5y = 2 \cos(t/2),$$

sujeta a las condiciones

$$y(0) = 1.2,\ y'(0) = -0.5.$$

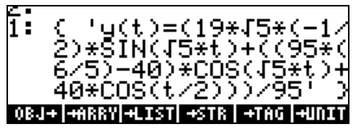
En la calculadora, utilícese

[‘d1d1y(t)+5*y(t) = 2*COS(t/2)’ ‘y(0) = 6/5’ ‘d1y(0) = -1/2’] ENTER
‘y(t)’ ENTER
DESOLVE

Nótese que las condiciones iniciales se definen con valores exactos, es decir, ‘y(0) = 6/5’, en lugar de ‘y(0)=1.2’, y ‘d1y(0) = -1/2’, en vez de ‘d1y(0) = -0.5’. El utilizar expresiones exactas facilita la solución.

Note: Para obtener expresiones fraccionarias para valores decimales utilícese la función →Q (véase el Capítulo 5).

La solución en este caso es:



Presiónese EVAL EVAL para simplificar el resultado y obtener:

'y(t) = -((19*√5*SIN(√5*t)-(148*COS(√5*t)+80*COS(t/2)))/190)'.

Transformadas de Laplace

La transformada de Laplace de una función f(t) produce una función F(s) in el dominio imagen que puede utilizarse para encontrar, a través de métodos algebraicos, la solución de una ecuación diferencial lineal que involucra a la función f(t). Los pasos necesarios para este tipo de solución son los siguientes:

1. Utilizando la transformada de Laplace se convierte la EDO lineal que involucra a f(t) a una ecuación algebraica equivalente.
2. La incógnita de esta ecuación algebraica, F(s), se despeja en el dominio imagen a través de la manipulación algebraica.
3. Se utiliza una transformada inversa de Laplace para convertir la función imagen obtenida en el paso anterior a la solución de la ecuación diferencial que involucra a f(t).

Definiciones

La <u>Transformada de Laplace</u> para la función f(t) es la función F(s) definida como

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}\,dt.$$

La variable imagen s puede ser, y, generalmente es, un número complejo.

Muchos usos prácticos de transformadas de Laplace involucran una función original f(t) donde t representa tiempo, por ejemplo, sistemas de control en

circuitos eléctricos o hidráulicos. En la mayoría de los casos uno está interesado en la respuesta de sistema después del tiempo t>0, así, la definición de la transformada de Laplace, presentada anteriormente, implica una integración para los valores de t mayores que cero.
La <u>transformada inversa de Laplace</u> relaciona la función F(s) con la función original f(t) en el dominio del tiempo, es decir, $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

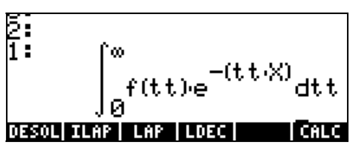
La integral de convolución o el producto de la convolución de dos funciones f(t) y g(t), donde g se desfasa en el tiempo, se define como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u) \cdot g(t-u) \cdot du \,.$$

Transformadas de Laplace y sus inversas en la calculadora

La calculadora provee las funciones LAP y ILAP para calcular transformadas de Laplace y transformadas inversas de Laplace, respectivamente, de una función f(VX), en la cual VX es la variable independiente del CAS (usualmente 'X'). La calculadora produce la transformada de Laplace o la inversa como una la función de X. Las funciones LAP y ILAP se encuentran disponibles en el menú CALC/DIFF. Los ejemplos siguientes se presentan en modo RPN. Su conversión a modo ALG es relativamente simple.

<u>Ejemplo 1</u> – Para obtener la definición de la transformada de Laplace en la calculadora utilícense las siguientes instrucciones: 'f(X)' ENTER LAP en modo RPN, o LAP(F(X))modo ALG. La calculadora produce los resultados siguientes (modo RPN, a la izquierda; modo ALG, a la derecha):



Compare estas expresiones con la definición siguiente:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt,$$

Nótese que en la definición de la calculadora la variable CAS, X, en la pantalla reemplaza a la variable s in esta definición. Por lo tanto, cuando se utiliza la función LAP se obtiene una función de X que representa la transformada de Laplace de f(X).

Ejemplo 2 – Determine la Transformada de Laplace de $f(t) = e^{2t}\cdot\sin(t)$. Use: 'EXP(2*X)*SIN(X)' ENTER LAP La calculadora produce el resultado: 1/(SQ(X-2)+1). Presione EVAL para obtener, 1/(X^2-4X+5).

Cuando usted traduce este resultado en papel resulta en:

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{2t}\cdot\sin t\} = \frac{1}{s^2 - 4\cdot s + 5}$$

Ejemplo 3 – Determine la transformada inversa de Laplace de F(s) = sin(s). Use:
'SIN(X)' ENTER ILAP. La calculadora toma algunos segundos para producir el resultado: 'ILAP(SIN(X))', significando que no hay expresión de forma cerrada f(t), tal que $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\sin(s)\}$.

Ejemplo 4 – Determine la transformada inversa de Laplace de $F(s) = 1/s^3$. Use:
'1/X^3' ENTER ILAP EVAL. La calculadora produce el resultado: 'X^2/2', que se interpreta como $\mathcal{L}^{-1}\{1/s^3\} = t^2/2$.

Ejemplo 5 – Determine la Transformada de Laplace de la función f(t) = cos (a·t+b). Use: 'COS(a*X+b)' ENTER LAP . La calculadora da por resultado:

$$\frac{X}{SQ(X)+SQ(a)}\cdot COS(b) - SIN(b)\cdot\frac{a}{SQ(X)+SQ(a)}$$

Presione EVAL para obtener –(a sin(b) – X cos(b))/(X^2+a^2). La transformada se interpreta como: $\mathcal{L}\{\cos(a\cdot t+b)\} = (s\cdot\cos b - a\cdot\sin b)/(s^2+a^2)$.

Teoremas de las transformadas de Laplace

Para ayudarle a determinar al Transformada de Laplace de funciones usted puede utilizar un número de teoremas, algunos de los cuales se enumeran abajo. Algunos ejemplos de los usos del teorema también se incluyen.

- Teorema de la diferenciación de la primera derivada. Sea f_o la condición inicial para f(t), es decir, $f(0) = f_o$, entonces

$$L\{df/dt\} = s\cdot F(s) - f_o.$$

Ejemplo 1 – La velocidad de una partícula móvil v(t) se define como v(t) = dr/dt, donde r = r(t) es la posición de la partícula. Sea $r_o = r(0)$, y R(s) =L{r(t)}, entonces, la transformada de la velocidad se puede escribir como $V(s) = L\{v(t)\}=L\{dr/dt\}= s\cdot R(s)-r_o$.

- Teorema de la diferenciación para la segunda derivada. Sea $f_o = f(0)$, y $(df/dt)_o = df/dt|_{t=0}$, entonces $L\{d^2f/dt^2\} = s^2\cdot F(s) - s\cdot f_o - (df/dt)_o$.

Ejemplo 2 – Como continuación al Ejemplo 1, la aceleración a(t) se define como $a(t) = d^2r/dt^2$. Si es la velocidad inicial $v_o = v(0) = dr/dt|_{t=0}$, entonces la transformada de Laplace de la aceleración puede ser escrito como: $A(s) = L\{a(t)\} = L\{d^2r/dt^2\}= s^2\cdot R(s) - s\cdot r_o - v_o$.

- Teorema de la diferenciación para la n derivada.
  Sea $f^{(k)}_o = d^kf/dx^k|_{t = 0}$, y $f_o = f(0)$, entonces

$$L\{d^nf/dt^n\} = s^n\cdot F(s) - s^{n-1}\cdot f_o -\ldots- s\cdot f^{(n-2)}_o - f^{(n-1)}_o.$$

- Teorema de las linealidad. $L\{af(t)+bg(t)\} = a\cdot L\{f(t)\} + b\cdot L\{g(t)\}$.

- Teorema de la diferenciación para la función imagen. Sea F(s) = L{f(t)}, entonces $d^nF/ds^n = L\{(-t)^n\cdot f(t)\}$.

Ejemplo 3 – Sea $f(t) = e^{-at}$, usando la calculadora con 'EXP(-a*X)' ENTER LAP, usted consigue '1/(X+a)', o F(s) = 1/(s+a). La tercera derivada de esta expresión puede ser calculada usando: 'X' ENTER ↱ ∂ 'X' ENTER ↱ ∂ 'X' ENTER ↱ ∂ EVAL

El resultado es

'-6/(X^4+4*a*X^3+6*a^2*X^2+4*a^3*X+a^4)', o

$d^3F/ds^3 = -6/(s^4+4\cdot a\cdot s^3+6\cdot a^2\cdot s^2+4\cdot a^3\cdot s+a^4)$.

Ahora, use '(-X)^3*EXP(-a*X)' ENTER LAP EVAL. El resultado es exactamente el mismo.

- teorema de la integración. Sea F(s) = L{f(t)}, entonces

$$\mathrm{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}\cdot F(s).$$

- teorema de la circunvolución. Sea F(s) = L{f(t)} y G(s) = L{g(t)}, entonces

$$\mathrm{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\} = \mathrm{L}\{(f*g)(t)\} =$$

$$\mathrm{L}\{f(t)\}\cdot \mathrm{L}\{g(t)\} = F(s)\cdot G(s)$$

Ejemplo 4 – Con el teorema de la circunvolución, encuentre la transformada de Laplace de (f*g)(t), si f(t) = sin(t), y g(t) = exp(t). Para encontrar F(s) = L{f(t)}, y G(s) = L{g(t)}, use: 'SIN(X)' ENTER LAP EVAL. Resultado, '1/(X^2+1)', es decir, $F(s) = 1/(s^2+1)$.
Así mismo, 'EXP(X)' ENTER LAP. Resultado, '1/(X-1)', es decir, G(s) = 1/(s-1).
Por lo tanto, $L\{(f*g)(t)\} = F(s)\cdot G(s) = 1/(s^2+1)\cdot 1/(s-1) = 1/((s-1)(s^2+1)) = 1/(s^3-s^2+s-1)$.

- Teorema del desfase para desfase a la derecha. Sea F(s) = L{f(t)}, entonces

$$L\{f(t-a)\}=e^{-as}\cdot L\{f(t)\} = e^{-as}\cdot F(s).$$

- Teorema del desfase para desfase a la izquierda. Sea F(s) = L{f(t)}, y a >0, entonces

$$\mathrm{L}\{f(t+a)\} = e^{as}\cdot\left(F(s) - \int_0^a f(t)\cdot e^{-st}\cdot dt\right).$$

- Teorema de la semejanza. Sea F(s) = L{f(t)}, y a>0, entonces L{f(a·t)} = (1/a)·F(s/a).
- Teorema de amortiguación. Sea F(s) = L{f(t)}, entonces L{e^{-bt}·f(t)} = F(s+b).
- Teorema de la división. Sea F(s) = L{f(t)}, entonces

$$\mathrm{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)du.$$

- Transformada de Laplace de una función periódica de período T:

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \cdot \int_0^T f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt.$$

- Teorema del límite par el valor inicial: Sea F(s) = L{f(t)}, entonces

$$f_0 = \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} [s \cdot F(s)].$$

- Teorema del límite para el valor final : Sea F(s) = L{f(t)}, entonces

$$f_{\infty} = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} [s \cdot F(s)].$$

Función delta de Dirac y función grada de Heaviside

En el análisis de los sistemas de control se acostumbra utilizar cierto tipo de funciones que representan ocurrencias físicas tales como la activación repentina de un interruptor (La función grada de Heaviside, H(t)) o un pico repentino, instantáneo, en una entrada al sistema (La función delta de Dirac, δ(t)). Éstas funciones pertenecen a una clase de las funciones conocidas como funciones generalizadas o simbólicas [por ejemplo, ver Friedman, B., 1956, Principles and Techniques of Applied Mathematics, Dover Publications Inc., New York (reimpresión de 1990)].

La definición formal de la función delta de Dirac, δ(x), es δ(x) = 0, para x ≠0, y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.0.$$

Así mismo, si f(x) es una función continua, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0).$$

Una interpretación para el integral arriba, parafraseada de Friedman (1990), es que la función δ "selecciona" el valor de la función f(x) para x = x_0. La función delta de Dirac es representada típicamente por una flecha ascendente en el punto x = x0, indicando que la función tiene un valor diferente a cero solamente en ese valor particular de x_0.

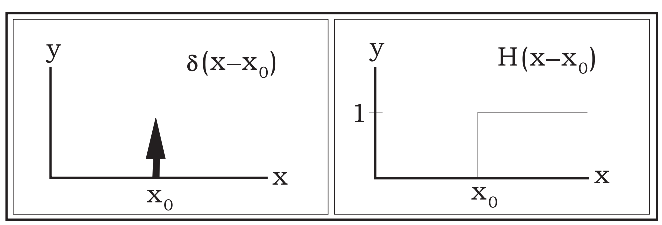
La función grada de Heaviside, H(x), se define como

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

También, para una función continua f(x),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)H(x-x_0)dx = \int_{x_0}^{\infty} f(x)dx.$$

La función delta de Dirac y la función grada de Heaviside se relacionan por dH/dx = δ(x). Las dos funciones se ilustran en la figura abajo.



Se puede demostrar que L{H(t)} = 1/s,
Y que L{U_o·H(t)} = U_o/s,

donde U_o es una constante. También, $L^{-1}\{1/s\}=H(t)$,

y $L^{-1}\{ U_o /s\}= U_o\cdot H(t)$.

También, usando el teorema del desfase a la derecha, $L\{f(t-a)\}=e^{-as}\cdot L\{f(t)\} = e^{-as}\cdot F(s)$, podemos escribir $L\{H(t-k)\}=e^{-ks}\cdot L\{H(t)\} = e^{-ks}\cdot(1/s) = (1/s)\cdot e^{-ks}$.

Otro resultado importante, conocido como <u>el segundo teorema de desfase para desfase a la derecha</u>, se escribe $L^{-1}\{e^{-as}\cdot F(s)\}=f(t-a)\cdot H(t-a)$, con $F(s) = L\{f(t)\}$.

En la calculadora la función grada de Heaviside H(t) se refiere simplemente como '1'. Para comprobar la transformada en la calculadora use: `1` `ENTER` LAP. El resultado es '1/X', es decir, $L\{1\} = 1/s$. De manera similar, 'U0' `ENTER` LAP , produce el resultado 'U0/X', esto es, $L\{U_0\} = U_0/s$.

Usted puede obtener la función delta de Dirac en la calculadora usando: `1` `ENTER` ILAP

El resultado es 'Delta(X)'.

Este resultado es simplemente simbólico, es decir, usted no puede encontrar un valor numérico para, digamos, 'Delta(5)'.

Este resultado puede ser definido por la transformada de Laplace para la función delta de Dirac, dado que de $L^{-1}\{1.0\}= \delta(t)$, se sigue que $L\{\delta(t)\} = 1.0$

También, al usar teorema del desfase para desfase a la derecha, $L\{f(t-a)\}=e^{-as}\cdot L\{f(t)\} = e^{-as}\cdot F(s)$, podemos escribir $L\{\delta(t-k)\}=e^{-ks}\cdot L\{\delta(t)\} = e^{-ks}\cdot 1.0 = e^{-ks}$.

Aplicaciones de transformadas de Laplace en la solución de EDOs lineales

Al principio de la sección sobre Transformadas de Laplace indicamos que usted podría utilizar éstos transforma para convertir una EDO lineal en el dominio de tiempo a una ecuación algebraica en el dominio de la imagen. La ecuación que resulta entonces se despeja la función F(s) con métodos algebraicos, y la solución a la EDO se encuentra usando la transformada inversa de Laplace de F(s).

Los teoremas sobre las derivadas de una función, es decir,

$$L\{df/dt\} = s\cdot F(s) - f_o,$$

$$L\{d^2f/dt^2\} = s^2\cdot F(s) - s\cdot f_o – (df/dt)_o,$$

y, en general,

$$L\{d^nf/dt^n\} = s^n\cdot F(s) – s^{n-1}\cdot f_o –\ldots– s\cdot f^{(n-2)}_o – f^{(n-1)}_o,$$

son particularmente útiles en transformar la EDO en una ecuación algebraica.

Ejemplo 1 – Para solucionar la ecuación de primer orden,

$$dh/dt + k\cdot h(t) = a\cdot e^{–t},$$

usando Transformadas de Laplace, podemos escribir:

$$L\{dh/dt + k\cdot h(t)\} = L\{a\cdot e^{–t}\},$$

$$L\{dh/dt\} + k\cdot L\{h(t)\} = a\cdot L\{e^{–t}\}.$$

Nota: 'EXP(-X)' ENTER LAP , produce '1/(X+1)', es decir, $L\{e^{–t}\}=1/(s+1)$.

Con $H(s) = L\{h(t)\}$, y $L\{dh/dt\} = s\cdot H(s) - h_o$, donde $h_o = h(0)$, la ecuación transformada es $s\cdot H(s)-h_o+k\cdot H(s) = a/(s+1)$.

Utilizar la calculadora para despejar H(s), escribiendo:

'X*H-h0+k*H=a/(X+1)' ENTER 'H' ISOL

El resultado es 'H=((X+1)*h0+a)/(X^2+(k+1)*X+k)'.

Para encontrar la solución a la EDO, h(t), necesitamos utilizar la transformada inversa de Laplace, como sigue:

OBJ→ ◄ ◄ EVAL	Aísla el lado derecho de la última expresión
ILAP	Obtiene la transformada inversa de Laplace

El resultado es $\dfrac{a\cdot e^{k\cdot X}+((k-1)\cdot ho-a)\cdot e^{X}}{(k-1)\cdot e^{X}\cdot e^{k\cdot X}}$. Substituyendo X por t en esta expresión y simplificándolo, resulta en $h(t) = a/(k-1)\cdot e^{-t} +((k-1)\cdot h_o-a)/(k-1)\cdot e^{-kt}$.

Comprobar lo que la solución a la EDO ser si usted utiliza la función LDEC:

‘a*EXP(-X)’ ENTER ‘X+k’ ENTER LDEC EVAL

El resultado es: $\dfrac{a\cdot e^{k\cdot X}+((k-1)\cdot cC0-a)\cdot e^{X}}{(k-1)\cdot e^{X}\cdot e^{k\cdot X}}$, es decir,

$h(t) = a/(k-1)\cdot e^{-t} +((k-1)\cdot cC_o-a)/(k-1)\cdot e^{-kt}$.

Por lo tanto, cC0 en los resultados de LDEC representa la condición inicial h(0).

Nota: Al usar la función LDEC para solucionar un EDO lineal de orden n en f(X), el resultado será dado en términos de las n constantes cC0, cC1, cC2, …, cC(n-1), representando las condiciones iniciales f(0), f’(0), f”(0), …, $f^{(n-1)}$ (0).

Ejemplo 2 – Use Transformadas de Laplace para solucionar la ecuación lineal de segundo orden,

$$d^2y/dt^2+2y = \sin 3t.$$

Usando Transformadas de Laplace, podemos escribir:

$$L\{d^2y/dt^2+2y\} = L\{\sin 3t\},$$

$$L\{d^2y/dt^2\} + 2\cdot L\{y(t)\} = L\{\sin 3t\}.$$

Nota: ‘SIN(3*X)’ ENTER LAP EVAL produce ‘3/(X^2+9)’, es decir,
$L\{\sin 3t\}=3/(s^2+9)$.

Con Y(s) = L{y(t)}, y L{d^2y/dt^2} = $s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y_o - y_1$, donde y_o = h(0) y y_1 = h'(0), la ecuación transformada es

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y_o - y_1 + 2 \cdot Y(s) = 3/(s^2+9).$$

Use la calculadora para despejar Y(s), escribiendo:

'X^2*Y-X*y0-y1+2*Y=3/(X^2+9)' `ENTER` 'Y' ISOL

El resultado es

'Y=((X^2+9)*y1+(y0*X^3+9*y0*X+3))/(X^4+11*X^2+18)'.

Para resolver la EDO, y(t), necesitamos usar la transformada inversa de Laplace, como sigue:

OBJ→ `←` `←`	Aisla el lado derecho de la última expresión
ILAP`EVAL`	Obtiene transformada inversa de Laplace

El resultado es

$$\frac{(7\cdot\sqrt{2}\cdot y1+3\cdot\sqrt{2})\cdot SIN(\sqrt{2}\cdot X)+14\cdot y0\cdot COS(\sqrt{2}\cdot X)-2\cdot SIN(3\cdot X)}{14}$$

es decir,

$$y(t) = -(1/7) \sin 3x + y_o \cos \sqrt{2}x + (\sqrt{2}\,(7y_1+3)/14) \sin \sqrt{2}x.$$

Comprobar cuál sería la solución al EDO si usted utiliza la función LDEC:

'SIN(3*X)' `ENTER` 'X^2+2' `ENTER` LDEC `EVAL`

El resultado es:

$$\frac{(7\cdot\sqrt{2}\cdot cC1+3\cdot\sqrt{2})\cdot SIN(\sqrt{2}\cdot X)+14\cdot cC0\cdot COS(\sqrt{2}\cdot X)-2\cdot SIN(3\cdot X)}{14}$$

es decir, igual que antes con cC0 = y0 y cC1 = y1.

Nota: Usando los dos ejemplos demostrados aquí, podemos confirmar lo que indicamos anteriormente, es decir, que la función ILAP usa transformadas de Laplace y transformadas inversas para resolver EDOs dado el lado derecho de la ecuación y la ecuación característica de la EDO homogénea correspondiente.

Ejemplo 3 – Considere la ecuación

$$d^2y/dt^2+y = \delta(t-3),$$

donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac.

Usando transformadas de Laplace, podemos escribir:

$$L\{d^2y/dt^2+y\} = L\{\delta(t-3)\},$$

$$L\{d^2y/dt^2\} + L\{y(t)\} = L\{\delta(t-3)\}.$$

Con 'Delta(X-3)' ENTER LAP , la calculadora produce EXP(-3*X), es decir, $L\{\delta(t-3)\} = e^{-3s}$. Con $Y(s) = L\{y(t)\}$, y $L\{d^2y/dt^2\} = s^2\cdot Y(s) - s\cdot y_o - y_1$, donde $y_o = h(0)$ y $y_1 = h'(0)$, la ecuación transformada es $s^2\cdot Y(s) - s\cdot y_o - y_1 + Y(s) = e^{-3s}$. Use la calculadora para despejar Y(s), escribiendo:

'X^2*Y-X*y0-y1+Y=EXP(-3*X)' ENTER 'Y' ISOL

El resultado es 'Y=(X*y0+(y1+EXP(-(3*X))))/(X^2+1)'.

Para resolver la EDO, y(t), usaremos la transformada inversa de Laplace, como sigue:

OBJ→ ◄ ◄	Aísla el lado derecho de la última expresión
ILAP EVAL	Obtiene la transformada inversa de Laplace

El resultado es 'y1*SIN(X)+y0*COS(X)+SIN(X-3)*Heaviside(X-3)'.

Notas:
[1]. Una manera alternativa de obtener la transformada inversa de Laplace de la expresión '(X*y0+(y1+EXP(-(3*X))))/(X^2+1)' está separando la expresión en fracciones parciales, es decir,

'y0*X/(X^2+1) + y1/(X^2+1) + EXP(-3*X)/(X^2+1)', y utilice el teorema de linealidad de la transformada inversa de Laplace

$$L^{-1}\{a\cdot F(s)+b\cdot G(s)\} = a\cdot L^{-1}\{F(s)\} + b\cdot L^{-1}\{G(s)\},$$

para escribir,

$$L^{-1}\{y_o\cdot s/(s^2+1)+y_1/(s^2+1)) + e^{-3s}/(s^2+1)) \} =$$

$$y_o\cdot L^{-1}\{s/(s^2+1)\}+ y_1\cdot L^{-1}\{1/(s^2+1)\}+ L^{-1}\{e^{-3s}/(s^2+1))\},$$

Entonces, utilizamos la calculadora para obtener lo siguiente:

'X/(X^2+1)' ENTER ILAP Resultado, 'COS(X)', ó, $L^{-1}\{s/(s^2+1)\}$= cos t.
'1/(X^2+1)' ENTER ILAP Resultado, 'SIN(X)', ó, $L^{-1}\{1/(s^2+1)\}$= sin t.
'EXP(-3*X)/(X^2+1)' ENTER ILAP Resultado, SIN(X-3)*Heaviside(X-3)'.

[2]. El resultado último, es decir, la transformada inversa de Laplace de la expresión '(EXP(-3*X)/(X^2+1))', también puede calcularse usando el segundo teorema de desfase a la derecha

$$L^{-1}\{e^{-as}\cdot F(s)\}=f(t-a)\cdot H(t-a),$$

si podemos encontrar una transformada inversa de Laplace para $1/(s^2+1)$. Con la calculadora, intente '1/(X^2+1)' ENTER ILAP. El resultado es 'SIN(X)'. Por lo tanto, $L^{-1}\{e^{-3s}/(s^2+1))\} = \sin(t-3)\cdot H(t-3)$,

Comprobar lo que la solución a la EDO sería si usted utiliza la función LDEC:

'Delta(X-3)' ENTER 'X^2+1' ENTER LDEC EVAL

El resultado es:

'SIN(X-3)*Heaviside(X-3) + cC1*SIN(X) + cC0*COS(X)+'.

Notar por favor que la variable X en esta expresión representa realmente la variable t en la EDO original. Así, la traducción de la solución al papel se puede escribir como:

$$y(t) = Co \cdot \cos t + C_1 \cdot \sin t + \sin(t-3) \cdot H(t-3)$$

Al comparar este resultado con el resultado anterior para y(t), concluimos que $cC_o = y_o$, $cC_1 = y_1$.

Definición y uso de la función grada de Heaviside en la calculadora

El ejemplo anterior proveyó de una cierta experiencia el uso de a función delta de Dirac como entrada a un sistema (es decir, en el lado derecho de la EDO que describe el sistema). En este ejemplo, deseamos utilizar la función grada de Heaviside, H(t). En la calculadora podemos definir esta función como:

'H(X) = IFTE(X>0, 1, 0)' ENTER ← DEF

Esta definición creará la variable H en el menú de la calculadora.

Ejemplo 1 – Para ver un diagrama de H(t-2), por ejemplo, utilizar un tipo de diagrama FUNCTION (ver el capítulo 12):

- Presione ← 2D/3D , simultáneamente en modo RPN, para activar la pantalla PLOT SETUP.
- Cambie `TYPE` a `FUNCTION`, de ser necesario
- Cambie EQ a 'H(X-2)'.
- Asegúrese que `Indep` se fija a 'X'.
- Presione NXT OK para volver a la pantalla normal de la calculadora.
- Presione ← WIN , simultáneamente, para acceder a la pantalla PLOT.
- Cambie el rango H-VIEW a 0 a 20, y el rango V-VIEW a -2 a 2.
- Presione ERASE DRAW para trazar la función.

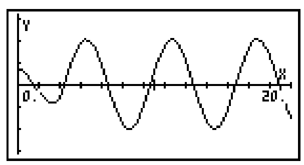
El uso de la función H(X) con LDEC, LAP, o ILAP, no se permite en la calculadora. Usted tiene que utilizar los resultados principales proporcionados anteriormente al incorporar la función grada de Heaviside, es decir, $L\{H(t)\} = 1/s$, $L^{-1}\{1/s\}=H(t)$, $L\{H(t-k)\}=e^{-ks}\cdot L\{H(t)\} = e^{-ks}\cdot(1/s) = \cdot(1/s)\cdot e^{-ks}$ y $L^{-1}\{e^{-as}\cdot F(s)\}=f(t-a)\cdot H(t-a)$.

Ejemplo 2 – La función $H(t-t_o)$ cuando se multiplica con una función f(t), es decir, $H(t-t_o)f(t)$, tiene el efecto de encender la función f(t) at $t = t_o$. Por ejemplo, la solución obtenida en el Ejemplo 3 fue $y(t) = y_o \cos t + y_1 \sin t + \sin(t\text{-}3)\cdot H(t\text{-}3)$. Suponga que utilizamos las condiciones iniciales $y_o = 0.5$, y $y_1 = -0.25$. Tracemos esta función para como luce:

- Presione ← 2D/3D , simultáneamente en modo RPN, para activar la pantalla PLOT SETUP.

➢ Cambie `TYPE` a `FUNCTION`, de ser necesario
➢ Cambie EQ a '0.5*COS(X)-0.25*SIN(X)+SIN(X-3)*H(X-3)'.
➢ Asegúrese que `Indep` se fija a 'X'.
➢ Presione ERASE DRAW para trazar la función.
➢ Presione EDIT NXT LABEL para ver la gráfica.

El gráfico que resulta es el siguiente:



Note que la señal comienza con una amplitud relativamente pequeña, pero repentinamente, en t=3, se cambia a una señal oscilatoria con una amplitud mayor. La diferencia entre el comportamiento de la señal antes y después t = 3 es el "encendido" de la solución particular $y_p(t) = \sin(t\text{-}3)\cdot H(t\text{-}3)$. El comportamiento de la señal antes de que t = 3 represente la contribución de la solución homogénea, $y_h(t) = y_o \cos t + y_1 \sin t$.

La solución de una ecuación con una señal de entrada dada por una función grada de Heaviside se muestra a continuación.

<u>Ejemplo 3</u> – Determinar la solución a la ecuación, $d^2y/dt^2+y = H(t\text{-}3)$, donde H(t) es la función grada de Heaviside. Usando transformadas de Laplace, podemos escribir: $L\{d^2y/dt^2+y\} = L\{H(t\text{-}3)\}$, $L\{d^2y/dt^2\} + L\{y(t)\} = L\{H(t\text{-}3)\}$. El término último en esta expresión es: $L\{H(t\text{-}3)\} = (1/s)\cdot e^{-3s}$. Con $Y(s) = L\{y(t)\}$, y $L\{d^2y/dt^2\} = s^2\cdot Y(s) - s\cdot y_o - y_1$, donde $y_o = h(0)$ y $y_1 = h'(0)$, la ecuación transformada es $s^2\cdot Y(s) - s\cdot y_o - y_1 + Y(s) = (1/s)\cdot e^{-3s}$. Cambie el modo del CAS a Exact, de ser necesario. Use la calculadora para despejar Y(s), escribiendo:

'X^2*Y-X*y0-y1+Y=(1/X)*EXP(-3*X)' `ENTER` 'Y' ISOL

El resultado es 'Y=(X^2*y0+X*y1+EXP(-3*X))/(X^3+X)'.

Para resolver la EDO, y(t), usaremos la transformada inversa de Laplace, como sigue:

OBJ→ ◄ ◄	Aísla el lado derecho de la última expresión
ILAP	Obtiene transformada inversa de Laplace

El resultado es 'y1*SIN(X-1)+y0*COS(X-1)-(COS(X-3)-1)*Heaviside(X-3)'.

Así, escribimos como la solución: y(t) = y_o cos t + y_1 sin t + H(t-3)·(1+sin(t-3)).

Comprobar cuál sería la solución al EDO si usted utiliza la función LDEC:

'H(X-3)' `ENTER` [ENTER] 'X^2+1' `ENTER` LDEC

El resultado es:

$$\mathrm{SIN}(X)\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{IFTE}(ttt-3>0,1,0)}{e^{X\cdot ttt}}\,dttt\ +cC1\cdot\mathrm{SIN}(X)+cC0\cdot\mathrm{COS}(X)$$

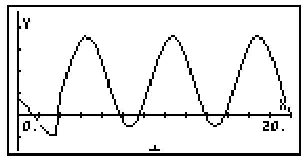
Note por favor que la variable X en esta expresión representa realmente la variable t en la EDO original, y que la variable *ttt* en esta expresión es una variable muda. Así, la traducción de la solución en papel se puede escribir como:

$$y(t) = Co\cdot\cos t + C_1\cdot\sin t + \sin t\cdot\int_0^{\infty} H(u-3)\cdot e^{-ut}\cdot du.$$

Ejemplo 4 – Trazar la solución del Ejemplo 3 usar los mismos valores de y_o y y_1 utilizado en el diagrama del Ejemplo 1. Ahora trazamos la función

y(t) = 0.5 cos t –0.25 sin t + (1+sin(t-3))·H(t-3).

en el rango 0 < t < 20, y cambiando el rango vertical a (-1,3), el gráfico se muestra como:



Una vez más hay una nueva componente del movimiento que se introduce en t=3, a saber, la solución particular $y_p(t)$ = [1+sin(t-3)]·H(t-3), la cuál cambia la naturaleza de la solución para t>3.

La función grada de Heaviside puede ser combinada con una función constante y con funciones lineales para generar pulsos finitos de forma cuadrada, triangular, o de dientes de sierra, como sigue:

- Pulso cuadrado de tamaño U_o en el intervalo a < t < b:

  f(t) = Uo[H(t-a)-H(t-b)].

- Pulso triangular con un valor máximo Uo, creciente en el rango a < t < b, y decreciente en el rango b < t < c:

  f(t) = U_o· ((t-a)/(b-a)·[H(t-a)-H(t-b)]+(1-(t-b)/(b-c))[H(t-b)-H(t-c)]).

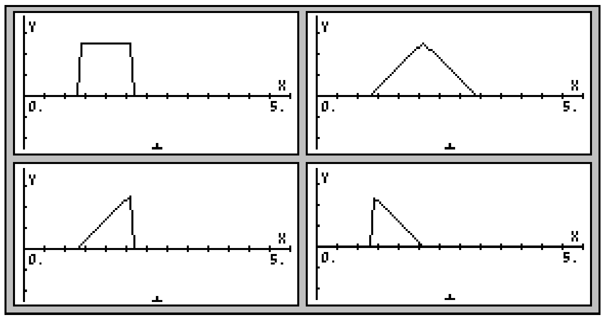
- Pulso de diente de sierra creciente hasta alcanzar un valor máximo Uo para a < t < b, decayendo repentinamente a cero para t = b:

  f(t) = U_o· (t-a)/(b-a)·[H(t-a)-H(t-b)].

- Pulso de diente de sierra que salta súbitamente a un máximo de Uo para t = a, disminuyendo linealmente a cero para a < t < b:

  f(t) = U_o·[1-(t-a)/(b-1)]·[H(t-a)-H(t-b)].

Ejemplos de los diagramas generados por estas funciones, para Uo = 1, a = 2, b = 3, c = 4, rango horizontal = (0,5), y rango vertical = (-1, 1.5), se demuestran en las figuras siguientes:



Series de Fourier

Las series de Fourier son series que usan las funciones del seno y de coseno típicamente para ampliar funciones periódicas. Una función f(x) se dice ser periódica, de período T, si f(x+T) = f(t). Por ejemplo, porque sin(x+2π) = sin x, y cos(x+2π) = cos x, las funciones *sin* y *cos* son funciones periódicas de período 2π. Si dos funciones f(x) y g(x) son periódico de período T, entonces su combinación linear h(x) = a·f(x) + b·g(x), es también periódica de período T. Dada una función periódica de período T, f(t), puede ser ampliado en una serie de funciones del seno y de coseno conocidas como serie de Fourier,

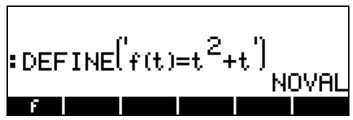
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos\frac{2n\pi}{T}t + b_n \cdot \sin\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

con a_n y b_n calculados por

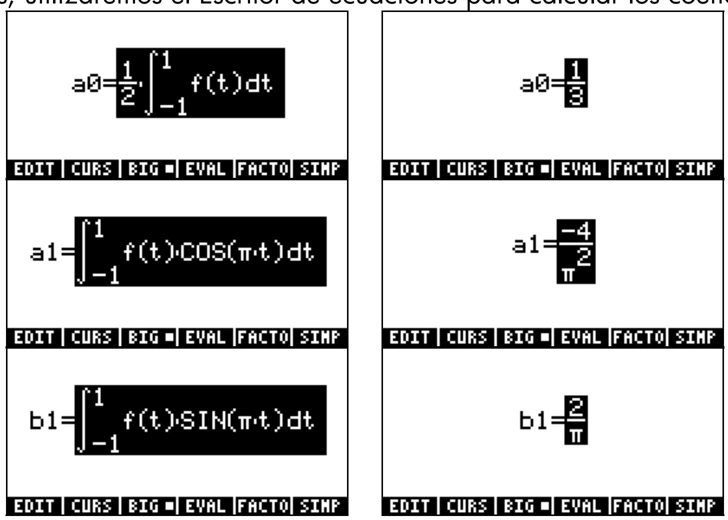
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot dt, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\cos\frac{2n\pi}{T}t\cdot dt,$$

$$b_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\sin\frac{2n\pi}{T}t\cdot dt.$$

Los ejercicios siguientes son en modo ALG , con el modo del CAS fijado a Exact. (Cuando usted produce un gráfico, el modo del CAS será reajustado a Approx. Cerciorarse de fijarlo de nuevo a Exact después de producir el gráfico.) Suponga, por ejemplo, que la función f(t) = t^2+t es periódica con período T = 2. Para determinar los coeficientes a_0, a_1, y b_1 para la serie de Fourier correspondiente, procedemos como sigue: Primero, defina la función f(t) = t^2+t :



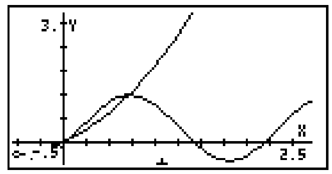
Después, utilizaremos el Escritor de ecuaciones para calcular los coeficientes:



Así, los primeros tres términos de la función son:

$$f(t) \approx 1/3 - (4/\pi^2)\cdot\cos(\pi\cdot t)+(2/\pi)\cdot\sin(\pi\cdot t).$$

Una comparación gráfica de la función original con la serie de Fourier que usa estos tres términos muestra que la aproximación es aceptable para t < 1, más o menos. Lo que tiene sentido dado que estipulamos que T/2 = 1. Por lo tanto, la aproximación es válida solamente en el rango –1 < t < 1.



Función FOURIER

Una manera alternativa de definir una serie de Fourier consiste en utilizar números complejos como se indica en la fórmula siguiente:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \exp(\frac{2in\pi t}{T}),$$

en la cual

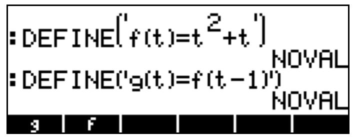
$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot \exp(-\frac{2\cdot i\cdot n\cdot \pi}{T}\cdot t)\cdot dt, \quad n = -\infty,...,-2,-1,0,1,2,...\infty.$$

La función FOURIER provee los coeficientes c_n de la forma compleja de la serie de Fourier dada la función f(t) y el valor de n. La función FOURIER requiere que el valor del período, T, de la función T-periódica, se almacene en la variable CAS denominada PERIOD antes de activar la función FOURIER. La función FOURIER está disponible en el sub-menú DERIV dentro del menú CALC (↰ CALC).

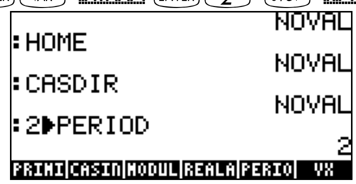
Serie de Fourier para una función cuadrática

Determine los coeficientes c_0, c_1, y c_2 para la función $f(t) = t^2+t$, con período T = 2. (Nota: Porque la integral usada por la función FOURIER se calcula en el intervalo [0,T], mientras que la integral definida anteriormente se calculó en el intervalo [-T/2,T/2], necesitamos desfasar la función en el eje t, restando T/2 de t, es decir, utilizaremos $g(t) = f(t-1) = (t-1)^2+(t-1)$.)

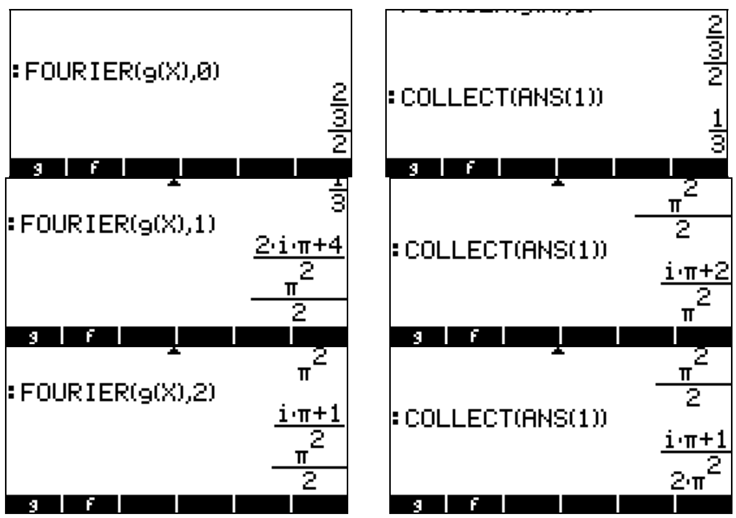
Utilizando la calculadora en modo ALG, se definen las funciones f(t) y g(t) como se muestra a continuación:



A continuación, se selecciona el sub-directorio CASDIR bajo el directorio HOME para cambiar el valor de la variable PERIOD:
← (mantener) UPDIR ENTER VAR CASDI ENTER 2 STO▶ PERIOD ENTER



Vuelva al sub-directorio donde usted definió las funciones f y g, y calcule los coeficientes (aceptar el cambio al modo complejo cuando se solicite):

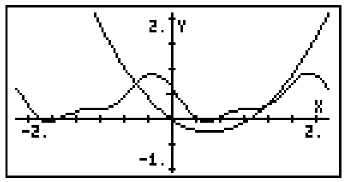


En este caso, $c_0 = 1/3$, $c_1 = (\pi\cdot i+2)/\pi^2$, $c_2 = (\pi\cdot i+1)/(2\pi^2)$.

La serie de Fourier para este caso se escribe, utilizando tres elementos, de la forma siguiente:

$g(t) \approx \mathrm{Re}[(1/3) + (\pi\cdot i+2)/\pi^2\cdot\exp(i\cdot\pi\cdot t)+ (\pi\cdot i+1)/(2\pi^2)\cdot\exp(2\cdot i\cdot\pi\cdot t)]$.

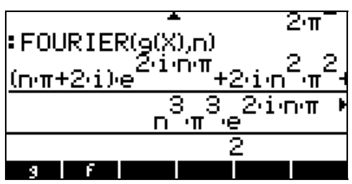
Un diagrama de la función desfasada g(t) y de la serie de Fourier se muestra a continuación:

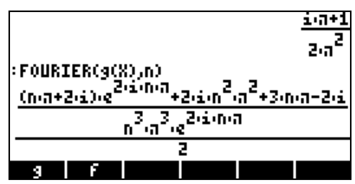


La aproximación es aceptable, aunque no tan buena como en el ejemplo anterior, para el intervalo 0<t<2.

Una expresión general para c_n

La función FOURIER puede proporcionar una expresión general para el coeficiente c_n de la serie de Fourier compleja. Por ejemplo, usando la misma función g(t) del ejemplo anterior, el término general c_n se escribe (las figuras muestran el tipo normal y pequeño de los caracteres en la pantalla):





La expresión general resulta ser, después de simplificar el resultado anterior,

$$c_n = \frac{(n\pi + 2i)\cdot e^{2in\pi} + 2i^2 n^2 \pi^2 + 3n\pi - 2i}{2n^3\pi^3 \cdot e^{2in\pi}}$$

Podemos simplificar esta expresión usando la fórmula de Euler para los números complejos, a saber, $e^{2in\pi} = \cos(2n\pi) + i\cdot\sin(2n\pi) = 1 + i\cdot 0 = 1$, dado que $\cos(2n\pi) = 1$, y $\sin(2n\pi) = 0$, para n entero.

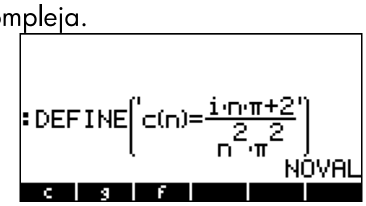
Usando la calculadora usted puede simplificar la expresión en el escritor de ecuaciones (↱ EQW) reemplazando $e^{2in\pi}$ = 1. La figura demuestra la expresión después de la simplificación:

El resultado es $c_n = (i\cdot n\cdot\pi+2)/(n^2\cdot\pi^2)$.

Construyendo la serie de Fourier compleja

Habiendo determinado la expresión general para c_n, podemos construir una serie de Fourier compleja finita usando la función sumatoria (Σ) en la calculadora como sigue:

- Primero, defina una función c(n) representando el término general c_n en la serie de Fourier compleja.



- A continuación, definir la serie de Fourier compleja finita, F(X,k), donde X es la variable independiente y k determina el número de los términos que se utilizarán. Quisiéramos idealmente escribir esta serie de Fourier Compleja finita como

$$F(X,k) = \sum_{n=-k}^{k} c(n)\cdot\exp(\frac{2\cdot i\cdot\pi\cdot n}{T}\cdot X)$$

  Sin embargo, porque la función c(n) no se define para n = 0, es mejor re-escribir la expresión como

$$F(X,k,c0) = c0 +$$

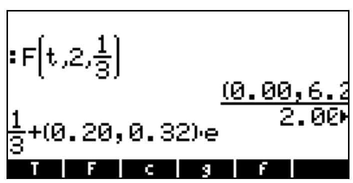
$$\sum_{n=1}^{k}[c(n)\cdot\exp(\frac{2\cdot i\cdot\pi\cdot n}{T}\cdot X)+c(-n)\cdot\exp(-\frac{2\cdot i\cdot\pi\cdot n}{T}\cdot X)],$$

O, en la línea de la entrada de la calculadora como:

DEFINE('F(X,k,c0) = c0+Σ(n=1,k,c(n)*EXP(2*i*π*n*X/T)+
c(-n)*EXP(-(2*i*π*n*X/T))'),

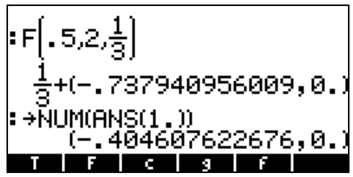
donde T es el período, T = 2. Las pantallas muestran la definición de la función F y el almacenamiento de T = 2:

La función puede ser utilizado para generar la expresión para la serie de Fourier Compleja para un valor finito de k. Por ejemplo, para k = 2, c_0 = 1/3, y usando t como la variable independiente, podemos evaluar F(t,2,1/3) para obtener:



Este resultado muestra solamente el primer término (c0) y parte del primer término exponencial en la serie. El tamaño de representación decimal fue cambiado a Fix con 2 decimales para poder mostrar algunos de los coeficientes en la serie y en el exponente. Según lo esperado, los coeficientes son números complejos.

La función F, así definida, es suficiente para obtener valores de la serie de Fourier finita. Por ejemplo, F(0.5,2,1/3), puede ser obtenido usando (con los modos del CAS fijos a Exact, Step/Step, y Complex):

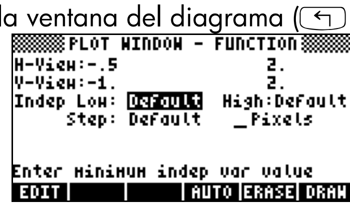


Aceptar el cambio a modo `Approx` si se requiere. El resultado es el valor –0.40467…. El valor actual de la función g(0.5) es g(0.5) = -0.25. Los cálculos siguientes demuestran cuán bien la serie de Fourier aproxima este valor a medida que el número de componentes en la serie, dado por k, aumenta:

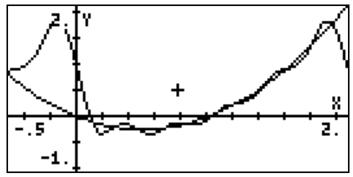
F (0.5, 1, 1/3) = (-0.303286439037,0.)
F (0.5, 2, 1/3) = (-0.404607622676,0.)
F (0.5, 3, 1/3) = (-0.192401031886,0.)
F (0.5, 4, 1/3) = (-0.167070735979,0.)
F (0.5, 5, 1/3) = (-0.294394690453,0.)
F (0.5, 6, 1/3) = (-0.305652599743,0.)

Para comparar los resultados de la serie con los de la función original, cargue estas funciones en la forma interactiva PLOT – FUNCTION (Y= , simultáneamente si usa modo de RPN):

Cambiar los límites de la ventana del diagrama (WIN) como sigue:



Presione las teclas ERASE DRAW para producir el diagrama:



Note que la serie, con 5 términos, "abraza" el gráfico de la función muy de cerca en el intervalo 0 a 2 (es decir, a través del período T = 2). Usted puede también notar una periodicidad en el gráfico de la serie. Esta periodicidad es fácil de visualizar ampliando el rango horizontal del diagrama a (-0.5,4):

Serie de Fourier para una onda triangular

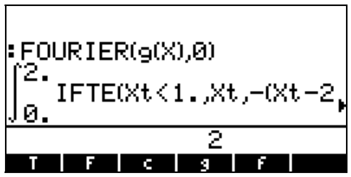
Considere la función

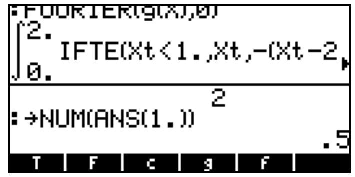
$$g(x) = \begin{cases} x, & if\ 0 < x < 1 \\ 2 - x, & if\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

cuál asumimos para ser periódica con período T = 2. Esta función se puede definir en la calculadora, en modo ALG, por la expresión

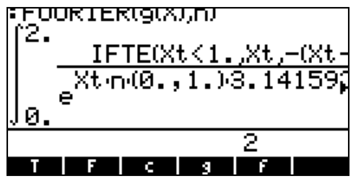
DEFINE('g(X) = IFTE(X<1,X,2-X)')

Si usted comenzó este ejemplo después de que acabó el ejemplo 1 usted tiene ya un valor de 2 almacenado en la variable PERIOD del CAS. Si usted no está seguro de esto, verifique el valor de esta variable, y almacene 2 en ella de ser necesario. El coeficiente c_0 para la serie de Fourier se calcula como sigue:





La calculadora solicitará un cambio al modo Approx debido a la integración de la función IFTE() incluida en el integrando. Aceptar el cambio a Approx produce c_0 = 0.5. Si ahora deseamos obtener una expresión genérica para el coeficiente c_n use:

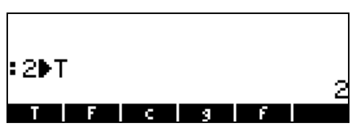


La calculadora produce una integral que no pueda ser evaluada numéricamente porque depende del parámetro n. El coeficiente puede calcularse, sin embargo, al escribir su definición en la calculadora, es decir,

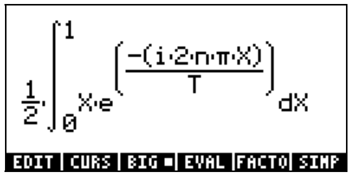
$$\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 X\cdot EXP\left(-\frac{i\cdot 2\cdot n\cdot \pi\cdot X}{T}\right)\cdot dX +$$

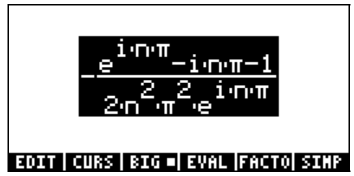
$$\frac{1}{2}\cdot\int_1^2 (2-X)\cdot EXP\left(-\frac{i\cdot 2\cdot n\cdot \pi\cdot X}{T}\right)\cdot dX$$

donde T = 2 es el período. El valor de T puede ser almacenado de esta manera:

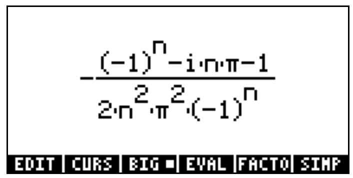


Escriba la primera integral en el Escritor de ecuaciones, seleccione la expresión entera, y use EVAL, para producir lo siguiente:

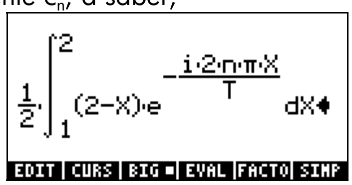


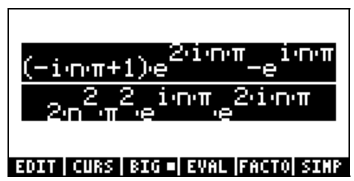


Recuérdese que $e^{in\pi} = \cos(n\pi) + i\cdot\sin(n\pi) = (-1)^n$. Realizando esta substitución en el resultado anterior tenemos:

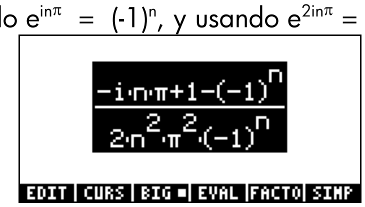


Presione `ENTER` `ENTER` para copiar este resultado a la pantalla. Entonces, reactive el Escritor de ecuaciones para calcular la segunda integral que define el coeficiente c_n, a saber,

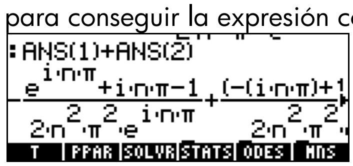




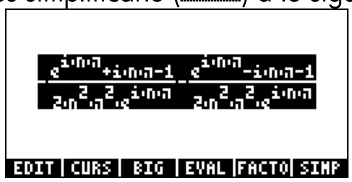
De nuevo, substituyendo $e^{in\pi} = (-1)^n$, y usando $e^{2in\pi} = 1$, obtenemos:



Presione `ENTER` `ENTER` para copiar este segundo resultado a la pantalla. Después, sume ANS(1) y ANS(2) para conseguir la expresión completa para c_n:



El presionar ▽ pondrá este resultado en el Escritor de ecuaciones, donde podemos simplificarlo (SIMP) a lo siguiente:

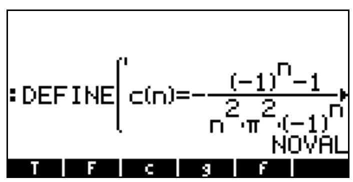


De nuevo, substituyendo $e^{in\pi} = (-1)^n$, produce

Este resultado se utiliza para definir la función c(n) como sigue:

DEFINE('c(n) = - (((-1)^n-1)/(n^2*π^2*(-1)^n)')

es decir,

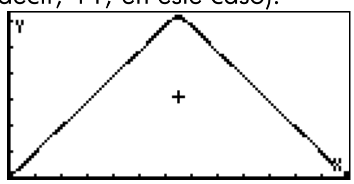


Después, definimos la función F(X,k,c0) para calcular la serie de Fourier (si usted terminó el ejemplo 1, usted tiene ya esta función almacenada):

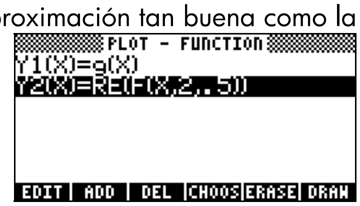
DEFINE('F(X,k,c0) = c0+Σ(n=1,k,c(n)*EXP(2*i*π*n*X/T)+
c(-n)*EXP(-(2*i*π*n*X/T))'),

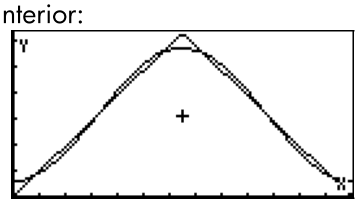
Para comparar la función original y la serie de Fourier podemos producir el diagrama simultáneo de ambas funciones. Los detalles son similares a los del ejemplo 1, excepto que aquí utilizamos un rango horizontal de 0 a 2 y de un rango vertical de 0 a 1, y ajustar las ecuaciones del diagrama según lo demostrado aquí:

El gráfico que resulta se muestra abajo para k = 5 (el número de elementos en la serie es 2k+1, es decir, 11, en este caso):

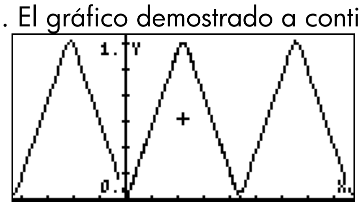


Del diagrama es muy difícil distinguir la función original de la aproximación de la serie de Fourier. El uso de k = 2, o 5 términos en la serie, no muestra una aproximación tan buena como la anterior:





La serie de Fourier Se puede utilizar para generar una onda triangular periódica (o de dientes de sierra) cambiando el rango horizontal del eje x, por ejemplo, de –2 a 4. El gráfico demostrado a continuación usa k = 5:



Serie de Fourier para una onda cuadrada

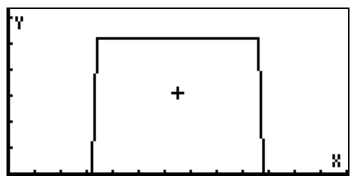
Una onda cuadrada puede ser generada usando la función

$$g(x)=\begin{cases}0, & if\ 0<x<1\\ 1, & if\ 1<x<3\\ 0, & if\ 3<x<4\end{cases}$$

En este caso, el período T, es 4. Cerciórese de cambiar el valor de la variable T a4 (use: 4 STO▶ T ENTER). La función g(X) puede ser definido en la calculadora usando

DEFINE('g(X) = IFTE((X>1) AND (X<3),1,0)')

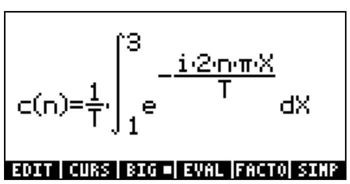
La función se traza como sigue (rango horizontal: 0 a 4, rango vertical:0 a 1.2):

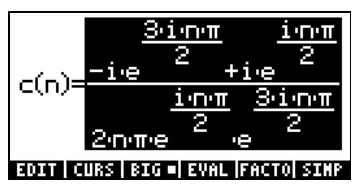


Usando un procedimiento similar al de la forma triangular en el ejemplo 2, usted puede encontrar que

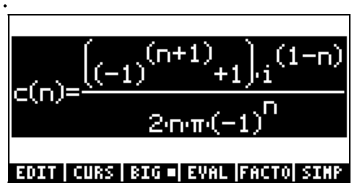
$$c_0 = \frac{1}{T}\cdot\left(\int_1^3 1\cdot dX\right) = 0.5\,,$$

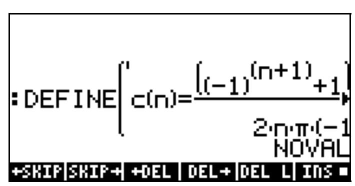
y



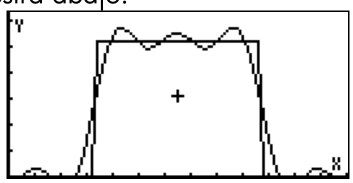


Podemos simplificar esta expresión usando $e^{in\pi/2} = i^n$ y $e^{3in\pi/2} = (-i)^n$ para obtener:

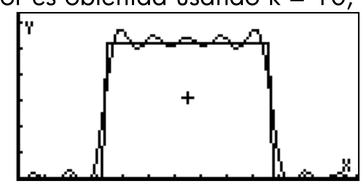




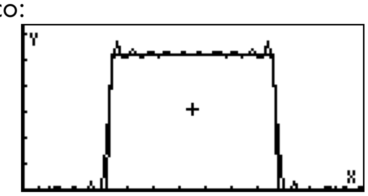
La simplificación del lado derecho de c(n) es más fácil hecha en el papel (es decir, a mano). Entonces, escriba de nuevo la expresión para c(n) según lo demostrado en la figura a la izquierda arriba, para definir la función c(n). La serie de Fourier se calcula con F(X, k, c0), como en los ejemplos 1 y 2, con c0 = 0.5. Por ejemplo, para k = 5, es decir, con 11 componentes, la aproximación se demuestra abajo:



Una aproximación mejor es obtenida usando k = 10, es decir,



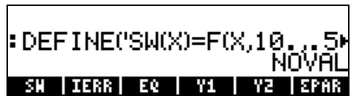
Para k = 20, la aproximación es aún mejor, pero la calculadora dura más para producir el gráfico:



Usos de la serie de Fourier en ecuaciones diferenciales

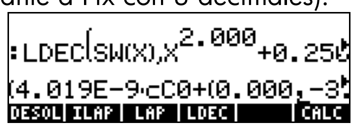
Suponga que deseamos utilizar la onda cuadrada periódica definida en el ejemplo anterior como la excitación de un sistema masa-resorte sin amortiguación cuya ecuación homogénea es: $d^2y/dx^2 + 0.25y = 0$.

Podemos generar la fuerza de excitación obteniendo una aproximación con k =10, a partir de la serie de Fourier, usando SW(X) = F(X,10,0.5):

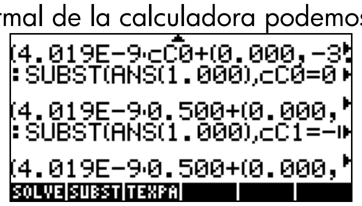


Podemos utilizar este resultado como la primera entrada a la función LDEC cuando se utiliza para obtener una solución al sistema $d^2y/dX^2 + 0.25y = SW(X)$, donde SW(X) significa función Square Wave de X. El segundo artículo de entrada será la ecuación característica que corresponde a la EDO homogénea mostrada anteriormente, es decir, 'X^2+0.25' .

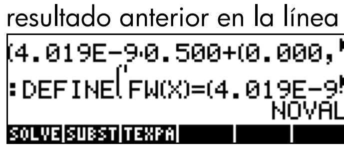
Con estas dos entradas, la función LDEC produce el resultado siguiente (formato decimal cambiante a Fix con 3 decimales).



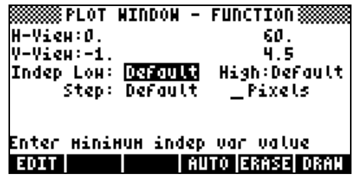
El presionar ▼ permite que usted vea la expresión entera en el Escritor de ecuaciones. Explorando la ecuación en el Escritor de ecuaciones revela la existencia de dos constantes de integración, cC0 y cC1. Estos valores pueden ser calculados usando condiciones iniciales. Suponga que utilizamos los valores cC0 = 0.5 y cC1 = -0.5, podemos sustituir esos valores en la solución arriba usando la función SUBST (ver el capítulo 5). Para este caso, utilizar SUBST(ANS(1),cC0=0.5) ENTER, seguido de SUBST(ANS(1),cC1=-0.5) ENTER. En la pantalla normal de la calculadora podemos utilizar:



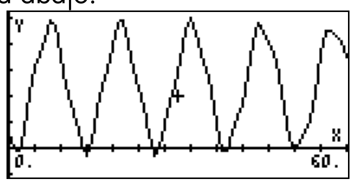
El último resultado se puede definir como una función, FW(X), como sigue (cortando y pegando el resultado anterior en la línea de entrada):



Podemos ahora trazar la parte real de esta función. Cambie el modo decimal a Standard, y utilice lo siguiente:



La solución se demuestra abajo:



Transformadas de Fourier

Antes de presentar el concepto de transformadas de Fourier, discutiremos la definición general de una transformada integral. En general, una transformada integral es una transformación que relaciona una función f(t) con una nueva función F(s) por una integración de la forma $F(s) = \int_a^b \kappa(s,t) \cdot f(t) \cdot dt.$ La función κ(s,t) se conoce como el núcleo (inglés, kernel) de la transformación.

El uso de una transformación integral permite que resolvamos una función en un espectro dado de componentes. Para entender el concepto de un espectro, considerar la serie de Fourier

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \omega_n x + b_n \cdot \sin \omega_n x \right),$$

representación de una función periódica con un período T. Esta serie de Fourier se puede re-escribir como $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(\varpi_n x + \phi_n),$

donde

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right),$$

para n =1,2, …

Las amplitudes A_n se referirán como el espectro de la función y serán una medida de la magnitud del componente de f(x) con frecuencia $f_n = n/T$. La frecuencia básica o fundamental en la serie de Fourier es $f_0 = 1/T$, así, el resto de las frecuencias son múltiplos de esta frecuencia básica, es decir, $f_n = n \cdot f_0$. También, podemos definir una frecuencia angular, $\omega_n = 2n\pi/T = 2\pi \cdot f_n = 2\pi \cdot n \cdot f_0 = n \cdot \omega_0$, donde ω_0 es la frecuencia angular básica o fundamental de la serie de Fourier.

Usando la notación de frecuencia angular, la serie de Fourier se escribe como:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(\omega_n x + \phi_n).$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \omega_n x + b_n \cdot \sin \omega_n x\right)$$

Un diagrama de los valores A_n vs. ω_n es la representación típica de un espectro discreto para una función. El espectro discreto demostrará que la función tiene componentes en las frecuencias angulares ω_n cuáles son múltiplos enteros de la frecuencia angular fundamental ω_0.

Suponga que necesitamos aproximar una función no periódica en componentes del seno y del coseno. Una función no periódica se puede considerar como una función periódica de período infinitamente grande. Así, para un valor muy grande de T, la frecuencia angular fundamental, $\omega_0 = 2\pi/T$, se convierte una cantidad muy pequeña, digamos $\Delta\omega$. También, las frecuencias angulares que corresponden a $\omega_n = n \cdot \omega_0 = n \cdot \Delta\omega$, (n = 1, 2, …, ∞), ahora tomar los valores cada vez más cercanos, sugiriendo la necesidad de un espectro continuo de valores.

La función no periódica puede escribirse, por lo tanto, como

$$f(x) = \int_0^{\infty} [C(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot x) + S(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot x)] d\omega,$$

donde

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \cos(\omega \cdot x) \cdot dx,$$

y

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \sin(\omega \cdot x) \cdot dx$$

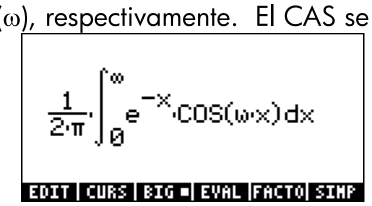
El espectro continuo es

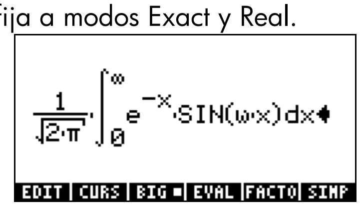
$$A(\omega) = \sqrt{[C(\omega)]^2 + [S(\omega)]^2}$$

Las funciones C(ω), S(ω), y A(ω) son funciones continuas de una variable ω, la cuál se convierte en la variable de la transformación para las transformadas de Fourier definidas posteriormente.

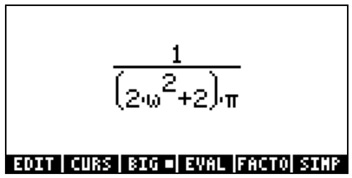
<u>Ejemplo 1</u> – Determinar los coeficientes C(ω), S(ω), y el espectro continuo A(ω),para la función f(x) = exp(-x), para x > 0, y f(x) = 0, x < 0.

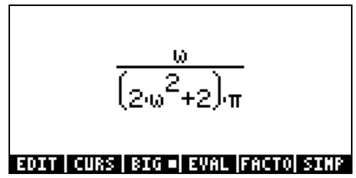
En la calculadora, escriba y evalúe las integrales siguientes para calcular C(ω) and S(ω), respectivamente. El CAS se fija a modos Exact y Real.



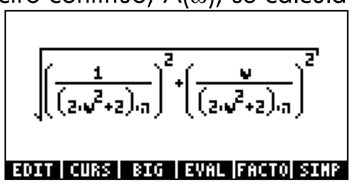


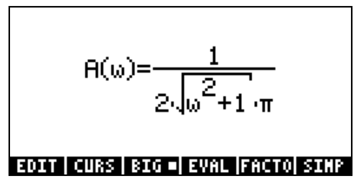
Sus resultados son, respectivamente:



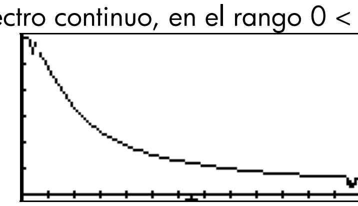


El espectro continuo, A(ω), se calcula como:





Definir esta expresión como función usando la función DEFINE (DEF). Entonces, trace el espectro continuo, en el rango 0 < ω < 10, as:



Definición de las transformadas de Fourier

Diversos tipos de transformadas de Fourier pueden ser definidas. Los siguientes son las definiciones de las transformadas de Fourier y sus lo contrario usados en este capítulo:

Transformada de Fourier usando la función seno

$$\mathrm{F}_s\{f(t)\} = F(\omega) = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\infty} f(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot dt$$

Transformada inversa de Fourier usando la función seno

$$\mathrm{F}_s^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \int_0^{\infty} F(\omega)\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot dt$$

Transformada de Fourier usando la función coseno

$$\mathrm{F}_c\{f(t)\} = F(\omega) = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\infty} f(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot dt$$

Transformada inversa de Fourier usando la función coseno

$$\mathsf{F}_c^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \int_0^{\infty} F(\omega)\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot dt$$

Transformada de Fourier propiamente dicha

$$\mathsf{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}\cdot dt$$

Transformada inversa de Fourier propiamente dicha

$$\mathsf{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot e^{-i\omega t}\cdot dt$$

Ejemplo 1 – Determine la transformada de Fourier de la función f(t) = exp(- t), para t >0, y f(t) = 0, para t<0.

El espectro continuo, F(ω),se calcula con la integral:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-(1+i\omega)t}dt = \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\varepsilon} e^{-(1+i\omega)t}dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-\exp(-(1+i\omega)\varepsilon)}{1+i\omega}\right] = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+i\omega}.$$

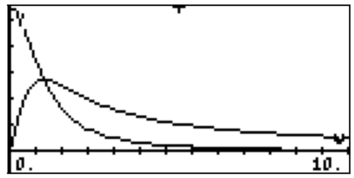
Este resultado puede ser racionalizado multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador, a saber, 1-iω. Esto produce:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+i\omega} = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{1}{1+i\omega}\right)\cdot\left(\frac{1-i\omega}{1-i\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+\omega^2} - i\cdot\frac{\omega}{1+\omega^2}\right)$$

la cuál es una función compleja.

El valor absoluto de las partes verdaderas e imaginarias de la función se puede trazar según lo demostrado abajo



Notas:
La magnitud, o valor absoluto, de la transformada de Fourier, $|F(\omega)|$, es el espectro de la frecuencia de la función original f(t). Por el ejemplo demostrado anteriormente, $|F(\omega)| = 1/[2\pi(1+\omega^2)]^{1/2}$. El diagrama de $|F(\omega)|$ vs. ω se mostró anteriormente.

Algunas funciones, tales como valores constantes, sin x, exp(x), x^2, etc., no tienen transformada de Fourier. Las funciones que van a cero suficientemente rápido cuando x va al infinito tienen transformadas de Fourier.

Características de la transformada de Fourier

Linealidad: Si a y b son constantes, y f y g funciones, entonces $F\{a\cdot f + b\cdot g\} = a\,F\{f\} + b\,F\{g\}$.

Transformación de derivadas parciales. Sea u = u(x,t). Si la transformada de Fourier transforma la variable x, entonces

$$F\{\partial u/\partial x\} = i\omega\, F\{u\},\quad F\{\partial^2 u/\partial x^2\} = -\omega^2\, F\{u\},$$
$$F\{\partial u/\partial t\} = \partial F\{u\}/\partial t,\quad F\{\partial^2 u/\partial t^2\} = \partial^2 F\{u\}/\partial t^2$$

Convolución: Para aplicaciones de la transformada de Fourier, la operación de convolución se define como

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int f(x-\xi)\cdot g(\xi)\cdot d\xi.$$

Las siguientes características aplican para la convolución:

$$F\{f*g\} = F\{f\}\cdot F\{g\}.$$

La transformada rápida de Fourier (FFT)

La transformada rápida de Fourier (inglés, Fast Fourier Transform, o FFT) es un algoritmo de la computadora por el cual uno puede calcular muy eficientemente una transformada discreta de Fourier (inglés, Discrete Fourier Transform, DFT). Este algoritmo tiene usos en el análisis de diversos tipos de señales que dependen del tiempo, desde medidas de la turbulencia hasta las señales de comunicación.

La transformada discreta de Fourier de una secuencia de datos $\{x_j\}$, j = 0, 1, 2, …, n-1, es una nueva secuencia finita $\{X_k\}$, definida como

$$X_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j \cdot \exp(-i \cdot 2\pi kj/n), \qquad k = 0,1,2,...,n-1$$

El cálculo directo de la secuencia X_k implica n^2 productos, lo cuál implicaría cantidades enormes de tiempo de la computadora (o calculadora) particularmente para los valores grandes n. La transformada rápida de Fourier reduce el número de operaciones a un orden de $n \cdot \log_2 n$. Por ejemplo, para n = 100, la FFT requiere alrededor de 664 operaciones, mientras que el cálculo directo requeriría 10,000 operaciones. Así, el número de las operaciones usando la FFT se reduce por un factor de $10000/664 \approx 15$.

La FFT opera en la secuencia $\{x_j\}$ dividiéndola en un número de secuencias más cortas. Las DFTs de las secuencias más cortas se calculan y se combinan posteriormente de una manera altamente eficiente. Para los detalles en el algoritmo referirse, por ejemplo, al capítulo 12 del libro Newland, D.E., 1993, "An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis – Third Edition," Longman Scientific and Technical, New York.

El único requisito para el uso del FFT es que el número n sea una potencia de 2, es decir, seleccionar sus datos de modo que contenga 2, 4, 8, 16, 32, 62, etc., puntos.

Ejemplos de aplicaciones de la FFT

Las aplicaciones de la FFT implican generalmente los datos discretizados de una señal dependiente del tiempo. La calculadora puede recibir esos datos, de una computadora o un colector de datos, para procesarlos. O, usted puede generar sus propios datos programando una función y agregando algunos números aleatorios a la misma.

Ejemplo 1 – Defina la función f(x) = 2 sin (3x) + 5 cos(5x) + 0.5*RAND, en la cual RAND es el generador uniforme de números aleatorios proveído por la calculadora. Genere128 datos usando valores de x en el intervalo (0,12.8). Almacenar esos valores en un arreglo, y aplique una FFT al arreglo.

Primero, definimos el f(x) de la función como un programa (en modo RPN):

<< → x '2*SIN(3*x) + 5*COS(5*x)' EVAL RAND 5 * + →NUM >>

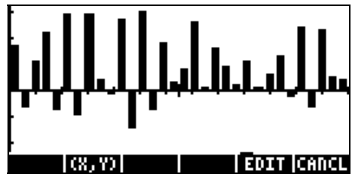
y almacene este programa en la variable f. Después, escriba el programa siguiente para generar 2^m datos entre a y b. El programa tomará los valores de m, a, y b:

<< → m a b << '2^m' EVAL → n << '(b-a)/(n+1)' EVAL → Dx << 1 n para j 'a+(j-1)*Dx' EVAL f NEXT n →ARRY >> >> >> >>

Almacene este programa bajo el nombre de GDATA (inglés, Generate DATA). Entonces, active el programa para los valores, m = 5, a = 0, b = 100. En modo RPN, use:

5 SPC 0 SPC 1 0 0 GDATA

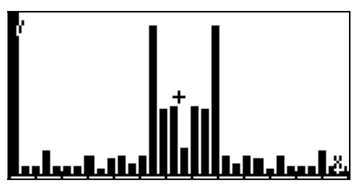
La figura abajo es un diagrama de barras de los datos producidos. Para obtener el gráfico, primero copiar el arreglo recién creado, entonces transformarlo en un vector columna usando: OBJ→ 1 + →ARRY (Las funciones OBJ→ y →ARRY están disponible en el catálogo de funciones, ↱ CAT). Almacenar el arreglo en la variable ΣDAT usando la función STOΣ (también disponible en ↱ CAT). Seleccione Bar en la opción TYPE para los gráficos, cambie la ventana de la gráfica a H-VIEW: 0 32, V-VIEW: -10 10, y BarWidth = 1. Presione CANCL ON para volver a la pantalla normal de la calculadora.



Para aplicar la FFT al arreglo en el nivel 1 de la pantalla, use la función FFT, disponible en el menú MTH/FFT, al arreglo ΣDAT: EDIT FFT. La función FFT produce un arsenal de los números complejos que son los arreglos de coeficientes X_k de la DFT. La magnitud de los coeficientes X_k representa un espectro de frecuencia de los datos originales. Para obtener la magnitud de los coeficientes usted podría transformar el arreglo a una lista, y después aplicar la función ABS a la lista. Esto es lograda usando: OBJ→ EVAL ◄ →LIST ← ABS

Finalmente, usted puede convertir la lista de nuevo a un vector columna que se almacenará en ΣDAT, como sigue: OBJ→ 1 ENTER 2 →LIST →ARRY STOΣ

Para trazar el espectro, seguir las instrucciones para producir el diagrama de barra dado anteriormente. El rango vertical necesita cambiarse a –1 to 80. El espectro de frecuencias es el siguiente:



El espectro muestra dos componentes mayores para dos frecuencias particulares (éstos son los componentes sinusoidales, sin (3x) y cos(5x)), y un número de componentes menores para otras frecuencias.

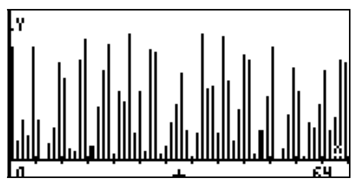
<u>Ejemplo 2</u> – Para producir la señal dado el espectro, modificamos el programa GDATA para incluir un valor absoluto, de modo que lea:

<< → m a b << '2^m' EVAL → n << '(b-a)/(n+1)' EVAL → Dx << 1 n para j 'a+(j-1)*Dx' EVAL f ABS NEXT n →ARRY >> >> >> >>

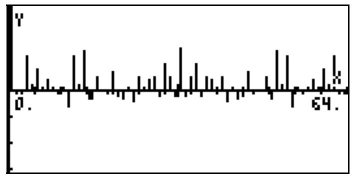
Almacene esta versión del programa en la variable GSPEC (inglés, Generate SPECtrum, o Generar el eSPECtro). Active el programa con m = 6, a = 0, b = 100. En modo RPN, use:

6 SPC 0 SPC 1 0 0 GSPEC

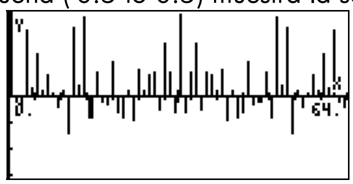
Presione ENTER al terminar, para guardar una copia adicional del arreglo del espectro. Convierta este vector fila en un vector columna y almacénelo en ΣDAT. Siguiendo el procedimiento para generar un diagrama de barras, el espectro generado por este ejemplo se muestra a continuación. El rango horizontal en este caso es 0 a 64, mientras que es el rango vertical es –1 to 10:



Para reproducir la señal a partir del especto anterior, use la función IFFT. Puesto que dejamos una copia del espectro en la pantalla (un vector fila), lo que necesitamos es localizar la función IFFT en el menú MTH/FFT o a través del catálogo de la función, ↱ CAT . Como alternativa, usted podría simplemente escribir el nombre de la función, es decir, escribir ALPHA ALPHA I F F T ENTER. La señal se demuestra como un arreglo (vector fila) con números complejos. Estamos interesados solamente en la parte real de los elementos. Para extraer la parte real de los números complejos, utilice la función RE del menú CMPLX (ver el capítulo 4), por ejemplo, escriba ALPHA ALPHA R E ENTER. Lo qué resulta es otro vector fila. Convertirlo en un vector de la columna, almacenarlo en ΣDAT, y trace un diagrama de barras para mostrar la señal. La señal para este ejemplo se muestra a continuación, usando un rango horizontal de 0 a 64, y un rango vertical de –1 a 1:



A excepción de un pico grande en t = 0, la señal es sobre todo ruido. Una escala vertical más pequeña (-0.5 to 0.5) muestra la señal como sigue:



Solución a ecuaciones diferenciales específicas de segundo orden

En esta sección presentamos y resolvemos ciertos tipos específicos de ecuaciones diferenciales ordinarias cuyas soluciones se definen en términos de algunas funciones clásicas, por ejemplo, funciones de Bessel, polinomios de Hermite, etc. Se presentan los ejemplos en modo RPN.

La ecuación de Cauchy o de Euler

Una ecuación de la forma $x^2\cdot(d^2y/dx^2) + a\cdot x\cdot (dy/dx) + b\cdot y = 0$, donde a y b son constantes reales, se conoce como la ecuación de Cauchy o de Euler. Una solución a la ecuación de Cauchy puede ser encontrada si se asume que $y(x) = x^n$.
Escriba la ecuación como: 'x^2*d1d1y(x)+a*x*d1y(x)+b*y(x)=0' `ENTER`
Después, escriba la solución sugerida: 'y(x) = x^n' `ENTER` `SUBST`

El resultado es: 'x^2*(n*(x^(n-1-1)*(n-1)))+a*x*(n*x^(n-1))+b*x^n =0, el cuál simplifica 'n*(n-1)*x^n+a*n*x^n+b*x^n = 0'. Dividiendo por x^n, resulta en una ecuación algebraica auxiliar: 'n*(n-1)+a*n+b = 0', o

$$n^2 + (a-1)\cdot n + b = 0\ .$$

- Si la ecuación tiene dos diversas raíces, digamos n_1 y n_2, entonces la solución general de esta ecuación es $y(x) = K_1 \cdot x^{n_1} + K_2 \cdot x^{n_2}$.
- Si $b = (1-a)^2/4$, entonces la ecuación tiene una raíz doble $n_1 = n_2 = n = (1-a)/2$, y la solución resulta ser $y(x) = (K_1 + K_2 \cdot \ln x)x^n$.

Ecuación de Legendre

Una ecuación de la forma $(1-x^2)\cdot(d^2y/dx^2)-2\cdot x\cdot (dy/dx)+n\cdot (n+1) \cdot y = 0$, donde n es un número real, se conoce como la ecuación diferencial de Legendre. Cualquier solución para esta ecuación se conoce como función de Legendre. Cuando n es un entero no negativo, las soluciones se conocen como polinomios de Legendre. Los polinomios de Legendre de orden n se escriben

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \cdot \frac{(2n-2m)!}{2^n \cdot m! \cdot (n-m)! \cdot (n-2m)!} \cdot x^{n-2m}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2} \cdot x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n \cdot 1! \cdot (n-1)!(n-2)!} \cdot x^{n-2} + \ldots - ..$$

donde M = n/2 o (n-1)/2, cualesquiera que sea un entero.

Los polinomios de Legendre están pre-programados en la calculadora y pueden ser activados usando la función LEGENDRE dado el orden del polinomio, n. La función LEGENDRE puede ser obtenido del catálogo de funciones (→ _CAT_) o a través del menú ARITHMETIC/POLYNOMIAL (ver el capítulo 5). En modo RPN, se obtienen los primeros seis polinomios de Legendre como sigue:

0 LEGENDRE, resulta: 1, es decir, $P_0(x) = 1.0$.
1 LEGENDRE, resulta: 'X', es decir, $P_1(x) = x$.
2 LEGENDRE, resulta: '(3*X^2-1)/2', es decir, $P_2(x) = (3x^2-1)/2$.
3 LEGENDRE, resulta: '(5*X^3-3*X)/2', es decir, $P_3(x) =(5x^3-3x)/2$.
4 LEGENDRE, resulta: '(35*X^4-30*X^2+3)/8', es decir,
$P_4(x) =(35x^4-30x^2+3)/8$.
5 LEGENDRE, resulta: '(63*X^5-70*X^3+15*X)/8', es decir,
$P_5(x) =(63x^5-70x^3+15x)/8$.

La EDO $(1\text{-}x^2)\cdot(d^2y/dx^2)\text{-}2\cdot x\cdot (dy/dx)+[n\cdot (n+1)\text{-}m^2/(1\text{-}x^2)] \cdot y = 0$, tiene por solución la función $y(x) = P_n^m(x)= (1\text{-}x^2)^{m/2}\cdot(d^mPn/dx^m)$. Esta función se refiere como función asociada de Legendre.

Ecuación de Bessel

La ecuación diferencial ordinaria $x^2\cdot(d^2y/dx^2) + x\cdot (dy/dx)+ (x^2\text{-}\nu^2) \cdot y = 0$, donde el parámetro ν es un número real no negativo, se conoce como ecuación diferencial de Bessel. Las soluciones a la ecuación de Bessel se dan en términos de funciones de Bessel de primera clase de orden ν:

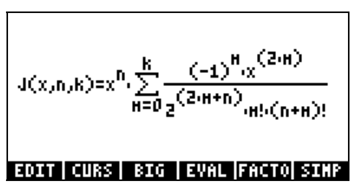
$$J_\nu(x) = x^\nu \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot x^{2m}}{2^{2m+\nu} \cdot m! \cdot \Gamma(\nu+m+1)},$$

donde ν no es un entero, y la función Gamma $\Gamma(\alpha)$ se define en el Capítulo 3.

Si ν = n, es un entero, las funciones de Bessel de primera clase para n = entero se definen por

$$J_n(x) = x^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot x^{2m}}{2^{2m+n} \cdot m! \cdot (n+m)!}.$$

Sin importar si utilizamos ν (no entero) ó n (entero) en la calculadora, podemos definir las funciones de Bessel de primera clase usando la serie finita siguiente:



Así, tenemos control sobre el orden de la función, n, y sobre el número de elementos en la serie, k. Una vez que usted haya escrito esta función, usted puede utilizar la función DEFINE para definir la función J(x,n,k). Esto creará la variable J en el menú. Por ejemplo, para evaluar $J_3(0.1)$ usando 5 términos en la serie, calcule J(0.1,3,5), es decir, en modo RPN: . 1 SPC 3 SPC 5 J El resultado es 2.08203157E-5.

Si usted desea obtener una expresión para $J_0(x)$ con, digamos, 5 términos en la serie, use J(x,0,5). El resultado es

'1-0.25*x^3+0.015625*x^4-4.3403777E-4*x^6+6.782168E-6*x^8-6.78168*x^10'.

Para valores no enteros ν, la solución a la ecuación de Bessel se da por

$$y(x) = K_1 \cdot J_\nu(x)+K_2 \cdot J_{-\nu}(x).$$

Para los valores del número entero, las funciones $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ son linealmente dependiente, dado que $J_n(x) = (-1)^n \cdot J_{-n}(x)$, por lo tanto, no podemos utilizarlos para obtener una función general a la ecuación. En lugar, <u>introducimos las funciones de Bessel de segunda clase</u> definidas como

$$Y_\nu(x) = [J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)]/\sin \nu\pi,$$

para ν no entero, y para n entera, con n > 0, por

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} \cdot J_n(x) \cdot (\ln\frac{x}{2} + \gamma) + \frac{x^n}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} \cdot (h_m + h_{m+n})}{2^{2m+n} \cdot m! \cdot (m+n)!} \cdot x^{2m}$$

$$-\frac{x^{-n}}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n} \cdot m!} \cdot x^{2m}$$

donde γ es la constante de Euler, definida por

$$\gamma = \lim_{r\to\infty}[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{r} - \ln r] \approx 0.57721566490...,$$

y h_m representa la serie armónica

$$h_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{m}$$

Para el caso n = 0, la función de Bessel de segunda clase se define como

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \left[J_0(x) \cdot (\ln\frac{x}{2} + \gamma) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} \cdot h_m}{2^{2m} \cdot (m!)^2} \cdot x^{2m} \right].$$

Con estas definiciones, una solución general de la ecuación de Bessel para todos los valores de ν es $y(x) = K_1 \cdot J_\nu(x)+K_2 \cdot Y_\nu(x)$.

En algunos casos, es necesario proporcionar soluciones complejas a las ecuaciones de Bessel definiendo las funciones de Bessel de tercera clase de orden ν como

$$H_n^{(1)}(x) = J_\nu(x)+i \cdot Y_\nu(x), \text{ and } H_n^{(2)}(x) = J_\nu(x)-i \cdot Y_\nu(x),$$

Estas funciones también se conocen como las primeras y segundas funciones de Hankel de orden ν.

En algunas aplicaciones usted puede también tener que utilizar las funciones de Bessel Modificadas de primera clase de orden ν definidas como

$$I_\nu(x)= i^{-\nu} \cdot J_\nu(i \cdot x),$$

donde i es el número imaginario de la unidad. Estas funciones son soluciones a la ecuación diferencial $x^2 \cdot (d^2y/dx^2) + x \cdot (dy/dx) - (x^2+\nu^2) \cdot y = 0$.

Las funciones de Bessel modificadas de segunda clase,

$$K_\nu(x) = (\pi/2) \cdot [I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)]/\sin \nu\pi,$$

son también las soluciones de esta EDO.

Usted puede implementar las funciones de Bessel en la calculadora de una manera similar a aquella usada para definir las funciones de Bessel de primera clase, pero teniendo presente que las series infinitas en la calculadora necesitan ser traducidas a una serie finita.

Polinomios de Chebyshev o Tchebycheff

Las funciones $T_n(x) = \cos(n \cdot \cos^{-1} x)$, y $U_n(x) = \sin[(n+1) \cos^{-1} x]/(1-x^2)^{1/2}$, n = 0, 1, … se llaman polinomios de Chebyshev o Tchebycheff de la primera y segunda clase, respectivamente. Los polinomios Tn(x) son soluciones de la ecuación diferencial $(1-x^2) \cdot (d^2y/dx^2) - x \cdot (dy/dx) + n^2 \cdot y = 0$.

En la calculadora la función TCHEBYCHEFF genera el polinomio de Chebyshev o Tchebycheff de la primera clase de orden n, dado un valor de n > 0. Si el número entero n es negativo (n < 0), la función TCHEBYCHEFF genera un polinomio de Tchebycheff de segunda clase de orden n que se define como

$U_n(x) = \sin(n\cdot\arccos(x))/\sin(\arccos(x))$.

Usted puede tener acceso a la función TCHEBYCHEFF a través del catálogo de funciones (CAT).

Los primeros cuatro polinomios de Chebyshev o de Tchebycheff de la primera y segunda clase son sigue obtenido del como:

0 TCHEBYCHEFF, resulta: 1,	es decir,	$T_0(x) = 1.0$.
-0 TCHEBYCHEFF, resulta: 1,	es decir,	$U_0(x) = 1.0$.
1 TCHEBYCHEFF, resulta: 'X',	es decir,	$T_1(x) = x$.
-1 TCHEBYCHEFF, resulta: 1,	es decir,	$U_1(x) =1.0$.
2 TCHEBYCHEFF, resulta: '2*X^2-1,	es decir,	$T_2(x) =2x^2-1$.
-2 TCHEBYCHEFF, resulta: '2*X',	es decir,	$U_2(x) =2x$.
3 TCHEBYCHEFF, resulta: '4*X^3-3*X',	es decir,	$T_3(x) = 4x^3-3x$.
-3 TCHEBYCHEFF, resulta: '4*X^2-1',	es decir,	$U_3(x) = 4x^2-1$.

Ecuación de Laguerre

La ecuación de Laguerre es la EDO lineal de segundo orden de la forma $x\cdot(d^2y/dx^2) +(1-x)\cdot (dy/dx) + n\cdot y = 0$. Polinomios de Laguerre, definidos como

$$L_0(x) = 1, \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\cdot\frac{d^n(x^n \cdot e^{-x})}{dx^n},\ n = 1,2,\ldots,$$

son soluciones a la ecuación de Laguerre. Los polinomios de Laguerre se pueden también calcular con: $L_n(x) = \sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}\cdot\binom{n}{m}\cdot x^m$.

$$= 1 - n\cdot x + \frac{n(n-1)}{4}\cdot x^2 - \ldots + \ldots. + \frac{(-1)^n}{n!}\cdot x^n$$

El término

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C(n,m)$$

es el coeficiente m de la expansión binomial $(x+y)^n$. . También representa el número de combinaciones de n elementos tomados m a la vez. Esta función está disponible en la calculadora como función COMB en el menú MTH/PROB (ver también el capítulo 17).

Usted puede definir la función siguiente para calcular los polinomios de Laguerre:

$$L(x,n)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}\cdot COMB(n,m)\cdot x^m$$

Al terminar de escribir escritor de ecuaciones use la función DEFINE para crear la función L(x,n) en la variable .

Para generar los primeros cuatro polinomios de Laguerre use, L(x,0), L(x,1), L(x,2), L(x,3). Los resultados son:

$L_0(x) =$.
$L_1(x) = 1\text{-}x.$
$L_2(x) = 1\text{-}2x+ 0.5x^2$
$L_3(x) = 1\text{-}3x+1.5x^2\text{-}0.16666\ldots x^3.$

Ecuación de Weber y polinomios de Hermite

Se define la ecuación de Weber como $d^2y/dx^2+(n+1/2\text{-}x^2/4)y = 0$, para n = 0, 1, 2, … Una solución particular de esta ecuación es dada por la función, $y(x) = \exp(\text{-}x^2/4)H^*(x/\sqrt{2})$, donde la función $H^*(x)$ es el polinomio de Hermite:

$$H_0* = 1, \quad H_n*(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), \quad n = 1,2,..$$

En la calculadora, la función HERMITE, está disponible a través del menú ARITHMETIC/POLYNOMIAL. La función HERMITE tomas como argumento un número entero, n, y produce el polinomio de Hermite del grado n. Por ejemplo, los primeros cuatro polinomios de Hermite son obtenidos usando:

0 HERMITE, resulta: 1,	es decir, $H_0^* = 1$.
1 HERMITE, resulta: '2*X',	es decir, $H_1^* = 2x$.
2 HERMITE, resulta: '4*X^2-2',	es decir, $H_2^* = 4x^2-2$.
3 HERMITE, resulta: '8*X^3-12*X',	es decir, $H_3^* = 8x^3-12x$.

Soluciones numéricas y gráficas de las EDOs

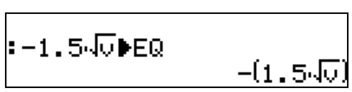
Las ecuaciones diferenciales que no pueden ser solucionadas analíticamente se pueden solucionar numéricamente o gráficamente según lo ilustrado abajo.

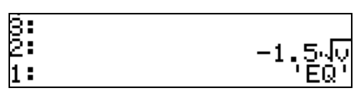
Solución numérica de una EDO de primer orden

Con el uso de las soluciones numéricas (↱ NUM.SLV), se puede activar una forma interactiva que permite resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden. El uso de este procedimiento se presenta usando el ejemplo siguiente. El método usado en la solución es un algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden preprogramado en la calculadora

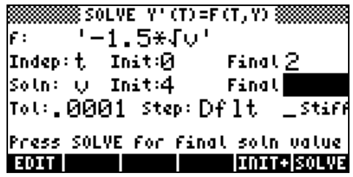
Ejemplo 1 – Suponga que deseamos resolver la ecuación diferencial, dv/dt = $-1.5\ v^{1/2}$, con v = 4 at t = 0. Nos piden encontrar v para t = 2.

Primero, cree la definición de la expresión para la derivada y almacenarlo en la variable EQ. La figura de la izquierda muestra la instrucción en modo de ALG, mientras que la figura de la derecha muestra la pantalla RPN antes de presionar STO▶.





Entonces, active las soluciones numéricas y seleccione la solución de ecuaciones diferenciales: ↱ NUM.SLV ▼ OK . Escriba los siguientes parámetros:



Para solucionar, presione: SOLVE (espere) EDIT. El resultado es 0.2499 ≈ 0.25. Presione OK.

Solución presentada como tabla de valores

Suponer que deseamos producir una tabla de valores de v, para t = 0.00, 0.25, …, 2.00, procederemos como sigue:

Primero, prepare una tabla para anotar sus resultados. Anote en su tabla los resultados paso a paso:

t	v
0.00	0.00
0.25	
…	…
2.00	

Después, dentro del ambiente SOLVE, cambie el valor final de la variable independiente a 0.25, use :

▲ .25 OK ▶ ▶ SOLVE (espere) EDIT

(Calcule v para t = 0.25, v = 3.285 ….)

OK INIT+ ▲ . 5 OK ▶ ▶ SOLVE (espere) EDIT

(Cambia valor inicial de t a 0.25, y el valor final de t a 0.5, calcule v(0.5) = 2.640…)

OK INIT+ ▲ .75 OK ▶ ▶ SOLVE (espere) EDIT

(Cambia valor inicial de t a 0.5, y el valor final de t a 0.75, calcule v(0.75) = 2.066…)

OK INIT+ ▲ 1 OK ▶ ▶ SOLVE (espere) EDIT

(Cambia valor inicial de t a 0.75, y el valor final de t a 1, calcule v(1) = 1.562…)

Repetir para t = 1.25, 1.50, 1.75, 2.00. Presione OK después de ver el resultado pasado con EDIT. Para volver a la pantalla normal de la calculadora, presione ON o NXT OK. Las diversas soluciones serán mostradas en la pantalla, con el resultado más reciente en el nivel 1.

Los resultados finales resultan ser (redondeados al tercer decimal):

t	v
0.00	4.000
0.25	3.285
0.50	2.640
0.75	2.066
1.00	1.562
1.25	1.129
1.50	0.766
1.75	0.473
2.00	0.250

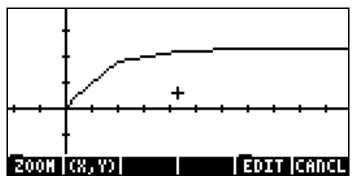
Solución gráfica de una EDO de primer orden

Cuando no podemos obtener una solución de forma cerrada para una integral, podemos trazar siempre la integral seleccionando `Diff Eq` en la opción `TYPE` del ambiente PLOT como sigue: suponer que deseamos trazar la posición x(t) para una función de la velocidad v(t) = $\exp(-t^2)$, con x = 0 at t = 0. Sabemos que no hay expresión de forma cerrada para la integral, sin embargo, sabemos que la definición de v(t) es dx/dt = $\exp(-t^2)$.

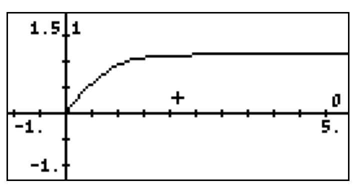
La calculadora permite trazar la solución de la ecuación diferencial de la forma Y'(T) = F(T,Y). Para nuestro caso, sean Y = x y T = t, por lo tanto, F(T,Y) = f(t, x) = $\exp(-t^2)$. Tracemos la solución, x(t), para t = 0 a 5, usando la secuencia teclas siguiente:

- ← 2D/3D (simultáneamente, si en modo RPN) para activar el ambiente PLOT
- Destacar la opción TYPE, usando las teclas ▲▼. Presione CHOOS, y seleccione `Diff Eq`, usando las teclas ▲▼. Presione OK.

- Cambie la opción F: a 'EXP(- t^2)'
- Cerciórese de que los parámetros siguientes estén fijados a: `H-VAR: 0`, `V-VAR: 1`
- Cambie la variable independiente a t .
- Acepte los cambios a PLOT SETUP: NXT OK
- ← WIN (simultáneamente, si en modo RPN). Para acceder el ambiente PLOT WINDOW
- Cambie los rangos de la gráfica a los valores siguientes: `H-VIEW: -1 5; V-VIEW: -1 1.5`
- También, utilice los valores siguientes para los parámetros restantes: Init: 0, Final: 5, Step: Default, Tol: 0.0001, Init-Soln: 0
- Para trazar la gráfica, use: ERASE DRAW



Cuando usted observa el gráfico siendo trazado, usted notará que el gráfico no es muy continuo. Eso es porque el trazador está utilizando un paso del tiempo que pueda ser muy grande para producir una gráfica continua. Para refinar el gráfico y para hacerlo más continuo, utilice un paso de 0.1. Presione CANCL y cambie *Step* : a 0.1, después use ERASE DRAW una vez más para repetir el gráfico. El diagrama durará para ser terminado, pero la forma es definitivamente más continua que antes. Intentar lo siguiente: EDIT NXT LABEL MENU para ver etiquetas y rangos.



Note que las etiquetas para las hachas están demostradas como 0 (horizontal, para t) y 1 (vertical, para x). Éstas son las definiciones para la pantalla PLOT SETUP (← 2D/3D), es decir, H-VAR: 0, and V-VAR: 1. Para ver la solución gráfica detalladamente utilizar lo siguiente:

NXT NXT PICT	Recobrar menú y la pantalla PICT.
(X,Y)	Para determinar coordenadas de puntos en el gráfico.

Use las teclas ◀ ▶ para mover el cursor alrededor del área del diagrama. En la parte inferior de la pantalla usted verá los coordenadas del cursor como (X,Y), es decir, la calculadora utiliza X y Y como los nombres de los ejes horizontal y vertical, respectivamente. Presione NXT CANCL para recuperar el menú y volver a la pantalla PLOT WINDOW. Finalmente, presione ON para volver a la pantalla normal.

Solución numérica de una EDO de segundo orden

Integración de EDOs de segundo orden puede ser logrado definiendo la solución como vector. Por ejemplo, suponer que un sistema de masa-resorte está sujeto a una fuerza amortiguadora proporcional a su velocidad, de modo que la ecuación diferencial que resulta es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -18.75 \cdot x - 1.962 \cdot \frac{dx}{dt}$$

o, x" = - 18.75 x - 1.962 x',

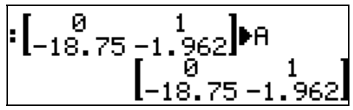
sujeta a las condiciones iniciales, v = x' = 6, x = 0, at t = 0. Deseamos encontrar x, x' at t = 2.

Reescriba la EDO como: **w**' = **Aw**, donde **w** = [x x']^T, y **A** es la matriz 2x2 que se muestra a continuación.

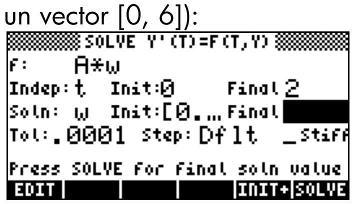
$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -18.75 & -1.962 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$$

Las condiciones iniciales ahora se escriben como **w** = [0 6]^T, para t = 0. (Nota: El símbolo [ ]^T significa la transpuesta del vector o de la matriz).

Para solucionar este problema, el primeros, crear y almacenar la matriz **A**, por ejemplo, en modo ALG:



Entonces, activar la solución numérica de ecuaciones diferenciales usando: ↱ NUM.SLV ▼ OK . Para resolver la ecuación diferencial con tiempo inicial t = 0 y tiempo final t = 2, la forma interactiva para la solución numérica de ecuaciones diferenciales se muestra a continuación (note que el valor Init: para Soln: es un vector [0, 6]):



Presione SOLVE (espere) EDIT para calcular w(t=2). La solución es [.16716… -.6271…], es decir, x(2) = 0.16716, y x'(2) = v(2) = -0.6271. Presione CANCL para volver al ambiente SOLVE.

Solución presentada como tabla de valores

En el anterior ejemplo estábamos interesados solamente en encontrar los valores de la posición y de la velocidad en un momento dado t. Si deseamos producir una tabla de valores de x y x', para t = 0.00, 0.25, …, 2.00, procederemos como sigue: Primero, preparar una tabla para anotar sus resultados:

t	x	x'
0.00	0.00	6.00
0.25		
…	…	…
2.00		

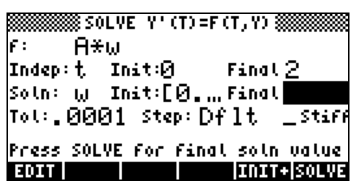
A continuación, dentro del ambiente SOLVE, para cambiar el valor final de la variable independiente a 0.25, use:

▲ .25 OK ▶ ▶ SOLVE (espere) EDIT
(Calcula w en t = 0.25, w = [0.968 1.368].)
OK INIT+ ▲ . 5 OK ▶ ▶ SOLVE (espere) EDIT
(Cambia valor inicial de t to 0.25, y el valor final de t a 0.5, calcule nuevamente w(0.5) = [0.748 -2.616])
OK INIT+ ▲ .75 OK ▶ ▶ SOLVE (espere) EDIT
(Cambia valor inicial de t to 0.5, y el valor final de t a 0.75, calcule nuevamente w(0.75) = [0.0147 -2.859])
OK INIT+ ▲ 1 OK ▶ ▶ SOLVE (espere) EDIT
(Cambia valor inicial de t to 0.75, y el valor final de t a 1, calcule nuevamente w(1) = [-0.469 -0.607])
Repita para t = 1.25, 1.50, 1.75, 2.00. Presione OK después de ver el resultado anterior en EDIT. Para volver a la pantalla normal de la calculadora, presione ON o NXT OK. Las diversas soluciones serán demostradas en la pantalla, con el resultado más reciente en el nivel 1.
los resultados son:

t	x	x'		t	x	x'
0.00	0.000	6.000		1.25	-0.354	1.281
0.25	0.968	1.368		1.50	0.141	1.362
0.50	0.748	-2.616		1.75	0.227	0.268
0.75	-0.015	-2.859		2.00	0.167	-0.627
1.00	-0.469	-0.607				

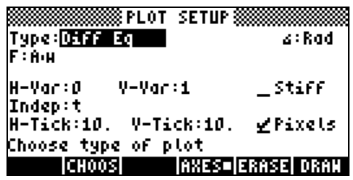
Solución gráfica para una EDO de segundo orden

Comenzar activando las soluciones numéricas para ecuaciones diferenciales, ↱ NUM.SLV ▼ OK . La pantalla SOLVE lucirá de esta forma:



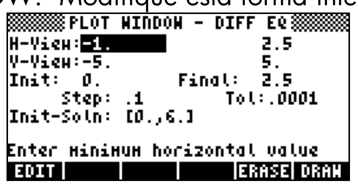
Note que la condición inicial para la solución (Soln: w Init:[0., …) incluye el vector [0, 6]. Presione NXT OK.

A continuación, presione ← 2D/3D (simultáneamente, si en modo RPN) para activar el ambiente PLOT. Seleccione la opción TYPE, usando las teclas ▲ ▼. Entonces, presione CHOOS, y seleccione la opción `Diff Eq`, usando las teclas ▲▼. Presione OK. Modifique el resto del ambiente PLOT SETUP de manera que luzca de esta forma:



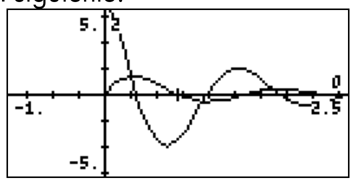
Note que la opción V-Var: se ajusta a 1, indicando que el primer elemento en la solución del vector, a saber, x', será trazado contra la variable independiente t. Acepte los cambios a PLOT SETUP presionando NXT OK.

Presione ← WIN (simultáneamente, si en modo RPN) para activar el ambiente PLOT WINDOW. Modifique esta forma interactiva de esta manera:



Para trazar la gráfica x' vs. t use: ERASE DRAW. El diagrama de x' vs. t es el siguiente:

Para trazar la segunda curva usaremos la forma interactiva PLOT SETUP una vez más. Para activar esta forma partiendo del gráfico use: CANCL NXT OK ← 2D/3D (simultáneamente, si en modo RPN). Cambie el valor de V-Var: a 2, y presione DRAW (no presione ERASE o se pierde el gráfico producido anteriormente). Use: EDIT NXT LABEL MENU para ver etiquetas y la rango de los ejes. Notar que la etiqueta del eje x es el número 0 (indicando la variable independiente), mientras que la etiqueta del eje y es el número 2 (indicando la segunda variable, es decir, la última variable trazada). El gráfico combinado es el siguiente:



Presione NXT NXT PICT CANCL ON para regresar a la pantalla normal de la calculadora.

Solución numérica para una EDO rígida de primer orden

Considere la EDO: dy/dt = -100y+100t+101, sujeta a la condición inicial y(0) = 1.

Solución exacta

Esta ecuación se puede escribir como dy/dt + 100 y = 100 t + 101, y resolverse usando un factor integral, IF(t) = exp(100t), como sigue (RPN, con CAS ajustado a modo Exact):

‘(100*t+101)*EXP(100*t)’ ENTER ‘t’ ENTER RISCH

El resultado es ‘(t+1)*EXP(100*t)’.

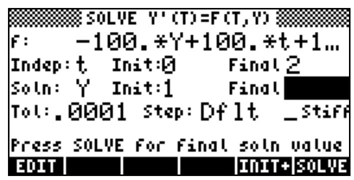
Después, agregamos una constante de integración, usando: ‘C’ ENTER +

Entonces, dividimos por FI(x), usando: ‘EXP(100*t)’ ENTER ÷ .

El resultado es: ‘((t+1)*EXP(100*t)+C)/EXP(100*t)’, es decir, $y(t) = 1+ t +C\cdot e^{100t}$. El uso de la condición inicial y(0) = 1, produce $1 = 1 + 0 + C\cdot e^0$, ó C = 0, la solución particular es y(t) = 1+t.

Solución numérica

Si procuramos una solución numérica directa de la ecuación original dy/dt = -100y+100t+101, usando la solución numérica de la calculadora, encontramos que la calculadora tarda mucho más en producir una solución que en el anterior ejemplo de primer orden. Para verificar esto, use (→ NUM.SLV ▼ OK):

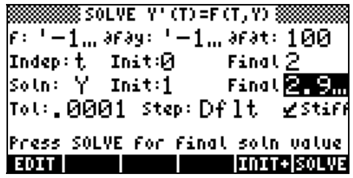


Aquí estamos intentando obtener el valor de y(2) dado y(0) = 1. Con `Soln: Final` seleccionado, presione SOLVE. Usted puede comprobar que una solución toma cerca de 6 segundos, mientras que en el anterior ejemplo la solución era casi instantánea. Presione ON para cancelar el cálculo.

Esto es un ejemplo de una ecuación diferencial ordinaria rígida. Una EDO rígida es una en que la solución general contiene componentes que varían a velocidades muy diferentes bajo el mismo incremento en la variable independiente. En este caso particular, la solución general, y(t) = 1+ t +C·e^{100t}, contiene los componentes 't' y 'C·e^{100t}', las cuáles varían velocidades diferentes, a excepción de los casos C=0 o C≈0 (por ejemplo, para C = 1, t =0.1, C·e^{100t} =22026).

La solución numérica de EDOs de la calculadora tiene en cuenta la solución de EDOs rígidas seleccionando la opción `_Stiff` en la pantalla `SOLVE Y'(T) = F(T,Y)`. Con esta opción seleccionada, es necesario proveer los valores de ∂f/∂y y ∂f/∂t. Para el caso bajo consideración ∂f/∂y = -100 y ∂f/∂t = 100.

Escriba esos valores en los localidades correspondientes de la pantalla `SOLVE Y'(T) = F(T,Y)`:



Al terminar, mueva el cursor a la localidad `Soln:Final` y presione SOLVE. Esta vez, la solución se produce en 1 segundo, más o menos. Presione EDIT para ver la solución: 2.9999999999, es decir, 3.0.

Nota: La opción `Stiff` está también disponible para las soluciones gráficas de ecuaciones diferenciales.

Solución numérica a EDOs con el menú SOLVE/DIFF

El menú SOLVE se activa usando 74 MENU en modo RPN. Este menú se presenta detalladamente en el capítulo 6. Uno de los sub-menús, DIFF, contiene las funciones para la solución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias para usar en programación. Se describen estas funciones usando el modo RPN y la bandera, o señal, de sistema 117 fija a SOFT menus.

Las funciones proveídas por el menú SOLVE/DIFF son las siguientes:

Función RKF

Esta función se utiliza para computar la solución a un problema del valor inicial para una ecuación diferencial de primer orden usando el esquema de solución de Runge-Kutta-Fehlbert de orden 4 a 5. Suponer que la ecuación diferencial que se solucionará está dada por dy/dx = f(x,y), con y = 0 para x = 0, y que usted permitirá un criterio de convergencia ε para la solución. Usted puede también especificar un incremento en la variable independiente, Δx, ser utilizado por la función. Para activar esta función usted preparará su la pantalla como sigue:

3: {'x', 'y', 'f(x,y)'}
2: { ε Δx }
1: x_{final}

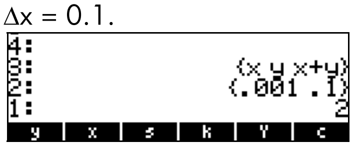
El valor en el primer nivel del pantalla es el valor de la variable independiente donde usted desea encontrar la solución, es decir, usted desea encontrar, $y_{final} = f_s(x_{final})$, donde $f_s(x)$ representa la solución a la ecuación diferencial. El segundo nivel de la pantalla puede contener solamente el valor de ε, y el paso Δx será tomado como un valor prefijado pequeño. Después de activar la función RKF, la pantalla mostrará las líneas:

2: {'x', 'y', 'f(x,y)'}
1: ε

El valor de la solución, y_{final}, estará disponible en la variable y. Esta función es apropiada para programar puesto que deja las especificaciones de la ecuación diferencial y la tolerancia en el pantalla, listas para una nueva solución. Note que la solución utiliza las condiciones iniciales x = 0 para y = 0. Si, son sus soluciones iniciales actuales son $x = x_{init}$ para $y = y_{init}$, usted puede agregar siempre estos valores a la solución proveída por RKF, teniendo presente la relación siguiente:

Solución RKF		Solución actual	
x	y	x	y
0	0	x_{init}	y_{init}
x_{final}	y_{final}	$x_{init} + x_{final}$	$y_{init} + y_{final}$

Las pantallas siguientes muestran la pantalla RPN antes y después de la aplicación de la función RKF ala ecuación diferencial dy/dx = x+y, ε = 0.001, Δx = 0.1.



Después de aplicar la función RKF, la variable y contiene el valor 4.3880...

Función RRK

Esta función es similar a la función de RKF, excepto que RRK (métodos de Rosenbrock y Runge-Kutta) requiere como una lista en el nivel 3 de la pantalla conteniendo los nombres de las variables independiente y dependiente y de la función que define la ecuación diferencial, así como las expresiones para la primera y segunda derivadas de la expresión. Así, la pantalla de entrada para esta función la pantalla es la siguiente:

3: {'x', 'y', 'f(x,y)' '∂f/∂x' '∂f/∂y' }
2: { ε Δx }
1: x_{final}

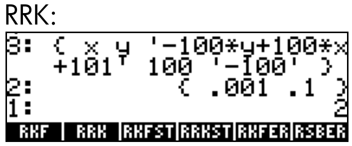
El valor en el primer nivel del pantalla es el valor de la variable independiente donde usted desea encontrar la solución, es decir, usted desea encontrar, $y_{final} = f_s(x_{final})$, donde $f_s(x)$ representa la solución a la ecuación diferencial. El segundo nivel de la pantalla puede contener solamente el valor de ε, y el paso Δx será tomado como un valor prefijado pequeño. Después de ejecutar la función RRK, la pantalla mostrará las líneas:

2: {'x', 'y', 'f(x,y)' '∂f/∂x' '∂f/∂y' }
1: { ε Δx }

El valor de la solución, y_{final}, estará disponible en la variable y.

Esta función se puede utilizar para solucionar las llamadas ecuaciones diferenciales "rígidas."

Las siguientes pantallas muestran la pantalla RPN antes y después uso de la función RRK:



El valor almacenado en la variable y es 3.00000000004.

Función RKFSTEP

Esta función utiliza una lista de entrada similar a la de la función RKF, así como la tolerancia para la solución, y un posible paso Δx, y produce la misma lista de la entrada, seguida por la tolerancia, y una estimación del paso siguiente en la variable independiente. La función produce la lista de la entrada, la tolerancia, y el paso siguiente en la variable independiente que satisface esa tolerancia. Así, la pantalla luce como sigue:

3: {'x', 'y', 'f(x,y)'}
2: ε
1: Δx

Después de aplicar esta función, el pantalla mostrará las líneas:

3: {'x', 'y', 'f(x,y)'}
2: ε
1: $(\Delta x)_{next}$

Por lo tanto, esta función se utiliza para determinar el tamaño apropiado de un paso del tiempo para satisfacer la tolerancia requerida.

Las siguientes pantallas muestran la pantalla RPN antes y después uso de la función RKFSTEP:

Estos resultados indican eso $(\Delta x)_{next}$ = 0.34049…

Función RRKSTEP

Esta función utiliza una lista de entrada similar a la de la función RRK, así como la tolerancia para la solución, un paso posible Δx, y un número (LAST) especificando el método pasado usado en la solución (1, si RKF fue utilizada, ó 2, si RRK fue utilizada). La función RRKSTEP produce la misma lista de la entrada, seguida por la tolerancia, una estimación del paso siguiente en la variable independiente, y el método actual (CURRENT) usado para llegar al paso siguiente. Así, la pantalla de entrada luce como sigue:

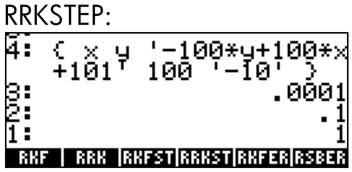
4: {'x', 'y', 'f(x,y)'}
3: ε
2: Δx
1: LAST

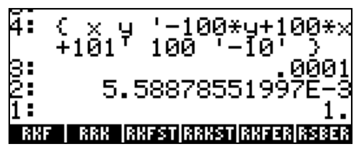
Después de activar esta función, la pantalla mostrará las líneas:

4: {'x', 'y', 'f(x,y)'}
3: ε
2: $(\Delta x)_{next}$
1: CURRENT

Así, esta función se utiliza para determinar el tamaño apropiado de un paso del tiempo ($(\Delta x)_{next}$) satisfacer la tolerancia requerida, y el método llegaba ese resultado (CURRENT).

Las pantallas siguientes muestran la pantalla RPN antes y después uso de la función RRKSTEP:





Estos resultados indican que $(\Delta x)_{next}$ = 0.00558… ye que el método RKF (CURRENT = 1) debe utilizarse.

Función RKFERR

Esta función produce un estimado del error absoluto para un paso dado al solucionar un problema como el descrito para la función RKF. La pantalla de entrada luce como sigue:

2: {'x', 'y', 'f(x,y)'}
1: Δx

Después de activar esta función, la pantalla mostrará las líneas:

4: {'x', 'y', 'f(x,y)'}
3: ε
2: Δy
1: error

Así, esta función se utiliza para determinar el incremento en la solución, Δy, así como el error absoluto (error).

Las siguientes pantallas muestran la pantalla RPN antes y después uso de la función RKFERR:

Estos resultados indican que Δy = 0.827… y el error = -1.89…$\times 10^{-6}$.

Función RSBERR

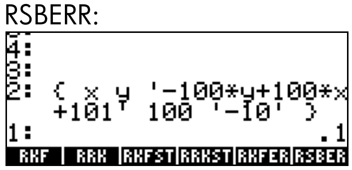
Esta función opera de manera similar a RKERR pero con los elementos de entrada de la función RRK. Por lo tanto, la pantalla de entrada lucirá como sigue:

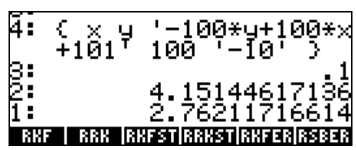
2: {'x', 'y', 'f(x,y)' '∂f/∂x' '∂f/vy' }
1: Δx

Después de activar la función, la pantalla mostrará las líneas:

4: {'x', 'y', 'f(x,y)' '∂f/∂x' '∂f/vy' }:
3: ε
2: Δy
1: error

Las siguientes pantallas muestran la pantalla RPN antes y después uso de la función RSBERR:





Estos resultados indican que Δy = 4.1514… y el error = 2.762…, para Δx = 0.1. Compruebe que, si Δx se reduce a 0.01, Δy = -0.00307… y el error = 0.000547.

Note: A medida que Ud. ejecuta las funciones en el menú DIFF, se producirán valores de x y y que se almacenan como variables en su calculadora. Los resultados proveídos por las funciones en esta sección dependen del valor actual de x y y. Por lo tanto, algunos de los resultados ilustrados anteriormente serán diferentes de lo que muestra su calculadora.

Capítulo 17
Aplicaciones a la probabilidad

En este Capítulo se proveen ejemplos de aplicaciones de las distribuciones de probabilidad predefinidas en la calculadora.

El sub-menú MTH/PROBABILITY.. - parte 1

El sub-menú MTH/PROBABILITY.. es accesible a través de la secuencia de teclas ← MTH . Habiendo seleccionado la opción "CHOOSE boxes" para señal de sistema número 117, el menú PROBABILITY.. presenta las siguientes funciones:

En esta sección se discuten las funciones COMB, PERM, ! (factorial), RAND, y RDZ.

Factoriales, combinaciones, y permutaciones

El factorial de un número entero n se define como: n! = n· (n-1) · (n-2)…3·2·1. Se adopta la convención de que, 0! = 1.

Los factoriales se utilizan en el cálculo del número permutaciones y combinaciones de objetos y elementos. Por ejemplo, el número de permutaciones de r elementos tomados de una colección de n elementos distintos se calcula como ${}_nP_r = n(n-1)(n-1)...(n-r+1) = n!/(n-r)!$.

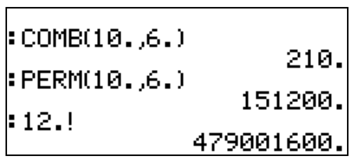
Así mismo, el número de combinaciones de r elementos de una colección de n elementos distintos se calcula como:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

En la calculadora se pueden calcular combinaciones, permutaciones, y factoriales utilizando las funciones COMB, PERM, y ! localizadas en el sub-menú MTH/PROBABILITY… La operación de estas funciones se describe a continuación:

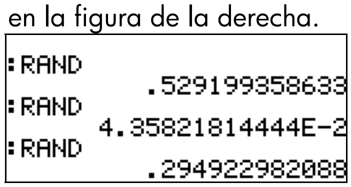
- COMB(n,r): Combinaciones de n elementos tomados de r en r
- PERM(n,r): Permutaciones de n elementos tomados de r en r
- n!: Factorial de un número entero positivo. Cuando x no es entero, x! Calcula la función $\Gamma(x+1)$, en la cual $\Gamma(x)$ es la función Gamma (véase el Capítulo 3). El símbolo del factorial (!) se puede obtener usando la secuencia de teclas ALPHA ↱ 2.

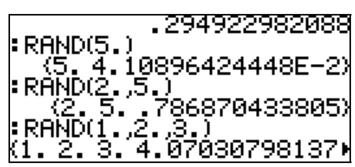
Algunos ejemplos de aplicación de estas funciones se muestran a continuación:



Números aleatorios

La calculadora posee un generador de números aleatorios que produce un número real uniformemente distribuido entre 0 y 1. El generador puede producir secuencias de números aleatorios. Sin embargo, después de cierto número de veces (de hecho, un número muy grande), la secuencia tiende a repetirse. Por esa razón, el generador de números aleatorios se refiere más correctamente como generador de números pseudo-aleatorios. Para generar un número aleatorio, utilícese la función RAND ("RANDom" es "aleatorio" en inglés) en el sub-menú MTH/PROBABILITY. La siguiente figure muestra varios números aleatorios producidos con la función RAND. Los números en la figura de la izquierda se producen al ejecutar la función RAND sin incluir un argumento. Si se adiciona una lista de argumentos a RAND, el número aleatorio generado se agrega a la lista usada como argumento como se muestra en la figura de la derecha.





Los generadores de números aleatorios, en general, funcionan tomando un valor, llamado la "semilla" del generador, y aplicando un cierto algoritmo matemático a esa "semilla" que genera un nuevo número (pseudo) aleatorio. Si usted desea generar una secuencia de número aleatorios y estar en capacidad de repetir la misma secuencia más adelante, usted puede cambiar la "semilla" del generador, usando la función RDZ(n), antes de generar nuevamente la secuencia. En esta expresión, la "semilla" es el valor n. Los generadores de números aleatorios operan de manera que la "semilla" se transforma en el primer número aleatorios de la serie. El número así generado sirve entonces como "semilla" para el número siguiente, etcétera. Al "re-sembrar" la secuencia con el mismo número inicial usted puede reproducir la misma secuencia de números aleatorios más de una vez. Por ejemplo, ejecútese lo siguiente:

RDZ(0.25) ENTER	Use 0.25 como la "semilla."
RAND() ENTER	Primer número aleatorio = 0.75285…
RAND() ENTER	Segundo número aleatorio = 0.51109…
RAND() ENTER	Tercer número aleatorio = 0.085429….
Re-comenzar la secuencia:	
RDZ(0.25) ENTER	Use 0.25 como la "semilla."
RAND() ENTER	Primer número aleatorio = 0.75285…
RAND() ENTER	Segundo número aleatorio = 0.51109…
RAND() ENTER	Tercer número aleatorio = 0.085429….

Para generar una secuencia de números aleatorios utilizar la función SEQ. Por ejemplo, para generar una lista de 5 números aleatorios utilícese, en modo ALG: `SEQ(RAND(),j,1,5,1)`. En modo RPN, utilice el programa siguiente:

« → n « 1 n FOR j RND NEXT n →LIST » »

Almacenarlo en la variable RLST (Random LiST, lista aleatoria), y use VAR 5 RLST para producir una lista de 5 números aleatorios.

La función RNDM(n, m) se puede utilizar para generar una matriz de n filas y m columnas con elementos que son números aleatorios enteros -1 y 1 (véase el Capítulo 10).

Distribuciones discretas de la probabilidad

Una variable al azar es una variable discreta si puede tomar solamente un número finito de valores. Por ejemplo, el número de días lluviosos en una localización dada se puede considerar una variable al azar discreta porque los contamos mientras que el número entero numera solamente. Si X representa una variable al azar discreta, la función masa de probabilidad se representa por f(x) = P[X=x], es decir, la probabilidad que la variable al azar X toma el valor x.

La función masa de la probabilidad debe satisfacer las condiciones que

f(x) >0, para toda x,

y

$$\sum_{all\ x} f(x) = 1.0$$

Se define una función de distribución cumulativa (cdf) como

$$F(x) = P[X \le x] = \sum_{k \le x} f(k)$$

Después, definiremos un número de funciones para calcular distribuciones discretas de la probabilidad. Sugerimos que usted cree un sub-directorio, por ejemplo, HOME\STATS\DFUN (Discrete FUNctions) donde definiremos la función masa de probabilidad y la función de distribución cumulativa para las distribuciones binomial y de Poisson.

Distribución binomial

La función masa de probabilidades de la distribución binomial se define por

$$f(n,p,x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}, \quad x = 0,1,2,\ldots,n$$

en la cual $(^{n}{}_{x})$ = C(n,x) es la combinación de n elementos tomados x a la vez. Los valores n y p son los parámetros de la distribución. El valor n representa el número de repeticiones de un experimento o de una observación que puedan tener uno de dos resultados, es decir, éxito y falla. Si la variable al azar X representa el número de éxitos en las repeticiones de n, entonces p representa la probabilidad de conseguir un éxito en cualquier repetición dada. La función de distribución acumulativa para la distribución binomial se escribe como

$$F(n,p,x) = \sum_{k=0}^{x} f(n,p,x), \quad x = 0,1,2,...,n$$

Distribución de Poisson

La función masa de probabilidades de la distribución de Poisson se escribe como

$$f(\lambda,x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,...,\infty .$$

En esta expresión, si la variable al azar X representa el número de ocurrencias de un acontecimiento o de una observación por unidad de tiempo, longitud, área, volumen, etc., entonces el parámetro λ representa el número promedio de ocurrencias por unidad de tiempo, longitud, área, volumen, etc. La función de distribución cumulativa para la distribución de Poisson se escribe:

$$F(\lambda,x) = \sum_{k=0}^{x} f(\lambda,x), \quad x = 0,1,2,...,\infty$$

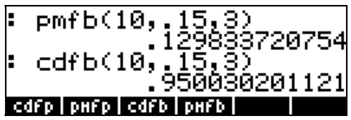
A continuación, utilícese la función DEFINE (⬅ DEF) para definir las siguientes funciones de masa (pmf) y cumulativas (cdf) de probabilidad:

```
DEFINE(pmfb(n,p,x) = COMB(n,x)*p^x*(1-p)^(n-x))
DEFINE(cdfb(n,p,x) = Σ(k=0,x,pmfb(n,p,k)))
DEFINE(pmfp(λ,x) = EXP(-λ)*λ^x/x!)
DEFINE(cdfp(λ,x) = Σ(k=0,x,pmfp(λ,x)))
```

Los nombres de la función representan (en inglés):

- pmfb: probability mass function for the binomial distribution
- cdfb: cumulative distribution function for the binomial distribution
- pmfp: probability mass function for the Poisson distribution
- cdfp: cumulative distribution function for the Poisson distribution

Los ejemplos de los cálculos que usan estas funciones se demuestran después:



Distribuciones continuas de la probabilidad

La distribución de la probabilidad para una variable al azar continua, X, está caracterizada por un función f(x) conocido como la función de densidad de la probabilidad (pdf). La función pdf tiene las características siguientes: f(x) > 0, para todo x, y

$$P[X < x] = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Se calculan las probabilidades usando la función de distribución cumulativa (cdf), F(x), definida por $P[X < x] = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi$, en la cual P[X<x] significa "la probabilidad que la variable al azar X es menor que el valor x".

En esta sección describimos varias distribuciones continuas de la probabilidad incluyendo las distribuciones gammas, exponenciales, beta, y de Weibull. Estas distribuciones se describen en cualquier libro de textos de la estadística. Algunas de estas distribuciones hacen uso la función gamma definida anterior, que es calculada en la calculadora usando la función factorial como Γ(x) = (x-1)!, para cualquier número real x.

La distribución gamma

La función de densidad de la probabilidad (pdf) para la distribución gamma se da cerca

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot \exp(-\frac{x}{\beta}), for \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0;$$

La función de distribución cumulativa (cdf) correspondiente sería dada por un integral que no tiene ninguna solución en forma cerrada.

La distribución exponencial

La distribución exponencial es la distribución gamma con $\alpha = 1$. Su pdf se escribe como

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \cdot \exp(-\frac{x}{\beta}), \, for \quad x > 0, \beta > 0,$$

mientras que su cdf se escribe como F(x) = 1 - exp(-x/β), para x>0, β >0.

La distribución beta

El pdf para la distribución gamma se escribe

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}, for \quad 0 < x < 1, \alpha > 0, \beta > 0$$

Como en el caso de la distribución gamma, el cdf correspondiente para la distribución beta también es dado por una integral sin la solución en forma cerrada.

La distribución de Weibull

La pdf de la distribución de Weibull se escribe

$$f(x) = \alpha \cdot \beta \cdot x^{\beta-1} \cdot \exp(-\alpha \cdot x^{\beta}), \quad for\ x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

Mientras que la cdf correspondiente se escribe

$$F(x) = 1 - \exp(-\alpha \cdot x^{\beta}), \quad for\ x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

Funciones para las distribuciones continuas

Para definir una colección de funciones que corresponden a las distribuciones gammas, exponenciales, beta, y de Weibull, primero hay que crear un sub-directorio que llamamos CFUN (Continuous FUNctions, en inglés) y defínanse las funciones siguientes (cámbiese a modo Aprox):

Gamma pdf: `'gpdf(x) = x^(α-1)*EXP(-x/β)/(β^α*GAMMA(α))'`

Gamma cdf: 'gcdf(x) = ∫(0,x,gpdf(t),t)'
Beta pdf:
' βpdf(x)= GAMMA(α+β)*x^(α-1)*(1-x)^(β-1)/(GAMMA(α)*GAMMA(β))'
Beta cdf: ' βcdf(x) = ∫(0,x, βpdf(t),t)'
Exponencial pdf: 'epdf(x) = EXP(-x/β)/β'
Exponencial cdf: 'ecdf(x) = 1 - EXP(-x/β)'
Weibull pdf: 'Wpdf(x) = α*β*x^(β-1)*EXP(-α*x^β)'
Weibull cdf: 'Wcdf(x) = 1 - EXP(-α*x^β)'

Utilizar la función DEFINE para definir todas estas funciones. Después, almacenar los valores de α y β, es decir, 1 STO▶ ALPHA ↱ A ENTER 2 STO▶ ALPHA ↱ B ENTER

Finalmente, para el cdf para los cdf gammas y beta, usted necesita corregir las definiciones del programa para agregar →NUM a los programas producidos por la función DEFINE. Por ejemplo, la cdf gamma, es decir, la función gcdf, se debe modificar como se muestra a continuación:

« → x '→NUM(∫ (0,x,gpdf(t),t))' »

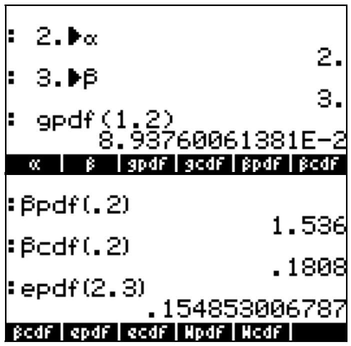
y almacenarse nuevamente en gcdf. Repetir el procedimiento para βcdf.

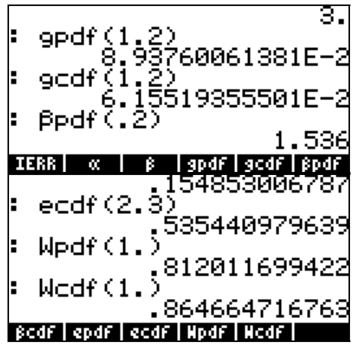
A diferencia de las funciones discretas definidas anterior, las funciones continuas definidas en esta sección no incluyen sus parámetros (α y/o β) en sus definiciones. Por lo tanto, usted no necesita inscribirlos en la exhibición para calcular las funciones. Sin embargo, esos parámetros deben ser definidos previamente almacenando los valores correspondientes en las variables α y β. Una vez se han almacenado todas las funciones y los valores α y β, usted pueden ordenar las etiquetas del menú usando la función ORDER. Para ejecutar la función ORDER use lo siguiente:

ORDER({'α','β','gpdf','gcdf','βpdf','βcdf','epdf','ecdf','Wpdf','Wcdf'})

Después de esta instrucción las etiquetas del menú se mostrarán de esta manera (Presione NXT para moverse a la segunda lista. Presione NXT una vez más para moverse a la primera lista):

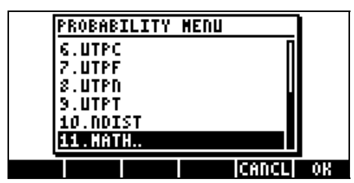
Algunos ejemplos del uso de estas funciones, para los valores de $\alpha = 2$, $\beta = 3$, se muestran a continuación. Notar la variable IERR que se muestra en la segunda pantalla. Esto resulta de una integración numérica para la función gcdf.





Distribuciones continuas para la inferencia estadística

En esta sección se presentan cuatro distribuciones de probabilidades que se utilizan regularmente para resolver problemas relacionados a la inferencia estadística, a saber: la distribución normal, la distribución de Student, la distribución de Chi cuadrada (χ^2), y la distribución F. Las funciones disponibles en la calculadora para evaluar probabilidades en estas distribuciones son NDIST, UTPN, UTPT, UTPC, y UTPF. Estas funciones están disponibles in el menú MTH/PROBABILITY presentado anteriormente. Para obtener estas funciones actívese el menú MTH (⬅ MTH) y selecciónese la opción PROBABILITY:



La pdf de la distribución normal

La expresión para la pdf de la distribución normal es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}],$$

en la cual μ es la media, y σ^2 es la varianza de la distribución. Para calcular el valor de la función de densidad de probabilidades, o fdp, f(x), para la distribución normal, utilícese la función NDIST(μ,σ^2,x). Por ejemplo, verifíquese que para una distribución normal, NDIST(1.0,0.5,2.0) = 0.20755374.

La cdf de la distribución normal

La calculadora así mismo provee la función UTPN para calcular la probabilidad del extremo superior de la distribución normal, es decir, UTPN(μ,σ^2, x) = P(X>x) = 1 - P(X<x), en la cual P() representa una probabilidad. Por ejemplo, verifíquese que para una distribución normal, con parámetros μ = 1.0, σ^2 = 0.5, UTPN(1.0,0.5,0.75) = 0.638163.

Diversos cálculos de la probabilidad para las distribuciones normales [X ~ N(μ,σ^2)] puede ser definido usando la función UTPN:

- P(X<a) = 1 - UTPN(μ, σ^2,a)
- P(a<X<b) = P(X<b) - P(X<a) = 1 - UTPN(μ, σ^2,b) - (1 - UTPN(μ, σ^2,a)) = UTPN(μ, σ^2,a) - UTPN(μ, σ^2,b)
- P(X>c) = UTPN(μ, σ^2,c)

Ejemplos: Usando μ = 1.5, y σ^2 = 0.5, determine:

P(X<1.0) = 1 - P(X>1.0) = 1 - UTPN(1.5, 0.5, 1.0) = 0.239750.
P(X>2.0) = UTPN(1.5, 0.5, 2.0) = 0.239750.
P(1.0<X<2.0) = F(1.0) - F(2.0) = UTPN(1.5,0.5,1.0) - UTPN(1.5,0.5,2.0) = 0.7602499 - 0.2397500 = 0.524998.

La distribución de Student

La distribución de Student-t, o distribución t, posee un solo parámetro ν, que se conoce como "los grados de libertad" de la distribución. La función de distribución de la probabilidad (pdf) se escribe:

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\cdot\sqrt{\pi\nu}}\cdot(1+\frac{t^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}}, -\infty < t < \infty$$

en la cual $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ es la función GAMMA definida en el Capítulo 3.

La calculadora provee valores del extremo superior de la función de distribución cumulativa, utilizando la función UTPT, dados los valores de ν y t, es decir, UTPT(ν,t) = P(T>t) = 1-P(T<t). La definición de esta función es, por lo tanto,

$$UTPT(\nu,t) = \int_t^{\infty} f(t)dt = 1 - \int_{-\infty}^{t} f(t)dt = 1 - P(T \le t)$$

Por ejemplo, UTPT(5,2.5) = 2.7245…E-2. Otros cálculos de la probabilidad para la t-distribución se pueden definir usando la función UTPT, como sigue:

- P(T<a) = 1 - UTPT(ν,a)
- P(a<T<b) = P(T<b) - P(T<a) = 1 - UTPT(ν,b) - (1 - UTPT(ν,a)) = UTPT(ν,a) - UTPT(ν,b)
- P(T>c) = UTPT(ν,c)

Ejemplos: Dado ν = 12, determine:

P(T<0.5) = 1-UTPT(12,0.5) = 0.68694..
P(-0.5<T<0.5) = UTPT(12,-0.5)-UTPT(12,0.5) = 0.3738…
P(T> -1.2) = UTPT(12,-1.2) = 0.8733…

La distribución Chi cuadrada

La distribución Chi cuadrada (χ^2) posee un solo parámetro ν, que se conoce como “los grados de libertad” de la distribución. La función de distribución de la probabilidad (pdf) se escribe como:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\cdot\Gamma(\frac{\nu}{2})}\cdot x^{\frac{\nu}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}, \nu > 0, x > 0$$

La calculadora provee valores del extremo superior de la función de distribución cumulativa, utilizando la función UTPC, dados los valores de ν y x. La definición de esta función es la siguiente:

$$UTPC(\nu,x) = \int_t^\infty f(x)dx = 1 - \int_{-\infty}^t f(x)dx = 1 - P(X \le x)$$

Para utilizar esta función, necesitamos los grados de libertad, ν, y el valor de la variable chi cuadrada, x, es decir, UTPC(ν,x). Por ejemplo, UTPC(5, 2.5) = 0.776495…

Diversos cálculos de la probabilidad para la distribución Chi-cuadrada se pueden definir usando la función UTPC, como sigue:

- P(X<a) = 1 - UTPC(ν,a)
- P(a<X<b) = P(X<b) - P(X<a) = 1 - UTPC(ν,b) - (1 - UTPC(ν,a)) = UTPC(ν,a) - UTPC(ν,b)
- P(X>c) = UTPC(ν,c)

Ejemplos: Dado ν = 6, determine:

P(X<5.32) = 1-UTPC(6,5.32) = 0.4965..
P(1.2<X<10.5) = UTPC(6,1.2)-UTPC(6,10.5) = 0.8717…
P(X> 20) = UTPC(6,20) = 2.769..E-3

La distribución F

La distribución F requiere 2 parámetros νN = grados de libertad del numerador, y νD = grados de libertad del denominador. La función de distribución de la probabilidad (pdf) se escribe

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu N + \nu D}{2}) \cdot (\frac{\nu N}{\nu D})^{\frac{\nu N}{2}} \cdot F^{\frac{\nu N}{2}-1}}{\Gamma(\frac{\nu N}{2}) \cdot \Gamma(\frac{\nu D}{2}) \cdot (1 - \frac{\nu N \cdot F}{\nu D})^{(\frac{\nu N + \nu D}{2})}}$$

La calculadora provee valores del extremo superior de la función de distribución cumulativa, utilizando la función UTPF, dados los parámetros νN y νD, y el valor de F. La definición de esta función es

$$UTPF(\nu N, \nu D, F) = \int_t^{\infty} f(F)dF = 1 - \int_{-\infty}^{t} f(F)dF = 1 - P(\Im \leq F)$$

Por ejemplo, para calcular UTPF(10,5, 2.5) = 0.161834…

Diversos cálculos de la probabilidad para la distribución de F se pueden definir usando la función UTPF, como sigue:

- P(F<a) = 1 - UTPF(νN, νD,a)
- P(a<F<b) = P(F<b) - P(F<a) = 1 -UTPF(νN, νD,b)- (1 - UTPF(νN, νD,a))
  = UTPF(νN, νD,a) - UTPF(νN, νD,b)
- P(F>c) = UTPF(νN, νD,a)

Ejemplo: Dado νN = 10, νD = 5, determine:

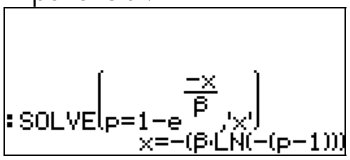
P(F<2) = 1-UTPF(10,5,2) = 0.7700…
P(5<F<10) = UTPF(10,5,5) – UTPF(10,5,10) = 3.4693..E-2
P(F>5) = UTPF(10,5,5) = 4.4808..E-2

Funciones de distribución cumulativas inversas

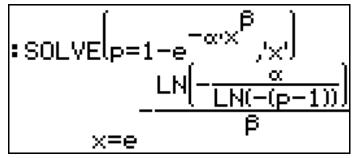
Para una variable al azar continua X con la función acumulativa de la densidad (cdf) F(x) = P(X<x) = p, para calcular la función de distribución acumulativa inversa necesitamos encontrar el valor de x, tal que x = $F^{-1}(p)$. Este valor es relativamente simple encontrar para los casos de las distribuciones exponenciales y de Weibull puesto que sus cdf tienen una expresión cerrada de la forma:

- Exponencial, F(x) = 1 - exp(-x/β)
- Weibull, F(x) = 1-exp($-\alpha x^{\beta}$)

(Antes de continuar, cerciorarse de borrar las variables α y β). Para encontrar los cdf inversos para estas dos distribuciones necesitamos solamente despejar x en estas expresiones, es decir, Exponencial:



Weibull:



Para las distribuciones gamma y beta las expresiones a resolver serán más complicado debido a la presencia de integrales, es decir,

- Gamma, $p = \int_0^x \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \cdot z^{\alpha-1} \cdot \exp(-\frac{z}{\beta})dz$
- Beta, $p = \int_0^x \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot z^{\alpha-1} \cdot (1-z)^{\beta-1}\,dz$

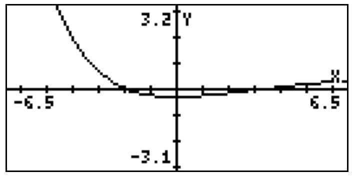
Una solución numérica con la calculadora no será factible debido a la integral involucrada en la expresión. Sin embargo, una solución gráfica es posible. Los detalles de cómo encontrar la raíz de un gráfico se presentan en el capítulo 12. Para asegurar resultados numéricos, cámbiese el CAS a modo Approx. La función a trazar para la distribución gamma es

Y(X) = ∫(0,X,z^(α-1)*exp(-z/β)/(β^α*GAMMA(α)),z)-p

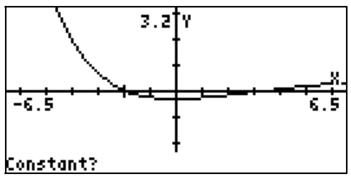
Para la distribución beta, la función a trazar es

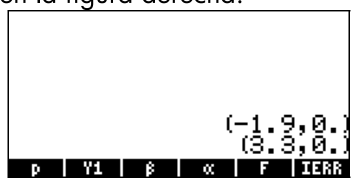
Y(X) =
∫(0,X,z^(α-1)*(1-z)^(β-1)*GAMMA(α+β)/(GAMMA(α)*GAMMA(β)),z)-p

Para producir el diagrama, es necesario almacenar valores de α, β, y p, antes de dibujar el diagrama. Por ejemplo, para α = 2, β = 3, y p = 0.3, el diagrama de Y(X) para la distribución gamma se muestra abajo. (Nótese por favor que, debido a la naturaleza complicada de la función Y(X), tomará unos minutos antes de que se produzca el gráfico. Sea paciente.)

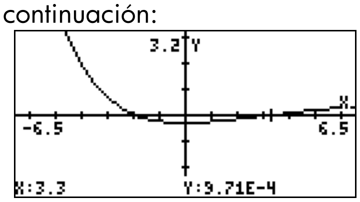


Hay dos raíces de esta función encontrada usando la función ROOT dentro del ambiente del diagrama. Debido a la integral en la ecuación, la raíz se aproxima y no será demostrada en la pantalla del diagrama. Usted recibirá el mensaje *Constant?* mostrado en la pantalla. Sin embargo, si usted presiona ENTER a este punto, la raíz aproximada será enumerada en la pantalla. Dos de las raíces se muestran en la figura derecha.

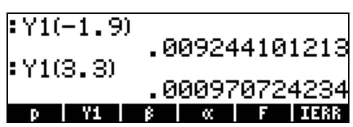




Alternativamente, usted puede utilizar la función TRACE (X,Y) para estimar las raíces remontando la curva cerca de sus interceptos con el eje x. Dos estimados se muestran a continuación:



Estas estimaciones sugieren soluciones x = -1.9 y x = 3.3. Usted puede verificar estas "soluciones" evaluando la función Y1(X) con X = -1.9 y X = 3.3, es decir,

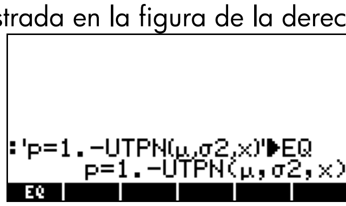


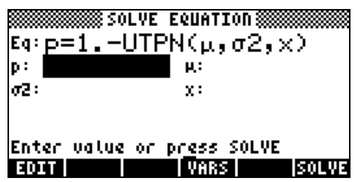
Para las distribuciones normal, Student t, Chi-cuadrada, y F, que son representados por las funciones UTPN, UTPT, UPTC, y UTPF en la calculadora, el cdf inverso puede ser encontrado al resolver las ecuaciones siguientes:

- Normal, p = 1 – UTPN(μ,σ2,x)
- Student t, p = 1 – UTPT(ν,t)
- Chi-cuadrada, p = 1 – UTPC(ν,x)
- F: p = 1 – UTPF(νN,νD,F)

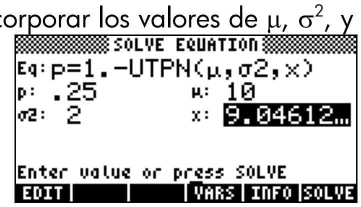
Notar que es el segundo parámetro en la función UTPN es σ2, y no σ^2, representando la varianza de la distribución. Así mismo, el símbolo ν (la letra griega minúscula nu) no está disponible en la calculadora. Usted puede utilizar, por ejemplo, γ (gamma) en vez de ν. La letra γ está disponible en la pantalla de caracteres especiales (↱ CHARS).

Por ejemplo, para obtener el valor de x para una distribución normal, con μ = 10, σ^2 = 2, y p = 0.25, almacénese la ecuación 'p=1-UTPN(μ,σ2,x)' en la variable EQ (véase la figura de la derecha siguiente). Entonces, lanzar actívense las soluciones numéricas, para conseguir la forma interactiva mostrada en la figura de la derecha:



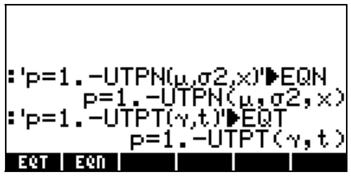


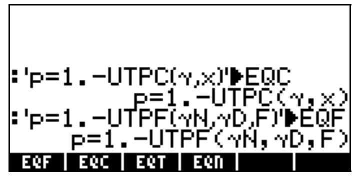
El paso siguiente es incorporar los valores de μ, σ^2, y p, y despejar x:



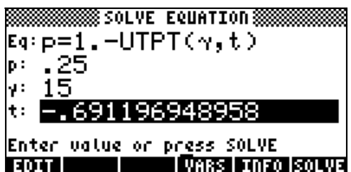
Esta forma interactiva se puede utilizar para solucionar cualesquiera de las cuatro variables implicadas en la ecuación para la distribución normal.

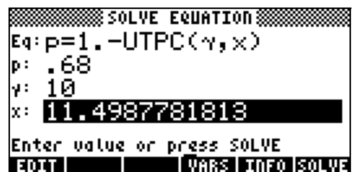
Para facilitar la solución de las ecuaciones que implican las funciones UTPN, UTPT, UTPC, y UTPF, usted puede crear un sub-directorio UTPEQ en el que se almacenarán las ecuaciones mostradas anteriormente:

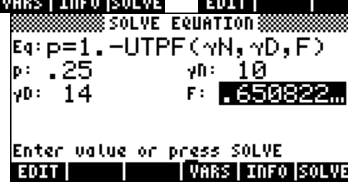




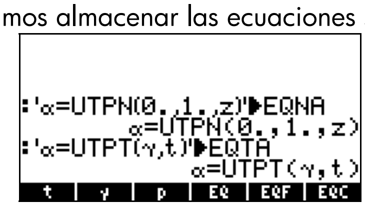
Así, a este punto, usted tendrá las cuatro ecuaciones disponibles para la solución. Usted necesita solamente activar una de las ecuaciones en la localidad EQ en la pantalla de soluciones numéricas y proceder con la solución de una de las variables. Los ejemplos de las funciones UTPT, UTPC, y UPTF se muestran a continuación:

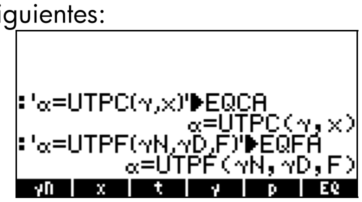




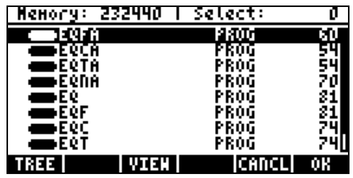


Nótese que en todos los ejemplos demostrados anteriormente, estamos trabajando con p = P(X<x). En muchos problemas de la inferencia estadística se trata de encontrar el valor de x para el cual P(X>x) = α. Además, para la distribución normal, trabajaremos muy probablemente con la distribución normal estándar en la cual μ = 0, y σ^2 = 1. La variable normal estándar se conoce típicamente como Z, de modo que el problema a solucionar es P(Z>z) = α. Para estos casos de los problemas de la inferencia estadística, podríamos almacenar las ecuaciones siguientes:

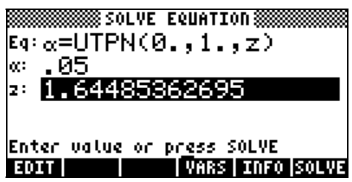


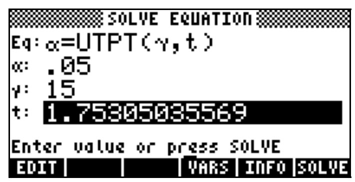


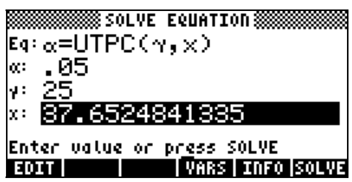
Con estas cuatro ecuaciones, siempre que usted activa las soluciones numéricas usted tiene las opciones siguientes:

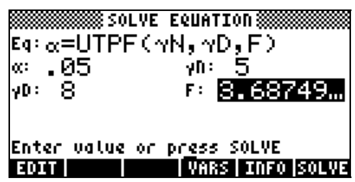


Los ejemplos de la solución de las ecuaciones EQNA, EQTA, EQCA, y EQFA se demuestran abajo:







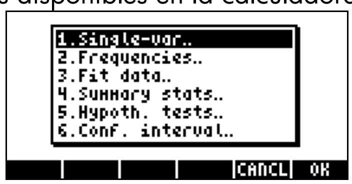


Capítulo 18
Aplicaciones Estadísticas

En este capítulo se presentan las aplicaciones estadísticas de la calculadora incluyendo estadísticas de una muestra, la distribución de frecuencia de datos, la regresión simple, intervalos de confianza, y la prueba de hipótesis.

Aplicaciones estadísticas preprogramadas

La calculadora provee las siguientes opciones de cálculos estadísticos accesibles a través de la combinación de teclas ↱ STAT (la tecla 5). Las aplicaciones estadísticas disponibles en la calculadora son:



Estas aplicaciones se presentan detalladamente en este capítulo. Para comenzar, sin embargo, demostramos cómo escribir datos para el análisis estadístico.

Escritura de datos

Las operaciones 1, 2, y 4 de la lista anterior requieren que los datos a operarse estén disponibles como columnas de la matriz ΣDAT. Esta acción se puede llevar a cabo escribiendo los datos en columnas utilizando el escritor de matrices, ↰ MTRW, y posteriormente utilizando la función STOΣ para almacenar la matriz en la variable ΣDAT.

Esta operación puede ser muy tediosa si existe un número grande de datos. En su lugar, usted puede escribir los datos como una lista (véase el capítulo 8) y convertir la lista en un vector columna usando el programa CRMC (véase el capítulo 10). Alternativamente, usted puede escribir el programa siguiente para convertir una lista en un vector de la columna. Escríbase el programa con la calculadora en modo RPN: « OBJ→ 1 2 →LIST →ARRY »

Almacénese el programa en una variable llamada LXC. Después de almacenar este programa en modo RPN usted puede también utilizarlo en modo ALG.

Para almacenar un vector de la columna en la variable ΣDAT utilice la función STOΣ, disponible a través del catálogo de funciones (CAT), use, por ejemplo, STOΣ (ANS(1)) en modo ALG.

Ejemplo 1 - Usando el programa LXC, definido anteriormente, crear un vector columna usando los datos siguientes: 2.1 1.2 3.1 4.5 2.3 1.1 2.3 1.5 1.6 2.2 1.2 2.5.

En modo RPG, escríbanse los datos en una lista:

{2.1 1.2 3.1 4.5 2.3 1.1 2.3 1.5 1.6 2.2 1.2 2.5 } ENTER LXC

Utilice la función STOΣ para almacenar los datos en ΣDAT.

Cálculos estadísticos para una sola variable

Se asume que un conjunto de datos de una variable fue almacenado como vector columna en la variable ΣDAT. Para tener acceso a los diversos programas del STAT, presiónese STAT. Presione OK para seleccionar la opción **1. Single-var..** Habrá disponible para usted una forma interactiva denominada **SINGLE-VARIABLE STATISTICS**, con los datos actualmente en su variable ΣDAT listados en forma de vector. Puesto que usted tiene solamente una columna, el campo **Col:** tendrá el valor 1 asignado. El campo **Type** determines si usted está trabajando con una muestra o una población, el valor pre-selecto es muestra (sample). Mover el cursor a la línea horizontal que precede los campos **Mean**, **Std Dev**, **Variance**, **Total**, **Maximum**, **Minimum**, presione la tecla ✓CHK para seleccionar esas medidas que usted desea como salida de este programa. Cuando esté listo, presione OK. Los valores seleccionados serán enumerados, etiquetado apropiadamente, en la pantalla de su calculadora.

Ejemplo 1 -- Para los datos almacenados en el ejemplo anterior, los resultados estadísticos son los siguientes:

Mean (media): 2.133, Std Dev (desviación estándar): 0.964,
Variance (varianza): 0.929, Total: 25.6, Maximum: 4.5, Minimum: 1.1

Definiciones

Las definiciones usadas para estas cantidades son las siguientes:

Suponga que usted tiene un número de datos x_1, x_2, x_3, …, representando diversas medidas de la misma variable discreta o continua x. El conjunto de todos los valores posibles de la cantidad x se refiere como la población de x Una población finita tendrá solamente un número fijo de elementos x_i. Si la cantidad x representa la medida de una cantidad continua, y puesto que, en teoría, tal cantidad puede tomar un número infinito de valores, la población de x en este caso es infinita. Si usted selecciona un subconjunto de una población, representado por los valores de n datos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, decimos que se ha seleccionado una muestra de valores de x.

Las muestras son caracterizadas por un número de medidas o de estadísticas. Hay medidas de tendencia central, tales como la media, la mediana, y la moda, y las medidas de dispersión, tales como el rango, la varianza, y la desviación estándar.

Medidas de tendencia central

La media (o media aritmética) de la muestra, $\bar{x}$, se define como el promedio aritmético de los elementos de muestra,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

El valor llamado `Total` obtenido anteriormente representa la adición de los valores de x, ó $\Sigma x_i = n \cdot \bar{x}$. Éste es el valor proporcionado por la calculadora bajo título `Mean`. Otros valores medios usados en ciertos usos son la media geométrica, x_g, o la media armónica, x_h, definidas como:

$$x_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}, \qquad \frac{1}{x_h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}.$$

Los ejemplos del cálculo de estas medidas, usando listas, están disponibles en el capítulo 8.

La mediana es el valor que divide a la muestra en la mitad cuando los elementos se ordenan en orden creciente. Si usted tiene un número impar, n, de elementos, la mediana de esta muestra es el valor situado en la posición (n+1)/2. si usted tiene un número par, n, de elementos, la mediana es el promedio de los elementos establecidos en las posiciones n/2 y (n+1)/2. Aunque las medidas estadísticas preprogramadas de la calculadora no incluyen el cálculo de la mediana, es muy fácil escribir un programa para calcular tal cantidad trabajando con listas. Por ejemplo, si usted desea utilizar los datos en la variable ΣDAT para encontrar el punto medio, escriba el programa siguiente en modo RPN (véase el capítulo 21 para más información sobre la programación en lenguaje UserRPL):

```
« → nC « RCLΣ DUP SIZE 2 GET IF 1 > THEN nC COL–
SWAP DROP OBJ→ 1 + →ARRY END OBJ→ OBJ→ DROP DROP DUP → n
« →LIST SORT IF 'n MOD 2 == 0' THEN DUP 'n/2' EVAL GET SWAP
'(n+1)/2' EVAL GET + 2 / ELSE '(n+1)/2' EVAL GET END "Mediana" →TAG
» » »
```

Almacénese este programa bajo el nombre de MED. Un ejemplo del uso de este programa se demuestra a continuación.

Ejemplo 2 – Para ejecutar el programa, primero usted necesita preparar su matriz ΣDAT. Entonces, escriba el número de la columna en ΣDAT cuya mediana usted desea encontrar, y presione MED. Para los datos actualmente en la variable ΣDAT (escrito en un ejemplo anterior), utilizar el programa MED para demostrar que la `Mediana: 2.15`.

La moda de una muestra se determina mejor a partir de un histograma, por lo tanto, dejamos su definición para una sección posterior.

Medidas de dispersión

La varianza (Var) de la muestra se define como $s_x^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$.

La desviación de estándar (St Dev) de la muestra es justamente la raíz cuadrada de la varianza, es decir, s_x.

El rango de la muestra es la diferencia entre los valores máximos y mínimos de la muestra. Dado que la calculadora, con las funciones estadísticas preprogramadas proporciona el máximo y los valores mínimos de la muestra, usted puede calcular fácilmente el rango.

Coeficiente de variación

El coeficiente de variación de una muestra combina la media, una medida de tendencia central, con la desviación estándar, una medida de dispersión, y se define, en forma de porcentaje, como: $V_x = (s_x/\ \bar{x})100$.

Muestra vs. población

Las funciones preprogramadas para la estadística de una sola variable usadas anteriormente se pueden aplicar a una población finita seleccionando `Type: Population` en la pantalla `SINGLE-VARIABLE STATISTICS`. La diferencia principal es que los valores de la varianza y de la desviación estándar se calculan usando n en el denominador de la varianza, en vez de (n-1).

Ejemplo 3 – Si usted repitiera el ejercicio en el ejemplo 1 de esta sección, usando población en vez de muestra en Type:, usted conseguirá los mismos valores para la media, el total, el máximo, y el mínimo. La varianza y la desviación estándar, sin embargo, serán dadas por: Variance: 0.852, Std Dev: 0.923.

Obtención de distribuciones de frecuencia

La operación **2. Frequencies..** en el menú STAT puede utilizarse para obtener la distribución de frecuencias de una colección de datos. Los datos deben existir en la forma de un vector columna almacenado en la variable ΣDAT. Para empezar la operación, presiónese ⬏ STAT ▼ OK. La forma interactiva que resulta contiene las siguientes opciones:

ΣDAT:	matriz que contiene los datos de interés
Col:	columna de ΣDAT bajo escrutinio

X-Min:	valor mínimo del límite de clase a utilizarse en la distribución de frecuencias (valor básico = -6.5)
Bin Count:	número de clases a utilizarse en la distribución de frecuencias (valor básico = 13).
Bin Width:	longitud uniforme de cada clase (valor básico = 1).

Definiciones

Para entender el significado de estos parámetros presentamos las definiciones siguientes: Dado un sistema de valores de los datos de n: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ enumerado sin ningún orden particular, se requiere a veces agrupar estos datos en una serie de clases contando la frecuencia o el número de los valores que corresponden a cada clase. (nota: las calculadoras se refiere a las clases como los compartimientos (inglés, bins)).

Suponer que las clases, o los compartimientos, serán seleccionados dividiendo el intervalo (x_{bot}, x_{top}), en k = Bin Count clases seleccionando un número de límites de la clase, es decir, $\{xB_1, xB_2, \ldots, xB_{k+1}\}$, de manera que la clase número 1 tiene límites xB_1-xB_2, la clase número 2 tiene límites xB_2- xB_3, y así sucesivamente. La última clase, cuyo número es k, será limitado por xB_k - xB_{k+1}.

El valor de x que corresponde al centro de cada clase se conoce como la marca de la clase, y se define como $xM_i = (xB_i + xB_{i+1})/2$, para i = 1, 2, …, k.

Si las clases se eligen tales que el tamaño de la clase es igual, entonces podemos definir el tamaño de la clase como el valor

$$\text{Bin Width} = \Delta x = (x_{max} - x_{min}) / k,$$

y los límites de la clase se pueden calcular como $xB_i = x_{bot} + (i - 1) * \Delta x$.

Un dato, x_j, j = 1, 2, …, n, pertenece a la clase i, si $xB_i \leq x_j < xB_{i+1}$

La operación **2. Frequencies..** en el menú STAT efectúa esta evaluación de frecuencias, y lleva cuenta de aquellos valores menores que el límite mínimo y mayores que el límite máximo de las clases. Estos últimos se refieren, en inglés, con el término outliers.

Ejemplo 1 – Para ilustrar mejor la obtención de distribuciones de frecuencia, deseamos generar un conjunto de datos relativamente grande, digamos 200 puntos, usando el procedimiento siguiente:

- Primero, siembra el generador de números aleatorios: RDZ(25) en modo ALG, o 25 ENTER RDZ en modo RPN (véase el capítulo 17).
- Escriba el programa siguiente en modo RPN:
  « → n « 1 n FOR j RAND 100 * 2 RND NEXT n →LIST » »
  y excepto él bajo el nombre de RDLIST (RanDom number LIST generator).
- Genere una lista 200 números usando RDLIST(200) en modo ALG, ó 200 ENTER RDLIST en modo RPN.
- Use el programa LXC (presentado anteriormente) para convertir la lista generada en un vector columna.
- Almacene el vector columna en la variable ΣDAT, usando STOΣ.
- Obtenga las estadísticas de los datos usando: ↱ STAT OK. Use Sample en la opción Type, y seleccione todas las opciones como resultados. Los resultados para este ejemplo son:

Mean: 51.0406, Std Dev: 29.5893…, Variance: 875.529…
Total: 10208.12, Maximum: 99.35, Minimum: 0.13

Esta información indica que nuestros datos se extienden de valores cerca de cero a los valores cerca de 100. Trabajando con números enteros, podemos seleccionar el rango de variación de los datos como (0,100). Para producir una distribución de frecuencia utilizaremos el intervalo (10,90) dividido en 8 compartimientos cada uno de ancho 10.

- Selecciónese la opción **2. Frequencies..** utilizando ↱ STAT ▼ OK. Los datos se encuentran ya almacenados en la variable ΣDAT, y la opción Col deberá tener el valor 1 asignado, dado que la matriz ΣDAT posee una sola columna.
- Cámbiense los valores de X-Min a 10, Bin Count a 8, y Bin Width a 10, y después presiónese la tecla OK.

Cuando se utiliza el modo RPN, los resultados de la distribución de frecuencias se muestran como un vector columna en el nivel 2 de la pantalla, y como un vector fila de dos componentes en el nivel 1. El vector en el nivel 1 representa el número de valores extremos (outliers) localizados fuera del intervalo usado para definir las clases, es decir, fuera del intervalo (10,90). Para el presente ejemplo, el autor obtuvo los valores [25. 22.], lo que indica la existencia de 25 valores menores que 10 y 22 valores mayores que 90. en el vector ΣDAT vector.

- Presiónese ◄ para remover el vector en el nivel 1. El resultado en el nivel 1 es el conteo de frecuencias en los datos en ΣDAT.

Esta tabla fue preparada a partir de la información que proporcionamos para generar la distribución de frecuencia, aunque la única columna producida por la calculadora es la columna de la frecuencia (f_i).

Clase No. i	Limites de clase XB_i	XB_{i+1}	Marca de clase Xm_i	Frecuencia f_i	Frecuencia cumulativa
< XB_1	outlier	menores		25	
1	10	20	15	18	18
2	20	30	25	14	32
3	30	40	35	17	49
4	40	50	45	17	66
5	50	60	55	22	88
6	60	70	65	22	110
7	70	80	75	24	134
k = 8	80	90	85	19	153
>XB_k	outliers	mayores		22	

Los números de la clase, y los límites de la clase son fáciles de calcular para las clases (o los compartimientos) de tamaño uniforme, y las marcas de clase es simplemente el promedio de los límites de clase para cada clase. Finalmente, la frecuencia cumulativa se obtiene agregando cada valor en la última columna, excepto la primera fila, a la frecuencia en la fila siguiente, y sustituyendo el resultado en la última columna de la fila siguiente. Así, para la segunda clase, la frecuencia cumulativa es 18+15 = 33, mientras que para la clase número 3, la frecuencia cumulativa es 33 + 16 = 49, etcétera. La frecuencia cumulativa representa la frecuencia de esos números que sean más pequeños que o la iguala al límite superior de cualquier clase dada.

Dado el vector (columna) de las frecuencias generadas por la calculadora, usted puede obtener un vector de la frecuencia acumulativa usando el programa siguiente en modo RPN:

« DUP SIZE 1 GET → freq k « {k 1} 0 CON → cfreq « 'freq(1,1)' EVAL 'cfreq(1,1)' STO 2 k FOR j 'cfreq(j-1,1) +freq(j,1)' EVAL 'cfreq (j,1)' STO NEXT cfreq » » »

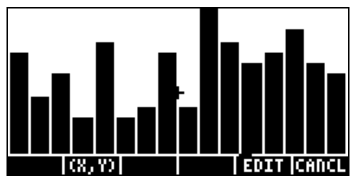
Almacénelo bajo el nombre de CFREQ. Utilice este programa para generar la lista de frecuencias cumulativas (presione CFREQ teniendo el vector columna de frecuencias en la pantalla). El resultado, para este ejemplo, es un vector columna que representa la última columna de la tabla anterior.

Histogramas

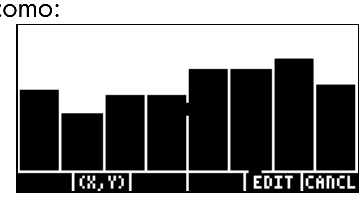
Un histograma es un diagrama de barras que muestra la distribución de la frecuencia como la altura de las barras a la vez que los límites de la clase muestran la base de las barras. Si usted tiene sus datos en bruto (es decir, los datos originales antes de que se haga la cuenta de la frecuencia) en la variable ΣDAT, usted puede seleccionar HISTOGRAM como su tipo (*Type*:) de gráfico y proporcionar la información con respecto al valor inicial de x, del número de compartimientos (clases), y de la anchura de los compartimientos, para generar el histograma. Alternativamente, usted puede generar el vector columna que contiene la distribución de frecuencia, como se mostró en el ejemplo anterior, almacenar este vector en ΣDAT, y seleccionar *Barplot* como el tipo de gráfico. En el ejemplo siguiente, le demostramos cómo utilizar el primer método para generar un histograma.

Ejemplo 1 – Con los 200 datos generados en el ejemplo anterior (almacenados como vector en ΣDAT), genérese un histograma usando X-Min = 10, Bin Count = 16, y Bin Width = 5.

- Primero, presione ← 2D/3D (simultáneamente, en modo RPN) para activar la pantalla PLOT SETUP. Dentro de esta pantalla, cambie la opción *Type*: a *histogram*, y compruebe que la opción *Col:* corresponde a1. Presione NXT OK.
- A continuación, presione ← WIN (simultáneamente, en modo RPN) para activar la pantalla PLOT WINDOW – HISTOGRAM. Dentro de esa pantalla modifique la información como sigue H-View: 10 90, V-View: 0 15, Bar Width: 5.
- Presione ERASE DRAW para generar el histograma siguiente:



- Presione CANCEL para volver a la pantalla anterior. Cambie las opciones V-view y Bar Width una vez más, usando los valores V-View: 0 30, Bar Width: 10. El nuevo histograma, basado en el mismo grupo de datos, ahora se muestra como:



El diagrama de la frecuencia, f_i, vs. las marcas de la clase, xM_i, se conoce como polígono de frecuencias. El diagrama de la frecuencia cumulativa contra los límites superiores de clase se conoce como la ojiva de la frecuencia cumulativa. Usted puede producir los diagramas de puntos que simulan estos dos diagramas incorporando los datos apropiados a las columnas 1 y 2 de una nueva matriz de ΣDAT y cambiando el tipo: *scatter* en la pantalla PLOT SETUP.

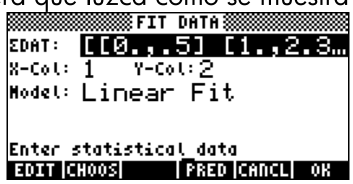
Ajustando datos a la función y = f(x)

El programa **3. Fit data..**, disponible como opción número 3 en el menú STAT, puede ser utilizado para ajustar funciones lineares, logarítmicas, exponenciales, y de potencia a los datos (x,y), almacenados en las columnas de la matriz ΣDAT. Para que este programa sea utilizable, usted necesita tener por lo menos dos columnas en su variable de ΣDAT.

<u>Ejemplo 1</u> – Ajustar una relación linear a los datos de la tabla siguiente:

x	0	1	2	3	4	5
y	0.5	2.3	3.6	6.7	7.2	11

- Almacénense los datos en las columnas de la matriz ΣDAT utilizando el escritor de matrices, y la función STOΣ.
- Para activar la opción **3. Fit data..**, utilícense las siguientes teclas: STAT ▼ ▼ OK La forma interactiva mostrará la matriz ΣDAT, ya existente. De ser necesario, cámbiense los valores en la forma interactiva de manera que luzca como se muestra a continuación:



- Para efectuar el ajuste de datos a la función, presione OK. El resultado de esta función, que se muestra a continuación para este ejemplo en particular, consiste de las siguientes tres líneas en modo RPN:

3: '0.195238095238 + 2.00857142857*X'
2: Correlation: 0.983781424465
1: Covariance: 7.03

El nivel 3 demuestra la forma de la ecuación. En este caso, y = 0.06924 + 0.00383 x. El nivel 2 demuestra el coeficiente de correlación de la muestra, y el nivel 1 muestra la covarianza de x-y.

Definiciones

Para una muestra de datos (x,y), definimos la covarianza de la muestra como

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

El coeficiente de correlación de la muestra para x,y se define como

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}.$$

En la cual s_x, s_y son las desviaciones estándar de x y de y, respectivamente,

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \qquad s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$$

Los valores s_{xy} y r_{xy} son los valores llamados "Covariance" y "Correlation," respectivamente, obtenido al usar la opción "Fit data" de la calculadora.

Relaciones linearizadas

Muchas relaciones curvilíneas "se enderezan" a una forma linear. Por ejemplo, los diversos modelos para el ajuste de los datos proporcionada por la calculadora se pueden linearizar según se describe a continuación.

Tipo de Ajuste	Modelo Actual	Modelo Linearizado	Variable Independ. ξ	Variable Depend. η	Covar. $s_{\xi\eta}$
Lineal	y = a + bx	[el mismo]	x	y	s_{xy}
Log.	y = a + b ln(x)	[el mismo]	ln(x)	y	$s_{ln(x),y}$
Exp.	y = a e^{bx}	ln(y) = ln(a) + bx	x	ln(y)	$s_{x,ln(y)}$
Potencia	y = a x^b	ln(y) = ln(a) + b ln(x)	ln(x)	ln(y)	$s_{ln(x),ln(y)}$

La covarianza de la muestra de ξ,η se escribe como

$$s_{\xi\eta} = \frac{1}{n-1}\sum(\xi_i - \overline{\xi})(\eta_i - \overline{\eta})$$

También se definen las varianzas de ξ y η, respectivamente, como

$$s_{\xi}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2 \qquad s_{\eta}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\eta_i - \overline{\eta})^2$$

El coeficiente de correlación de la muestra $r_{\xi\eta}$ es $r_{\xi\eta} = \dfrac{s_{\xi\eta}}{s_{\xi} \cdot s_{\eta}}$

La forma general de la ecuación de la regresión es $\eta = A + B\xi$.

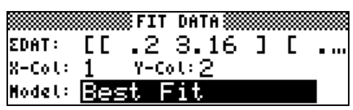
Ajuste óptimo de los datos

La calculadora puede determinarse qué relación linear o linearizada ofrece el mejor ajuste para un sistema de datos (x,y). Ilustraremos el uso de esta característica con un ejemplo. Suponer que usted desea encontrar cual de las funciones proveídas proporciona el mejor ajuste para los datos siguientes:

x	0.2	0.5	1	1.5	2	4	5	10
y	3.16	2.73	2.12	1.65	1.29	0.47	0.29	0.01

Primero, escríbanse los datos como una matriz, usando el escritor de matrices, o escribiendo dos listas de datos que corresponden a x y a y, y utilice el programa CRMC presentado en el Capítulo 10. A continuación, almacene esta matriz en la matriz estadística ΣDAT, usando la función STOΣ.

Finalmente, active la opción de ajuste de datos usando: → STAT ▼ ▼ OK . La pantalla muestra la matriz ΣDAT actual. Cámbiense los parámetros a como se muestra a continuación, de ser necesario:



Presione OK, para obtener:

1: '3.99504833324*EXP(-.579206831203*X)'
2: Correlation: -0.996624999526
3: Covariance: -6.23350666124

El ajuste óptimo para los datos es, por lo tanto, $y = 3.995\ e^{-0.58 \cdot x}$.

Obtención de medidas estadísticas adicionales

La aplicación **4. Summary stats..** en el menú STAT puede ser útil en algunos cálculos de las estadísticas de la muestra. Para comenzar, presione → STAT una vez más, y seleccione la cuarta opción usando la tecla ▼, y presione OK. La forma de la entrada que resulta contiene los campos siguientes:

ΣDAT: la matriz que contiene los datos de interés.
X-Col, Y-Col: estas opciones se aplican solamente cuando usted tiene más de dos columnas en la matriz ΣDAT. Los valores pre-definidos son tales que la columna de x es la columna 1, y la columna de y es la columna 2.
_Σ**X** _ Σ**Y…**: medidas estadísticas que usted puede elegir como resultados de este programa al escoger el campo apropiado usando [✓CHK] cuando se selecciona ese campo.

Muchas de esta estadísticas se utilizan para calcular las estadísticas de dos variables (x,y) que se puedan relacionar por una función y = f(x). Por lo tanto, este programa puede considerarse como compañero para programar **3. Fit data..**

Ejemplo 1 – Para los datos x-y actualmente en ΣDAT, obténganse todas las estadística sumaria.

- Para activar la opción **summary stats…**, utilícense las teclas: ↱ STAT ▼ ▼ ▼ OK
- Selecciónense los números de las columnas en ΣDAT correspondiente a los datos x-y. En el presente ejemplo selecciónese: X-Col: 1, y Y-Col: 2.
- Utilizando la tecla ✓CHK selecciónense todas las medidas estadísticas, disponibles en la forma SUMMARY STATISTICS, es decir, _ΣX, _ΣY, etc.
- Presiónese OK para obtener los siguientes resultados:

ΣX: 24.2, ΣY: 11.72, ΣX2: 148.54, ΣY2: 26.6246, ΣXY: 12.602, NΣ:8

Nota: Existen dos más aplicaciones en el menú STAT, a saber, **5. Hypth. tests..** y **6. Conf. Interval..** Estas dos opciones serán discutidas más adelante en el capítulo.

Cálculo de percentiles

Los percentiles son medidas que dividen una colección de datos en 100 porciones. El procedimiento básico para calcular el percentil100·p (0 < p < 1) en una muestra del tamaño n se muestra a continuación:

1. Ordenar las n observaciones de la más pequeño a la más grande.
2. Calcular el producto n·p
   A. Si n·p no es un entero, redondearlo al entero siguiente y determinar el valor ordenado correspondiente.
   B. Si n·p es entero, digamos k, calcular la media de los datos k y (k-1) de las observaciones.

Note: Regla de redondeo del número entero, para un número entero x.yz…, si y ≥ 5, redondear a x+1; si y < 5, redondear a x.

Este algoritmo se puede implementar en el programa siguiente escrito en modo de RPN (véase el Capítulo 21 para información sobre programación):

« SORT DUP SIZE → p X n « n p * → k « IF k CEIL k FLOOR - NOT THEN X k GET X k 1 + GET + 2 / ELSE k 0 RND X SWAP GET END » » »

el cuál almacenaremos en la variable %TILE (percent-tile). Este programa requiere como entrada un valor p en el intervalo 0 a 1, representando el percentil 100p, y una lista de valores. El programa produce el percentil 100p de la lista.

Ejemplo 1 - Determine el percentil 37% de la lista { 2 1 0 1 3 5 1 2 3 6 7 9}. En modo RPN, escriba 0.27 ENTER { 2 1 0 1 3 5 1 2 3 6 7 9} ENTER %TILE. En modo ALG, escriba %TILE(0.27,{2,1,0,1,3,5,1,2,3,6,7,9}. El resultado es 1.

El menú de teclado STAT

Las funciones estadísticas preprogramadas, descritas anteriormente, son accesibles a través de un menú de teclado denominado STAT. El menú de teclado STAT se puede activar usando, en modo RPN, la instrucción: 96 MENU

Usted puede crear su propio programa, llamado, por ejemplo, STAT, para activar el menú STAT directamente. El contenido de este programa es simplemente: « 96 MENU ».

El menú de teclado STAT contiene los siguientes menús:

Presione la tecla que corresponde a cualesquiera de estos sub-menús para acceder a las diversas funciones que se describen a continuación.

El sub-menú DATA

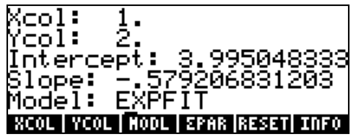
El sub-menú DATA contiene funciones para manipular la matriz estadística ΣDATA:

La operación de estas funciones se describen a continuación:

Σ+ : agregar una fila en el nivel 1 al final de la matriz ΣDATA.
Σ- : remueve la última fila en la matriz ΣDATA coloca en el nivel de 1 de la pantalla. La matriz ΣDATA así modificada permanece en la memoria.
CLΣ : borra la matriz ΣDATA actual.
ΣDAT: copia la matriz ΣDATA actual al nivel 1 de la pantalla.
← ΣDAT: almacena la matriz en el nivel 1 de la pantalla en la variable ΣDATA.

El sub-menú ΣPAR

El sub-menú ΣPAR contiene funciones usadas para modificar parámetros estadísticos. Los parámetros mostrados a continuación corresponden al ejemplo anterior del ajuste de datos a una función y = f(x).



Los parámetros mostrados en la pantalla son los siguientes:
Xcol: indica la columna de SDATA que representa x (Pre-definido: 1)
Ycol: indica la columna de SDATA que representa y (Pre-definido: 2)
Intercept: muestra intercepto del ajuste de datos más reciente (Pre-definido: 0)
Slope: muestra pendiente del ajuste de datos más reciente (Pre-definido: 0)
Model: muestra modelo de ajuste actual (Pre-definido: LINFIT)

Las funciones mostradas en las teclas de menú operan de la forma siguiente:
XCOL: escrita como n XCOL, cambia Xcol a n.
YCOL: escrita como n YCOL, cambia Ycol a n.
ΣPAR: muestra parámetros estadísticos.
RESET: reajustar los parámetros a los valores prefijados
INFO: muestra parámetros estadísticos

El sub-menú MODL dentro de ΣPAR
Este sub-menú contiene las funciones que permiten cambiar el modelo de ajuste de datos a LINFIT, LOGFIT, EXPFIT, PWRFIT o BESTFIT al presionar la tecla apropiada.

El sub-menú 1VAR

El sub-menú 1VAR contiene funciones que se utilizan para calcular las estadísticas de columnas en la matriz de ΣDATA

Las funciones disponibles son las siguientes:

TOT: muestra la suma de cada columna en la matriz ΣDATA.
MEAN: muestra el promedio de cada columna en la matriz ΣDATA.
SDEV: muestra la desviación de estándar de cada columna en la matriz ΣDATA.

MAXΣ: muestra valor máximo de cada columna en la matriz ΣDATA.
MINΣ: muestra valor mínimo de cada columna en la matriz ΣDATA.
BINS: usada como x_s, Δx, n [BINS], provee la distribución de frecuencias en los datos de la columna Xcol en la matriz ΣDATA con las clases definidas por $[x_s,x_s+\Delta x]$, $[x_s,x_s+2\Delta x]$,…, $[x_s,x_s+n\Delta x]$.
VAR: muestra la varianza de cada columna de la matriz ΣDATA.
PSDEV: muestra la desviación estándar de la población (basada en n en vez de (n-1)) de cada columna en la matriz de ΣDATA.
PVAR: muestra la varianza de la población de cada columna en la matriz ΣDATA.

El sub-menú PLOT

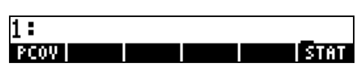
El sub-menú PLOT contiene funciones que se utilizan para producir diagramas con los datos en la matriz ΣDATA.

Las funciones incluidas son:

BARPL: produce un diagrama de barras con datos en la columna Xcol de la matriz ΣDATA.
HISTP: produce el histograma de los datos en la columna Xcol en la matriz ΣDATA, usando 13 clases (valor predefinido) a menos que se modifique el tamaño de las clases usando la función BINS en el sub-menú 1VAR (véase sección anterior).
SCATR: produce un diagrama de los datos en la columna Ycol de la matriz de SDATA vs. los datos en la columna Xcol de la matriz de ΣDATA. La ecuación que resulta del ajuste de estos datos será almacenada en la variable EQ.

El sub-menú FIT

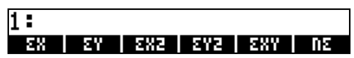
El sub-menú FIT contiene funciones usadas para ajustar ecuaciones a los datos en las columnas Xcol y Ycol de la matriz ΣDATA.



Las funciones disponibles en este sub-menú son:
ΣLINE: provee la ecuación correspondiente al ajuste más reciente
LR: proporciona el intercepto y la pendiente del ajuste más reciente
PREDX: usada como y PREDX, dado y calcular x para el ajuste y = f(x).
PREDY: usada como x PREDY, dado x calcular y para el ajuste y = f(x).
CORR: provee el coeficiente de correlación para el ajuste más reciente.
COV: provee la covarianza de la muestra para el ajuste más reciente.
PCOV: muestra la covarianza de la población para el ajuste más reciente.

El sub-menú SUMS

El sub-menú SUMS contiene funciones usadas para obtener medidas estadísticas adicionales para los datos en las columnas Xcol y Ycol de la matriz ΣDATA.



ΣX : provee la suma de valores en la columna Xcol.
ΣY : provee la suma de valores en la columna Ycol .
ΣX^2 : provee la suma de cuadrados de valores en la columna de Xcol.
ΣY^2 : provee la suma de cuadrados de valores en la columna de Ycol.
ΣX*Y: provee la suma de x·y, es decir, los productos de datos en las columnas Xcol y Ycol.
NΣ : provee el número de columnas en la matriz de ΣDATA.

Ejemplo de las operaciones del menú STAT

Sea ΣDATA la matriz

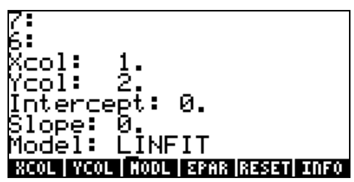
$$\begin{bmatrix} 1.1 & 3.7 & 7.8 \\ 3.7 & 8.9 & 101 \\ 2.2 & 5.9 & 25 \\ 5.5 & 12.5 & 612 \\ 6.8 & 15.1 & 2245 \\ 9.2 & 19.9 & 24743 \\ 10.0 & 21.5 & 55066 \end{bmatrix}$$

- Escriba la matriz en el nivel 1 de la pantalla utilizando el escritor de matrices.
- Para almacenar la matriz en ΣDATA, use: DATA ← ΣDAT
- Calcular las estadísticas de cada columna: STAT 1VAR:

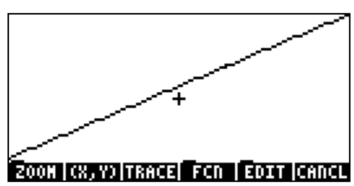
TOT	produce [38.5 87.5 82799.8]
MEAN	produce [5.5. 12.5 11828.54…]
SDEV	produce [3.39… 6.78… 21097.01…]
MAXΣ	produce [10 21.5 55066]
MINΣ	produce [1.1 3.7 7.8]
NXT VAR	produce [11.52 46.08 445084146.33]
PSDEV	produce [3.142… 6.284… 19532.04…]
PVAR	produce [9.87… 39.49… 381500696.85…]

- Generar un diagrama de los datos en las columnas 1 y 2 y ajustar una línea recta a los mismos:

STAT ΣPAR RESET reajusta parámetros estadísticos



NXT STAT PLOT SCATR produce el diagrama
STATL dibuja los datos ajustados como línea recta



CANCL regresa a la pantalla principal

- Determine la ecuación apropiada y sus estadísticas:

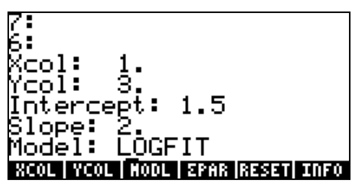
STAT FIT ΣLINE	produce `'1.5+2*X'`
LR	produce `Intercept: 1.5, Slope: 2`
3 PREDX	produce 0.75
1 PREDY	produce 3. 50
CORR	produce 1.0
COV	produce 23.04
NXT PCOV	produce 19.74...

- Obtener estadísticas adicionales para columnas 1 y 2: STAT SUMS:

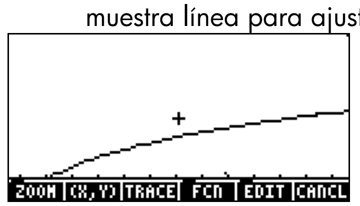
ΣX	produce 38.5
ΣY	produce 87.5
ΣX2	produce 280.87
ΣY2	produce 1370.23
ΣXY	produce 619.49
NΣ	produce 7

- Ajustar datos en 1 (x) y 3 (y) usando un ajuste logarítmico:

NXT STAT ΣPAR 3 YCOL	seleccionar Ycol = 3, y
MODL LOGFI	seleccionar Model = Logfit

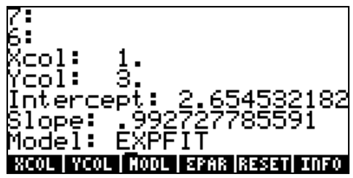


NXT STAT PLOT SCATR	produce diagrama de y vs. x
STATL	muestra línea para ajuste logarítmico



Obviamente, el ajuste logarítmico no es la mejor opción
CANCL   regresa a la pantalla normal.

- Seleccione el ajuste óptimo usando:
  STAT ΣPAR MODL BESTF   muestra EXPFIT como el ajuste óptimo



NXT STAT FIT ΣLINE   produce '2.6545*EXP(0.9927*X)'
CORR   produce 0.99995… (buena correlación)
2300 PREDX   produce 6.8139
5.2 PREDY   produce 463.37
NXT STAT PLOT SCATR   produce diagrama y vs. x
STATL   muestra línea para ajuste actual

- Regreso al menú STAT, use: NXT STAT
- Para recobrar el menú de variables: VAR.

Intervalos de confianza

La inferencia estadística es el proceso de obtener conclusiones sobre una población basadas en los resultados de una muestra. Para que los datos de la muestra sean significativos, la muestra debe ser aleatoria, es decir, la selección de una muestra particular debe tener la misma probabilidad que la de cualquier otra muestra posible dentro de una población dada. Los siguientes son algunos términos relevantes al concepto del muestreo aleatorio:

- Población: colección de todas las observaciones concebibles de un proceso o de una cualidad de un componente.
- Muestra: subconjunto de una población
- Muestra aleatoria: una muestra representativa de la población.
- Variable aleatoria: función real definida en un espacio de muestra. Puede ser discreta o continua.

  Si la población sigue cierta distribución de la probabilidad que depende de un parámetro θ, una muestra aleatoria de observaciones ($X_1,X_2,X_3,\ldots,X_n$), de tamaño n, puede usarse para estimar θ.

- Distribución de muestras: la distribución conjunta de la probabilidad de $X_1,X_2,X_3,\ldots,X_n$.
- Una estadística: cualquier función de las observaciones que sea cuantificable y no contenga ningún parámetro desconocido. Una estadística es una variable aleatoria que permite evaluar un parámetro.
- Estimado puntual: cuando se obtiene un valor del parámetro θ.
- Intervalo de confianza: un intervalo numérico que contiene el parámetro θ con cierto nivel de probabilidad.
- Estimador: regla o método de evaluación del parámetro θ.
- Estimado: valorar que el estimador produce para un caso particular.

Ejemplo 1 -- Sea X el tiempo (horas) requerido para completar un proceso de fabricación específico. Dada la muestra siguiente de valores de X: 2.2 2.5 2.1 2.3 2.2. La población de donde se toma esta muestra es la colección de todos los valores posibles del tiempo de proceso, por lo tanto, es una población infinita. Suponga que el parámetro de la población que estamos intentando estimar es la media, μ. Utilizaremos como estimador la media de la muestra, $\bar{X}$, definido por (una regla): $\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Para la muestra bajo consideración, el estimado de μ es la estadística de la muestra $\bar{x}$ = (2.2+2.5+2.1+2.3+2.2)/5 = 2.36. Este valor de $\bar{X}$, es decir $\bar{x}$ = 2.36, constituye un estimado puntual del parámetro de la población μ.

Evaluación de los intervalos de confianza

El nivel siguiente de inferencia es la evaluación de un intervalo, es decir, en vez de obtener un solo valor de un estimador se proveen dos estadísticas, a y b, las cuales definen un intervalo que contiene el parámetro θ con cierto nivel de la probabilidad. Los puntos extremos del intervalo se conocen como límites de confianza, y el intervalo (a,b) se conoce como el intervalo de confianza.

Definiciones

Sea (C_l,C_u) un intervalo de la confianza que contiene un parámetro desconocido θ.

- El nivel de la confianza o coeficiente de confianza es la cantidad $(1-\alpha)$, en la cual $0 < \alpha < 1$, tal que $P[C_l < \theta < C_u] = 1 - \alpha$, donde P[ ] representa la probabilidad (ver el Capítulo 17). La expresión anterior define los límites de confianza bilaterales.
- Un intervalo unilateral inferior se define por $Pr[C_l < \theta] = 1 - \alpha$.
- Un intervalo unilateral superior se define por by $Pr[\theta < C_u] = 1 - \alpha$.
- El parámetro α se conoce como el nivel de significado. Valores típicos de α son 0.01, 0.05, 0.1, correspondiendo a niveles de confianza de 0.99, 0.95, y0.90, respectivamente.

Intervalos de confianza para la media de la población cuando se conoce la varianza de la población

Sea $\bar{X}$ la media de una muestra aleatoria de tamaño n, extraída de una población infinita con una desviación de estándar conocida σ. El intervalo de confianza centrado, bilateral, de nivel $100(1-\alpha)$ % [i.e., 99%, 95%, 90%, etc.], para la media de la población μ es ($\bar{X}-z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}$, $\bar{X}+z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}$), en el cual $z_{\alpha/2}$ es una variable aleatoria normal estándar que se excede con una probabilidad de α /2. El error estándar de la media de la muestra, $\bar{X}$, es $\sigma/\sqrt{n}$.

Los límites unilaterales de confianza superior e inferior a nivel $100(1-\alpha)$ % para la media de la población μ son, respectivamente, $X+z_\alpha\cdot\sigma/\sqrt{n}$, y $\bar{X}-z_\alpha\cdot\sigma/\sqrt{n}$. Así, se define un intervalo de confianza unilateral inferior como $(-\infty , X+z_\alpha\cdot\sigma/\sqrt{n})$, mientras que el intervalo de confianza unilateral superior es

$(\bar{X}-z_\alpha\cdot\sigma/\sqrt{n},+\infty)$. Nótese que en estos dos intervalos anteriores utilizamos el valor z_α, en vez de $z_{\alpha/2}$.

En general, el valor z_k en la distribución normal estándar se define como aquel valor de z cuya probabilidad de excedencia sea k, es decir, $\Pr[Z>z_k] = k$, ó $\Pr[Z<z_k] = 1 - k$. La distribución normal fue descrita en el Capítulo 17.

Intervalos de confianza para la media de la población cuando la varianza de la población es desconocida

Sean $\bar{X}$ y S, respectivamente, la media y desviación estándar de una muestra aleatoria de tamaño n, extraída de una población infinita que sigue la distribución normal con una desviación de estándar desconocida σ. El intervalo de confianza bilateral centrado para la media de la población, μ, a nivel $100\cdot(1-\alpha)$ % [i.e., 99%, 95%, 90%, etc.] es $(\bar{X}-t_{n-1,\alpha/2}\cdot S/\sqrt{n},\ \bar{X}+t_{n-1,\alpha/2}\cdot S/\sqrt{n})$, en la cual $t_{n-1,\alpha/2}$ es la variable de la distribución Student t con $\nu = n-1$ grados de libertad y probabilidad $\alpha/2$ de excedencia.

Los límites de confianza superior e inferior a nivel $100\cdot(1-\alpha)$ % para la media de la población μ son, respectivamente,

$$X + t_{n-1,\alpha/2}\cdot S/\sqrt{n}\ ,\ \text{y}\ \ \bar{X}- t_{n-1,\alpha/2}\cdot S/\sqrt{n}.$$

Muestras pequeñas y muestras grandes

El comportamiento de la distribución de Student t es tal que para n>30, la distribución prácticamente la misma que la distribución normal estándar. Así, para las muestras mayores de 30 elementos cuando la varianza de la población es desconocida, usted puede utilizar el mismo intervalo de confianza que cuando se conoce la varianza de la población, pero substituyendo σ por S. Las muestras para las cuales n>30 se refieren típicamente como muestras grandes, en caso contrario son muestras pequeñas.

Intervalo de confianza para una proporción

Una variable aleatoria discreta X sigue una distribución de Bernoulli si X puede tomar solamente dos valores, X = 0 (falla), y X = 1 (éxito). Sea X ~

Bernoulli(p), en la cual p es la probabilidad de éxito, entonces la media, o la esperanza matemática, de X es E[X] = p, y su varianza es Var[X] = p(1-p).

Si un experimento que involucra a X se repite n veces, y con k resultados favorables, un estimado de p se calcula como p' = k/n, mientras que el error estándar de p' es $\sigma_{p'} = \sqrt{(p\cdot(1-p)/n)}$. En la práctica, la estimación de la muestra para p, es decir, p ' reemplaza p en la fórmula del error estándar.

Para muestra grande, n>30, y n·p> 5 y n·(1-p)>5, la distribución del muestreo es casi completamente normal. Por lo tanto, a nivel 100(1-α)% el intervalo de confianza centrado y bilateral para la media p de la población es $(p'+z_{\alpha/2}\cdot\sigma_{p'}, p'+z_{\alpha/2}\cdot\sigma_{p'})$. Para una muestra pequeña (n<30), el intervalo puede ser estimado como $(p'-t_{n-1,\alpha/2}\cdot\sigma_{p'},p'+t_{n-1,\alpha/2}\cdot\sigma_{p'})$.

Distribución del muestreo de diferencias y sumas de estadísticas

Sean S_1 y S_2 estadísticas independientes de dos poblaciones basadas en muestras de los tamaños n_1 y n_2, respectivamente. También, sean las medias y los errores estándares respectivos de las distribuciones del muestreo de esa estadística μ_{S1} y μ_{S2}, y σ_{S1} y σ_{S2}, respectivamente. Las diferencias entre la estadística de las dos poblaciones, S1-s2, tienen una distribución del muestreo con media $\mu_{S1-S2} = \mu_{S1} - \mu_{S2}$, y error estándar $\sigma_{S1-S2} = (\sigma_{S1}{}^2 + \sigma_{S2}{}^2)^{1/2}$. Así mismo, la suma de dos estadísticos S_1+S_2 tiene una media $\mu_{S1+S2} = \mu_{S1} + \mu_{S2}$, y un error estándar $\sigma_{S1+S2} = (\sigma_{S1}{}^2 + \sigma_{S2}{}^2)^{1/2}$.

Estimadores para la media y desviación estándar de la diferencia y de la suma de las estadísticas S_1 y S_2 se dan, respectivamente, por:

$$\hat{\mu}_{S_1 \pm S_2} = \overline{X}_1 \pm \overline{X}_2, \qquad \hat{\sigma}_{S_1 \pm S_2} = \sqrt{\frac{\sigma_{S1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{S2}^2}{n_2}}$$

En estas expresiones, $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ son los valores de las estadísticas S_1 y S_2 de las muestras tomadas de las dos poblaciones, y $\sigma_{S1}{}^2$ y $\sigma_{S2}{}^2$ son las varianzas de las poblaciones las estadísticas S_1 y S_2 de cuál fueron tomadas las muestras.

Intervalos de confianza para sumas y diferencias de valores medios

Si las varianzas de las poblaciones σ_1^2 y σ_2^2 son conocidas, los intervalos de confianza para la diferencia y la suma de las medias de las poblaciones, es decir, $\mu_1 \pm \mu_2$, se escriben como:

$$\left((\overline{X}_1 \pm X_2) - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ (\overline{X}_1 \pm X_2) + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

Para muestras grandes, es decir, $n_1 > 30$ y $n_2 > 30$, y varianzas de las poblaciones desconocidas, pero iguales, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, los intervalos de confianza para la diferencia y la suma de las medias de las poblaciones, es decir, $\mu_1 \pm \mu_2$, se escriben como:

$$\left((\overline{X}_1 \pm X_2) - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}},\ (\overline{X}_1 \pm X_2) + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right).$$

Si una de las muestras es pequeña, es decir, $n_1 < 30$ ó $n_2 < 30$, y varianzas de las poblaciones desconocidas, pero iguales, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, podemos obtener una estimación "mixta" de la variación de $\mu_1 \pm \mu_2$, definida por

$$s_p^2 = [(n_1-1)\cdot s_1^2+(n_2-1)\cdot s_2^2]/(\ n_1+n_2-2).$$

En este caso, los intervalos de confianza centrados para la suma y la diferencia de las medias de las poblaciones, es decir, $\mu_1 \pm \mu_2$, se calculan como:

$$\left((\overline{X}_1 \pm X_2) - t_{\nu,\alpha/2} \cdot s_p^2,\ (\overline{X}_1 \pm X_2) + t_{\nu,\alpha/2} \cdot s_p^2 \right)$$

en la cual $\nu = n_1+n_2-2$ es el número de grados de libertad en la distribución Student's t.

En las dos opciones anteriores especificamos que las variaciones de la población, aunque desconocidas, deben ser iguales. Éste será el caso en el cual las dos muestras se toman de la misma población, o de dos poblaciones sobre las cuales sospechemos que tienen la misma varianza. Sin embargo, si sospechamos que las dos varianzas desconocidas de la población son diferentes, podemos utilizar el siguiente intervalo de confianza

$$\left((\overline{X}_1 \pm X_2) - t_{\nu,\alpha/2} \cdot s^2_{\overline{X}_1 \pm \overline{X}_2},\ (\overline{X}_1 \pm X_2) + t_{\nu,\alpha/2} \cdot s^2_{\overline{X}_1 \pm \overline{X}_2}\right)$$

en la cual la desviación estándar estimada para la suma o diferencia es

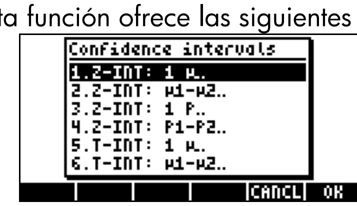
$$s_{\overline{X}_1 \pm \overline{X}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

y ν, los grados de libertad de la variable t, se calculan usando el número entero más cercano a

$$\nu = \frac{[(S_1^2/n_1) + (S_2^2/n_2)]^2}{[(S_1^2/n_1)/(n_1-1)] + [(S_2^2/n_2)/(n_2-1)]}$$

Determinación de intervalos de confianza

La función **6. Conf Interval** puede activarse al presionar las teclas STAT OK. Esta función ofrece las siguientes opciones:



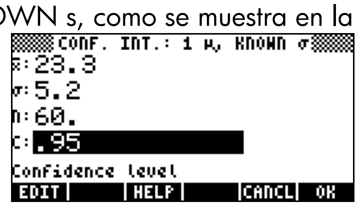
Estas opciones se interpretan como se muestra a continuación:

1. Z-INT: 1 μ.: Intervalo de confianza para la media de la población, μ, cuando se conoce la varianza de la población, o, si ésta es desconocida, cuando la muestra es una muestra grande.
2. Z-INT: μ1−μ2.: Intervalo de confianza para la diferencia de las medias de dos poblaciones, μ_1- μ_2, ya sea que se conozcan las varianzas de las poblaciones, o si éstas son desconocidas, cuando se utilizan muestras grandes.
3. Z-INT: 1 p.: Intervalo de confianza para una proporción, p, para muestras grandes cuando la varianza de la población es desconocida.

4. Z-INT: p1– p2.: Intervalo de confianza para la diferencia de dos proporciones, p_1-p_2, para muestras grandes cuando las varianzas de las poblaciones son desconocidas.
5. T-INT: 1 μ.: Intervalo de confianza para la media de la población, μ, para una muestra pequeña cuando la varianza de la población es desconocida.
6. T-INT: μ1–μ2.: Intervalo de confianza para la diferencia de las medias de dos poblaciones, μ_1- μ_2, para muestras pequeñas cuando la varianza de las poblaciones son desconocidas.

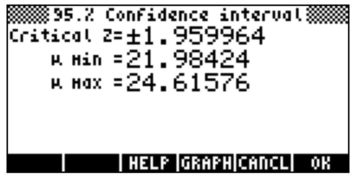
<u>Ejemplo 1</u> – Determínese el intervalo de confianza para la media de una población si una muestra de 60 elementos tiene un valor medio de $\bar{x}$ = 23.2, y la desviación estándar es s = 5.2. Utilícese un valor de α = 0.05. El nivel de confianza es C = 1-α = 0.95.

Selecciónese la opción 1 del menú mostrado anteriormente al presionar la tecla OK. Escriba los datos conocidos en la forma interactiva titulada CONF. INT.: 1 μ, KNOWN s, como se muestra en la siguiente figura:

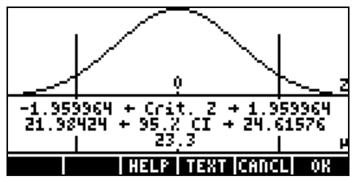


Presiónese la tecla HELP para mostrar una pantalla que explica el significado del intervalo de confianza en términos de números aleatorios generados por la calculadora. Para ver el resto de la pantalla explicativa, utilícese la tecla direccional vertical ▽. Presiónese OK para abandonar la pantalla explicativa y regresar a la forma interactiva mostrada anteriormente.

Para calcular el intervalo de confianza, presiónese OK. Los resultados mostrados en la pantalla son los siguientes:



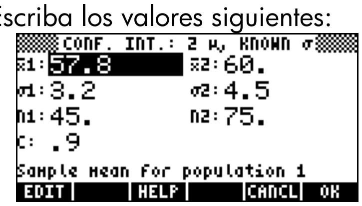
Presiónese la tecla GRAPH para ver una gráfica mostrando el intervalo de confianza calculado:



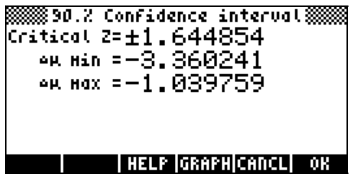
La gráfica muestra la fdp (función de densidad de probabilidades) de la distribución normal estandarizada, la ubicación de los puntos críticos $\pm z_{\alpha/2}$, la media (23.2) y los límites del intervalo correspondiente (21.88424 y 24.51576). Presiónese la tecla TEXT para regresar a la pantalla de resultados, y/o presiónese OK para abandona la función de intervalos de confianza. Los resultados de estos cálculos se mostrarán en la pantalla de la calculadora.

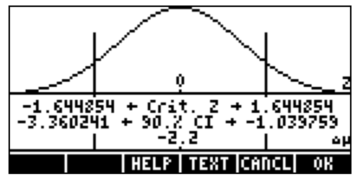
Ejemplo 2 – Los datos tomados de dos muestras (las muestras 1 y 2) indican que $\bar{x}_1$ = 57.8 and $\bar{x}_2$ = 60.0. Los tamaños de muestra son n_1 = 45 y n_2 = 75. Si se sabe que son las desviaciones estándares de las poblaciones son σ_1 = 3.2, y σ_2 = 4.5, determine el intervalo de confianza 90% para la diferencia de las medias de la población, es decir, μ_1- μ_2.

Presione ⮣ STAT ▲ OK para tener acceso al cálculo de intervalo de confianza en la calculadora. Presione ▼ OK para seleccionar la opción 2. Z-INT: μ 1 – μ2.. Escriba los valores siguientes:



Cuando termine, presione OK. Los resultados, como texto y gráfico, se muestran a continuación:

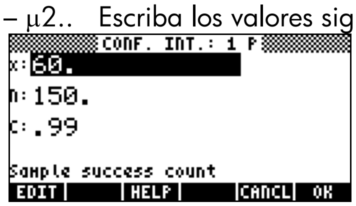




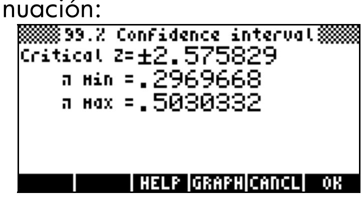
La variable $\Delta\mu$ representa μ 1 – μ2.

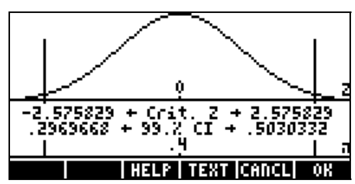
<u>Ejemplo 3</u> – Una encuesta de opinión pública indica que en una muestra de 150 personas 60 favorecen el aumento de impuestos para financiar proyectos públicos . Determine el intervalo de confianza 99% para la proporción de la población que favorecería el aumento de impuestos.

Presione → STAT ▲ OK para tener acceso a la característica del intervalo de la confianza en la calculadora. Presione ▼ ▼ OK para seleccionar la opción 3. Z-INT: μ 1 – μ2.. Escriba los valores siguientes:



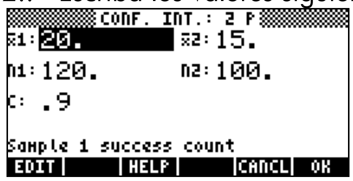
Al terminar, presione OK. Los resultados, como texto y gráfico, se muestran a continuación:



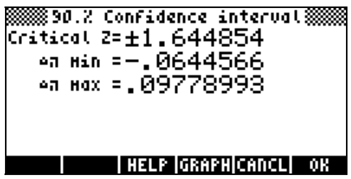


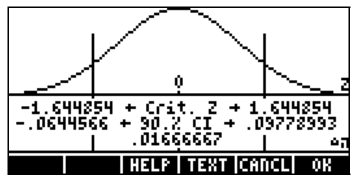
<u>Ejemplo 4</u> – Determine el intervalo de confianza 90% para la diferencia entre dos proporciones si la muestra 1 muestra 20 éxitos en 120 ensayos, y la muestra 2 muestra 15 éxitos en 100 ensayos

Presione ↱ STAT ▲ OK para tener acceso al cálculo de intervalo de confianza en la calculadora. Presione ▼ ▼ ▼ OK para seleccionar la opción 4. Z-INT: p1 – p2.. Escriba los valores siguientes:



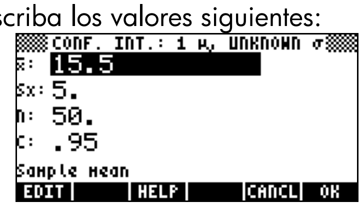
Al terminar, presione OK. Los resultados, como texto y gráfico, se muestran a continuación:



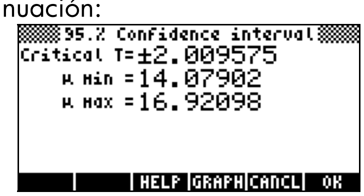


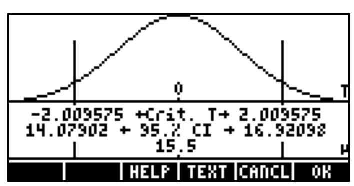
Ejemplo 5 – Determine el intervalo de la confianza 95% para la media de la población si una muestra de 50 elementos tiene una media de 15.5 y una desviación estándar de 5. La desviación estándar de la población es desconocida.

Presione ↱ STAT ▲ OK para tener acceso al cálculo del intervalo de confianza en la calculadora. Presione ▲ ▲ OK para seleccionar la opción 5. T-INT: μ. Escriba los valores siguientes:



Al terminar, presione OK. Los resultados, como texto y gráfico, se muestran a continuación:

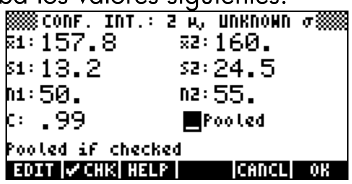




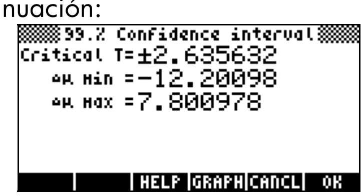
La figura muestra la pdf de Student t pdf para $\nu = 50 - 1 = 49$ grados de libertad.

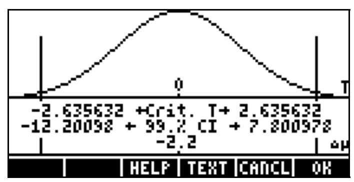
<u>Ejemplo 6</u> – Determine el intervalo de la confianza 99% para la diferencia en medias de dos poblaciones dadas los datos de la muestra: $\bar{x}_1$ = 157.8 , $\bar{x}_2$ = 160.0, n_1 = 50, n_2 = 55. Las desviaciones de estándar de las muestras son s_1 = 13.2, s_2 = 24.5.

Presione ↱ STAT ▲ OK para tener acceso al cálculo del intervalo de confianza en la calculadora. Presione ▲ OK para seleccionar la opción 6. T-INT: μ1−μ2.. Escriba los valores siguientes:

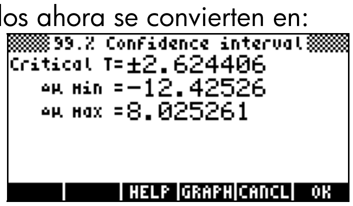


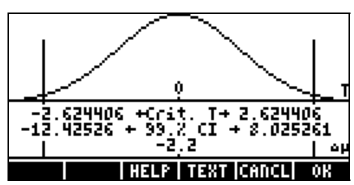
Al terminar, presione OK. Los resultados, como texto y gráfico, se muestran a continuación:





Estos resultados asumen que los valores s_1 y s_2 son las desviaciones estándares de las poblaciones. Si estos valores representan realmente las desviaciones estándares de las muestras, usted debe incorporar los mismos valores que antes, pero con de la opción `_pooled` seleccionada. Los resultados ahora se convierten en:





Intervalos de confianza para la varianza

Para desarrollar un fórmula para el intervalo de confianza para la varianza, primero introducimos la distribución del muestreo de la variación: Considerar una muestra aleatoria X_1, X_2 ..., X_n de variables normales independientes con media μ, varianza σ^2, y media de la muestra $\overline{X}$. La estadística

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2,$$

es un estimador imparcial de la varianza σ^2.

La cantidad $(n-1) \cdot \frac{\hat{S}^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$, tiene una distribución χ_{n-1}^2 (chi-cuadrada) con ν = n-1 grados de libertad. El intervalo de confianza bilateral $(1-\alpha)\cdot 100$ % se calcula a partir de

$$\Pr[\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} < (n-1)\cdot S^2/\sigma^2 < \chi^2_{n-1,\alpha/2}] = 1- \alpha.$$

El intervalo de la confianza para la varianza de la población σ^2 es, por lo tanto,

$$[(n-1)\cdot S^2/ \chi^2_{n-1,\alpha/2} ; (n-1)\cdot S^2/ \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}].$$

en el cual $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$, y $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ son los valores de una variable χ^2, con ν = n-1 grados de libertad, excedidos con probabilidades $\alpha/2$ y $1-\alpha/2$, respectivamente.

El límite de confianza superior unilateral para σ^2 se define como

$$(n-1)\cdot S^2/ \chi^2_{n-1,1-\alpha}.$$

Ejemplo 1 – Determine el intervalo de confianza 95% para la varianza de la población σ^2 basado en una muestra del tamaño n = 25 la cual muestra una varianza s^2 = 12.5.

En el capítulo 17 utilizamos una solución numérica para resolver la ecuación α = UTPC(γ,x). En este programa, γ representa los grados de libertad (n-1), y α representa la probabilidad de exceder cierto valor de x (χ^2), es decir, $\Pr[\chi^2 > \chi_\alpha^2] = \alpha$.

Por el ejemplo actual, α = 0.05, γ = 24 y α = 0.025. Resolviendo la ecuación presentada anteriormente, $\chi^2_{n-1,\alpha/2} = \chi^2_{24,0.025}$ = 39.3640770266.

Por otra parte, el valor $\chi^2_{n-1,\alpha/2} = \chi^2_{24,0.975}$ es calculado usando los valores γ = 24 y α = 0.975. El resultado es $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} = \chi^2_{24,0.975}$ = 12.4011502175.

Los límites inferior y superior del intervalo serán (use modo ALG):

$$(n-1)\cdot S^2/\ \chi^2_{n-1,\alpha/2} = (25-1)\cdot 12.5/39.3640770266 = 7.62116179676$$

$$(n-1)\cdot S^2/\ \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} = (25-1)\cdot 12.5/12.4011502175 = 24.1913044144$$

Así, el intervalo de la confianza del 95% para este ejemplo es:

$$7.62116179676 < \sigma^2 < 24.1913044144.$$

Prueba de hipótesis

Una hipótesis es un declaración hecho sobre una población (por ejemplo, con respecto a la media). La aceptación de la hipótesis se basa en una prueba estadística en una muestra tomada de la población. Se llaman la acción y la toma de decisión consiguientes prueba de la hipótesis

El proceso de la prueba de la hipótesis consiste en tomar una muestra aleatoria de la población y la enunciación de una hipótesis estadística sobre la población. Si las observaciones no apoyan el modelo o la teoría postulada, se rechaza la hipótesis. Sin embargo, si las observaciones están de acuerdo con la hipótesis, ésta no se rechaza, pero no se acepta necesariamente. Se asocia a la decisión un nivel de significado α.

Procedimiento para probar hipótesis

El procedimiento para la prueba de la hipótesis implica los seis pasos siguientes:

1. Declarar una hipótesis nula, H_0. Ésta es la hipótesis que se probará. Por ejemplo, H_0: μ_1-μ_2 = 0, i.e., presumimos que la media de la población 1 y la media de la población 2 son iguales. Si H_0 es verdadera, cualquier

diferencia observada en las medias se atribuye a los errores en el muestreo aleatorio.

2. 2. Declarar una hipótesis alterna, H_1. Por el ejemplo bajo consideración, podría ser $H_1: \mu_1-\mu_2 \neq 0$ [Nota: esto es lo que realmente deseamos probar.]
3. 3. Determinar o especificar una estadística de la prueba, T. En el ejemplo bajo consideración, T será basado en la diferencia las medias observadas, $\bar{X}_1- \bar{X}_2$.
4. Utilizar la distribución conocida (o asumida) de la estadística de la prueba, T.
5. Definir una región de rechazo (la región crítica, R) para la estadística de la prueba basada en un nivel de significado pre-asignado α.
6. Utilizar datos observados para determinar si el valor de la estadística de la prueba está o no fuera de la región crítica. Si la estadística de la prueba está dentro de la región crítica, entonces decimos que la cantidad que estamos probando es significativa al nivel 100α.

Notas:

1. Por el ejemplo bajo consideración, la hipótesis alterna $H_1: \mu_1-\mu_2 \neq 0$ produce qué se llama una prueba bilateral. Si es la hipótesis alterna es $H_1: \mu_1-\mu_2 > 0$ o $H_1: \mu_1-\mu_2 < 0$, entonces tenemos una prueba unilateral.

2. La probabilidad de rechazar la hipótesis nula es igual al nivel de significado, es decir, $\Pr[T\in R|H_0]=\alpha$. La notación $\Pr[A|B]$ representa la probabilidad condicional del evento A dado que ocurre el evento B.

Errores en la prueba de hipótesis

En la prueba de hipótesis utilizamos los términos errores del tipo I y del tipo II para definir los casos en los cuales se rechaza una hipótesis verdadera o se acepta (no se rechaza) una hipótesis falsa, respectivamente. Sea T = valor de la estadística de la prueba, R = región de rechazo, A = región de aceptación, por lo tanto, $R\cap A = \varnothing$, y $R\cup A = \Omega$, donde Ω = el espacio del parámetro T, y $\varnothing$ = el conjunto vacío. Las probabilidades de cometer un error del tipo I o del tipo II son las siguientes:

- Rechazar una hipótesis verdadera, Pr[error tipo I] = $\Pr[T\in R|H_0] = \alpha$
- No rechazar una hipótesis falsa, Pr[error tipo II] = $\Pr[T\in A|H_1] = \beta$

Ahora, consideremos los casos en los cuales tomamos la decisión correcta:

No rechazo hipótesis verdadera, Pr[No(error tipo I)] = Pr[$T \in A | H_0$] = $1 - \alpha$

Rechazo hipótesis falsa, Pr[No(error tipo II)] = Pr [$T \in R | H_1$] = $1 - \beta$

El complemento de β se conoce como la potencia de la prueba de la hipótesis nula H_0 vs. la hipótesis alterna H_1. La potencia de una prueba se utiliza, por ejemplo, para determinar un tamaño de muestra mínimo para restringir errores

Seleccionando los valores de α y β

Un valor típico del nivel de la significado (o de la probabilidad del error tipo I) es $\alpha = 0.05$, (es decir, rechazo incorrecto una vez en cada 20 veces en promedio). Si las consecuencias de un error de tipo I son más serias, escójase un valor más pequeño de α, digamos 0.01 ó 0.001.

El valor de β, es decir, la probabilidad de hacer un error del tipo II, depende de α, el tamaño de muestra n, y en el valor verdadero del parámetro probado. Así, el valor de β se determina después de que se realice la prueba de la hipótesis. Se acostumbra producir los gráficos de β, o la potencia de la prueba ($1-\beta$), en función del valor verdadero del parámetro probado. Estos gráficos se llaman las curvas características operativas o accionan curvas de la función, respectivamente.

Inferencias referentes a una media

Hipótesis bilateral

El problema consiste en la prueba de la hipótesis nula H_o: $\mu = \mu_o$, contra la hipótesis alternativa, H_1: $\mu \neq \mu_o$ a un nivel de la confianza de $(1-\alpha)100\%$, o a un nivel de significado α, usando una muestra de tamaño n con una media $\bar{x}$ y una desviación estándar s. Esta prueba se refiere como prueba bilateral (o de dos colas). El procedimiento para la prueba es como sigue:

Primero, calculamos la estadística apropiada para la prueba (t_o ó z_o) como sigue:

- Si n < 30 y la desviación de estándar de la población, σ, se conoce, utilice la estadística z: $z_o = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma / \sqrt{n}}$
- Si n > 30, y σ es conocida, use z_o definido anteriormente. Si σ no se conoce, substituya s en lugar de σ in z_o, es decir, use $z_o = \frac{\bar{x} - \mu_o}{s / \sqrt{n}}$
- Si n < 30, y σ es desconocida, use la estadística t dada por $t_o = \frac{\bar{x} - \mu_o}{s / \sqrt{n}}$, con ν = n - 1 grados de libertad.

Entonces, calcule el valor P (una probabilidad) asociada a z_o ó t_o, y compárelo con α para decidir si rechazar o no la hipótesis nula. El valor P para una prueba bilateral se define ya sea como

$$\text{Valor P} = P(|z|>|z_o|), \text{ ó, Valor P} = P(|t|>|t_o|).$$

Los criterios a utilizar para la prueba de la hipótesis son:

- Rechazar H_o si Valor P < α
- No rechazar H_o si Valor P > α.

El Valor P para una prueba bilateral puede calcularse usando las funciones de la probabilidad en la calculadora como sigue:

- Si se usa z, Valor P = 2·UTPN(0,1,|z_o|)
- Si se usa t, Valor P = 2·UTPT(ν,|t_o|)

<u>Ejemplo 1</u> -- Probar la hipótesis nula H_o: μ = 22.5 (= μ_o), contra la hipótesis alternativa, H_1: $\mu \neq 22.5$, a un nivel de confianza de 95% es decir, α = 0.05, usando una muestra del tamaño n = 25 con una media $\bar{x}$ = 22.0 y una

desviación de estándar s = 3.5. Asumimos que no sabemos el valor de la desviación de estándar de la población, por lo tanto, calculamos una estadística de t como sigue: $t_o = \dfrac{\bar{x} - \mu_o}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{22.0 - 22.5}{3.5/\sqrt{25}} = -0.7142$

El correspondiente Valor P, para n = 25 - 1 = 24 grados de libertad es

Valor P = 2·UTPT(24,-0.7142) = 2·0.7590 = 1.5169,

dado que 1.5169 > 0.05, es decir, Valor P > α, no podemos rechazar la hipótesis nula H_o: μ = 22.0.

Hipótesis unilateral

El problema consiste en la prueba de la hipótesis nula H_o: $\mu = \mu_o$, contra la hipótesis alternativa, H_1: $\mu > \mu_o$ ó H_1: $\mu < \mu_o$ a un nivel de confianza de (1-α)100%, o a un nivel de significado α, usando una muestra de tamaño n con una media $\bar{x}$ y una desviación estándar s. Esta prueba se refiere como prueba unilateral (o de una cola). El procedimiento para realizar una prueba unilateral comienza como en la prueba bilateral calculando la estadística apropiada para la prueba (t_o o z_o) como se indicó anteriormente.

A continuació, se usa el Valor P asociado con z_o ó t_o , y se compara con α para decidir si o no rechazar la hipótesis nula. El Valor P para una prueba bilateral se define como

Valor P = P(z > |z_o|), ó, Valor P = P(t > |t_o|).

Los criterios a utilizar para la prueba de la hipótesis son:

- Rechazar H_o si Valor P < α
- No rechaza H_o si Valor P > α.

Notar que los criterios están exactamente iguales que en la prueba bilateral. La diferencia principal es la manera como el Valor P se calcula. El Valor P para una prueba unilateral puede ser calculado usando las funciones de la probabilidad en la calculadora como sigue:

- Si se usa z, Valor P = UTPN(0,1,z_o)
- Si se usa t, Valor P = UTPT(ν,t_o)

Ejemplo 2 – Probar la hipótesis nula H_o: $\mu = 22.0$ ($= \mu_o$), contra la hipótesis alternativa, H_1: $\mu > 22.5$ en un nivel de confianza de 95% es decir, $\alpha = 0.05$, usando una muestra de tamaño n = 25 con una media $\bar{x} = 22.0$ y una desviación estándar s = 3.5. Una vez más, asumimos que no sabemos el valor de la desviación estándar de la población, por lo tanto, el valor de la estadística t es al caso de la prueba bilateral demostrado anteriormente, es decir, $t_o = -0.7142$, y el Valor P, para $\nu = 25 - 1 = 24$ grados de libertad es

Valor P = UTPT(24, |-0.7142|) = UTPT(24,0.7124) = 0.2409,

Dado que 0.2409 > 0.05, es decir, Valor P > α, no podemos rechazar la hipótesis nula H_o: $\mu = 22.0$.

Inferencias referentes a dos medias

La hipótesis nula que se probará es H_o: $\mu_1 - \mu_2 = \delta$, a un nivel de confianza (1-α)100%, o nivel de significado α, usar dos muestras de tamaños, n_1 y n_2, medias $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$, y desviaciones estándares s_1 y s_2. Si las desviaciones estándares de las poblaciones que corresponden a las muestras, σ_1 y σ_2, se conocen, o si $n_1 > 30$ y $n_2 > 30$ (muestras grandes), la estadística de la prueba que se utilizará es

$$z_o = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Si $n_1 < 30$ o $n_2 < 30$ (por lo menos una muestra pequeña), utilizar la estadística siguiente de la prueba:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta}{\sqrt{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

Hipótesis bilateral

Si la hipótesis alternativa es una hipótesis bilateral, es decir, H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$, el Valor P para esta prueba se calcula como

- Si se usa z, Valor P = 2·UTPN(0,1, $|z_o|$)

- Si se usa t, Valor P = $2\cdot$UTPT(ν,$|t_o|$)

con los grados de libertad para la distribución t dados por $\nu = n_1 + n_2 - 2$. Los criterios de la prueba son

- Rechazar H_o si Valor P < α
- No rechazar H_o si Valor P > α.

<u>Hipótesis unilateral</u>
Si la hipótesis alternativa es una hipótesis con dos aspectos, es decir, H_1: μ_1-$\mu_2 < \delta$, o, H_1: μ_1-$\mu_2 < \delta$, el Valor P para esta prueba se calcula como:

- Si se usa z, Valor P = UTPN(0,1, $|z_o|$)
- Si se usa t, Valor P = UTPT(ν,$|t_o|$)

Los criterios a utilizar para la prueba de la hipótesis son:

- Rechazar H_o si Valor P < α
- No rechazar H_o si Valor P > α.

Pruebas apareadas de la muestra

Cuando tratamos con dos muestras del tamaño n con datos apareados, en vez de probar la hipótesis nula, H_o: μ_1-$\mu_2 = \delta$, usando los valores medios y las desviaciones de estándar de las dos muestras, necesitamos tratar el problema como sola muestra de las diferencias de los valores apareados. Es decir generar una nueva variable aleatoria $X = X_1$-X_2, y probar H_o: $\mu = \delta$, en la cual μ representa el medio de la población para X. Por lo tanto, usted necesitará obtener $\bar{x}$ y s para la muestra de valores de x. La prueba debe entonces proceder como una prueba de una sola muestra usando los métodos descritos anteriormente.

Inferencias referentes a una proporción

Suponer que deseamos probar la hipótesis nula, H_0: $p = p_0$, en la cual p representa la probabilidad de obtener un resultado acertado en cualquier repetición dada de un ensayo de Bernoulli. Para probar la hipótesis, realizamos las n repeticiones del experimento, y encontramos que existen k resultados acertados. Por lo tanto, un estimado de p es p ' = k/n.

La varianza de la muestra se estima como $s_p^2 = p'(1-p')/n = k\cdot(n-k)/n^3$.

Asuma que la variable Z, $Z = (p-p_0)/s_p$, sigue la distribución normal estándar, es decir, Z ~ N(0,1). El valor particular de la estadística de la prueba es $z_0 = (p'-p_0)/s_p$.

En vez de usar el Valor P como un criterio para aceptar o para no aceptar la hipótesis, utilizaremos la comparación entre el valor crítico de z_0 y el valor de z correspondiente a α ó a $\alpha/2$.

<u>Prueba bilateral</u>
Si se usa una prueba bilateral encontraremos el valor de $z_{\alpha/2}$, a partir de

$$\Pr[Z> z_{\alpha/2}] = 1-\Phi(z_{\alpha/2}) = \alpha/2, \text{ o } \Phi(z_{\alpha/2}) = 1- \alpha/2,$$

En la cual $\Phi(z)$ es la función de distribución cumulativa (CDF) de la distribución normal estándar (véase el Capítulo 17).

Rechazar la hipótesis nula, H_0, si $z_0 > z_{\alpha/2}$, o si $z_0 < - z_{\alpha/2}$.

Es decir la región de rechazo es $R = \{ |z_0| > z_{\alpha/2} \}$, mientras que es la región de aceptación es $A = \{|z_0| < z_{\alpha/2} \}$.

<u>Prueba unilateral</u>
Si usan una prueba unilateral encontraremos el valor de z_α, a partir de

$$\Pr[Z> z_\alpha] = 1-\Phi(z_\alpha) = \alpha, \text{ o } \Phi(z_\alpha) = 1- \alpha,$$

Rechazar la hipótesis nula, H_0, si $z_0 > z_\alpha$, y H_1: $p>p_0$, o si $z_0 < - z_\alpha$, y H_1: $p<p_0$.

Prueba de la diferencia entre dos proporciones

Suponer que deseamos probar la hipótesis nula, H_0: p_1-p_2 = p_0, donde las p's representa la probabilidad de obtener un resultado acertado en cualquier repetición dada de un ensayo de Bernoulli para dos poblaciones 1 y 2. Para probar la hipótesis, realizamos n_1 las repeticiones del experimento de la población 1, y se registran k_1 resultados acertados. También, encontramos k_2 resultados acertados a partir de las n_2 ensayos en la muestra 2. Así, los estimados de p_1 y p_2 se dan, respectivamente, por $p_1' = k_1/n_1$, y $p_2' = k_2/n_2$.

Las varianzas para las muestras serán estimadas, respectivamente, como

$$s_1^2 = p_1'(1-p_1')/n_1 = k_1\cdot(n_1-k_1)/n_1^3, \text{ y } s_2^2 = p_2'(1-p_2')/n_2 = k_2\cdot(n_2-k_2)/n_2^3.$$

La varianza de la diferencia de proporciones se estima como: $s_p^2 = s_1^2 + s_2^2$.

Asuma que la variable Z, $Z = (p_1-p_2-p_0)/s_p$, sigue la distribución normal estándar, es decir, Z ~ N(0,1). El valor particular de la estadística de la prueba es $z_0 = (p_1'-p_2'-p_0)/s_p$.

Prueba bilateral

Si se usa una prueba bilateral encontraremos el valor de $z_{\alpha/2}$, a partir de

$$\Pr[Z> z_{\alpha/2}] = 1-\Phi(z_{\alpha/2}) = \alpha/2, \text{ o } \Phi(z_{\alpha/2}) = 1- \alpha/2,$$

en la cual $\Phi(z)$ es la función de distribución cumulativa (CDF) de la distribución normal estándar.

Rechazar la hipótesis nula, H_0, si $z_0 > z_{\alpha/2}$, o si $z_0 < - z_{\alpha/2}$.

Es decir, la región de rechazo es $R = \{ |z_0| > z_{\alpha/2} \}$, mientras que es la región de aceptación es $A = \{|z_0| < z_{\alpha/2} \}$.

Prueba unilateral

Si usan una prueba uno-atada encontraremos el valor de z_α, a partir de

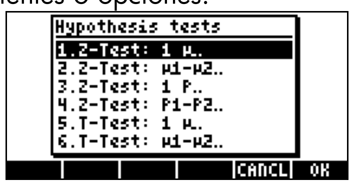
$$\Pr[Z> z_\alpha] = 1-\Phi(z_\alpha) = \alpha, \text{ o } \Phi(z_\alpha) = 1- \alpha,$$

Rechazar la hipótesis nula, H_0, si $z_0 > z_\alpha$, y H_1: p_1-$p_2 > p_0$, o si $z_0 < - z_\alpha$, y H_1: p_1-$p_2 < p_0$.

Prueba de hipótesis con funciones preprogramadas

La calculadora ofrece procedimientos para la prueba de hipótesis bajo la función *6. Conf Interval* del menú STAT, la cual puede activarse utilizando las teclas ↱ STAT ▲ ▲ OK.

Como en el caso de los intervalos de confianza, la función de prueba de hipótesis ofrece las siguientes 6 opciones:



La interpretación de estas opciones es similar a la de los intervalos de confianza:

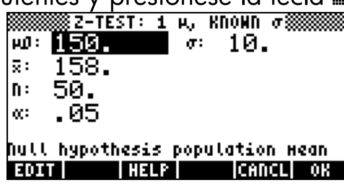
1. Z-Test: 1 μ.: Prueba de hipótesis para la muestra de la población, μ, cuando se conoce la varianza de la población, o para muestras grandes cuando no se conoce la varianza de la población.
2. Z-Test: μ1–μ2.: Prueba de hipótesis para la diferencia de las medias de dos poblaciones, μ_1- μ_2, cuando se conocen las varianzas de las dos poblaciones, o si éstas son desconocidas, cuando se utilizan dos muestras grandes.
3. Z-Test: 1 p.: Prueba de hipótesis para una proporción, p, para muestras grandes cuando no se conoce la varianza de la población.
4. Z-Test: p1– p2: Prueba de Hipótesis para la diferencia de dos proporciones, p_1-p_2, para muestras grandes cuando se desconocen las varianzas de las poblaciones.
5. T-Test: 1 μ.: Prueba de hipótesis para la muestra de la población, μ, cuando se desconoce la varianza de la población y la muestra es pequeña.

6. T-Test: $\mu 1-\mu 2$.: Prueba de hipótesis para la diferencia de las medias de dos poblaciones, μ_1- μ_2, cuando se desconocen las varianzas de las dos poblaciones, y las muestras son pequeñas.

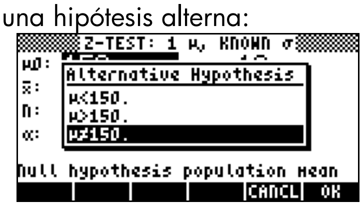
Ejecútense los siguientes ejercicios:

Ejemplo 1 – Dado μ_0 = 150, σ = 10, $\bar{x}$ = 158, n = 50, con nivel de significado α = 0.05, pruébese la hipótesis H_0: $\mu = \mu_0$, usando la hipótesis alterna, H_1: $\mu \neq \mu_0$.

Presiónese ↱ STAT ▲ ▲ OK para activar la opción de prueba de hipótesis. Presiónese OK para seleccionar la opción 1. Z-Test: 1 μ.
Escríbanse los datos siguientes y presiónese la tecla OK:



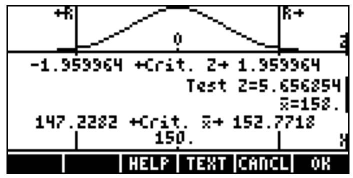
La calculadora solicita una hipótesis alterna:



Selecciónese $\mu \neq 150$, y presiónese la tecla OK. El resultado es:

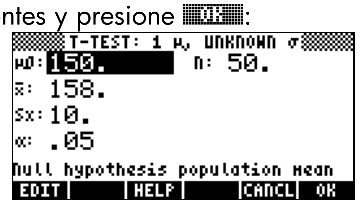
Por lo tanto, rechazamos la hipótesis H_0: $\mu = 150$, a favor de la hipótesis alterna H_1: $\mu \neq 150$. El valor z de la prueba es z_0 = 5.656854. El valor P es 1.54×10^{-8}. Los valores críticos para la prueba son $\pm z_{\alpha/2}$ = ±1.959964, que corresponden al rango crítico para $\bar{x}$ de {147.2 152.8}.

Esta información puede observarse gráficamente al presionar la tecla de menú GRAPH:

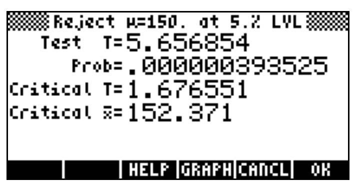


Ejemplo 2 – Con $\mu_0 = 150$, $\bar{x} = 158$, $s = 10$, $n = 50$, y $\alpha = 0.05$, probar la hipótesis H_0: $\mu = \mu_0$, contra la hipótesis alternativa, H_1: $\mu > \mu_0$. La desviación de estándar de la población, σ, no se conoce.

Presione → STAT ▲▲ OK para acceder a la función de prueba de hipótesis en la calculadora. Presione ▲▲OK para seleccionar la opción 5. T-Test: 1 μ.:
Escriba los datos siguientes y presione OK:

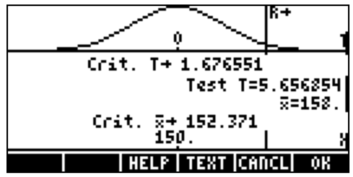


Seleccionar la hipótesis alternativa, H_1: $\mu > 150$, y presione OK. El resultado es:



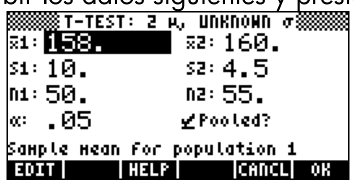
Rechazamos la hipótesis nula, H_0: $\mu_0 = 150$, contra la hipótesis alternativa, H_1: $\mu > 150$. El valor de la prueba t es $t_0 = 5.656854$, con un Valor P = 0.000000393525. El valor crítico de t es $t_\alpha = 1.676551$, correspondiente a un valor crítico de $\bar{x} = 152.371$.

Presione GRAPH para ver los resultados gráficamente como sigue:

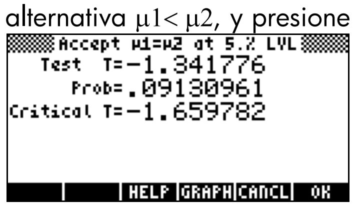


Ejemplo 3 – Datos dos muestras producen los resultados siguientes $\bar{x}_1$ = 158, $\bar{x}_1$ = 160, s_1 = 10, s_2 = 4.5, n1 = 50, y n_2 = 55. Para α = 0.05, y varianza “mixta”, probar la hipótesis H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$, contra la hipótesis alternativa, H_1: $\mu_1 - \mu_2 < 0$.

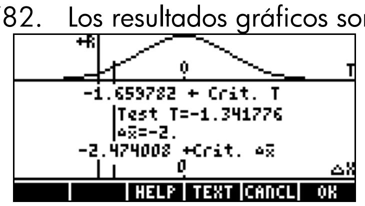
Presione ⮣ STAT ▲ ▲ OK para tener acceso a la función de prueba de hipótesis en la calculadora. Presione ▲ OK para seleccionar la opción 6. T-Test: $\mu 1 - \mu 2$.: Escribir los datos siguientes y presione OK:



Seleccionar la hipótesis alternativa $\mu 1 < \mu 2$, y presione OK. El resultado es



Así, aceptamos (o, más exactamente, no rechazamos) la hipótesis: H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$, o H_0: $\mu_1 = \mu_2$, contra la hipótesis alternativa H_1: $\mu_1 - \mu_2 < 0$, o H_1: $\mu_1 = \mu_2$. El valor de la prueba t es t_0 = -1.341776, con Valor P = 0.09130961, y t crítico es $-t_\alpha$ = -1.659782. Los resultados gráficos son:



Estos tres ejemplos deben ser bastantes para entender la operación de la hipótesis que prueba la característica preprogramada en la calculadora.

Inferencias referentes a una varianza

La hipótesis nula que se probará es, H_o: $\sigma^2 = \sigma_o^2$, en un nivel de confianza (1-α)100%, o nivel de significado α, usar una muestra del tamaño n, y varianza s^2. La estadística de la prueba que se utilizará es una estadística chi-cuadrada definida como

$$\chi_o^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Dependiendo de la hipótesis alternativa elegida, Valor P se calcula como sigue:

- H_1: $\sigma^2 < \sigma_o^2$, Valor P = $P(\chi^2<\chi_o^2)$ = 1-UTPC(ν,χ_o^2)
- H_1: $\sigma^2 > \sigma_o^2$, Valor P = $P(\chi^2>\chi_o^2)$ = UTPC(ν,χ_o^2)
- H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_o^2$, Valor P =2·min[$P(\chi^2<\chi_o^2)$, $P(\chi^2>\chi_o^2)$] = 2·min[1-UTPC(ν,χ_o^2), UTPC(ν,χ_o^2)]

donde la función min[x,y] produce el valor mínimo de x o de y (de manera similar, max[x,y] produce el valor máximo de x o de y). UTPC(ν,x) representa las probabilidades de cola superior de la calculadora para ν = n - 1 grados de libertad.

Los criterios de la prueba están iguales que en la prueba de la hipótesis de medios, a saber,

- Rechazar H_o si Valor P < α
- No rechazar H_o si Valor P > α.

Notar por favor que este procedimiento es válido solamente si la población de quien la muestra fue tomada es una población normal.

Ejemplo 1 -- Considerar el caso en el cual σ_o^2 = 25, α=0.05, n = 25, y s^2 = 20, y la muestra fue extraída de una población normal. Para probar la hipótesis, H_o: $\sigma^2 = \sigma_o^2$, contra H_1: $\sigma^2 < \sigma_o^2$, calculamos

$$\chi_o^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)\cdot 20}{25} = 189.2$$

Con ν = n - 1 = 25 - 1 = 24 los grados de libertad, calculamos el Valor P como,

$$\text{Valor P} = P(\chi^2<19.2) = 1\text{-UTPC}(24,19.2) = 0.2587\ldots$$

Dado que, 0.2587… > 0.05, es decir, Valor P > α, no podemos rechazar la hipótesis nula, H_o: $\sigma^2 = 25 (= \sigma_o^2)$.

Inferencias referentes a dos varianzas

La hipótesis nula que se probará es, H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, en un nivel de confianza $(1-\alpha)100\%$, o nivel de significado α, usar dos muestras de tamaños, n_1 y n_2, y varianzas s_1^2 y s_2^2. La estadística de la prueba que se utilizará es una estadística de la prueba de F definida como

$$F_o = \frac{s_N^2}{s_D^2}$$

en la cual s_N^2 y s_D^2 representan el numerador y el denominador de la estadística F, respectivamente. La selección del numerador y del denominador depende de la hipótesis alternativa que se prueba, como se muestra en la tabla siguiente. La distribución correspondiente de F tiene grados de libertad, $\nu_N = n_N-1$, y $\nu_D = n_D-1$, en los cuales n_N y n_D, son los tamaños de muestra que corresponden a las varianzas s_N^2 y s_D^2, respectivamente.

La tabla siguiente muestra cómo seleccionar el numerador y el denominador para F_o dependiendo de la hipótesis alternativa elegida:

Hipótesis alternativa	*Estadística de la prueba*	*Grados de libertad*
H_1: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ (unilateral)	$F_o = s_2^2/s_1^2$	$\nu_N = n_2-1$, $\nu_D = n_1-1$
H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (unilateral)	$F_o = s_1^2/s_2^2$	$\nu_N = n_1-1$, $\nu_D = n_2-1$
H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (bilateral)	$F_o = s_M^2/s_m^2$	$\nu_N = n_M-1$, $\nu_D = n_m-1$
	$s_M^2=\max(s_1^2,s_2^2)$, $s_m^2=\min(s_1^2,s_2^2)$	

(*) n_M es el valor de n correspondiente a s_M, y n_m es el valor de n correspondiente a s_m.

El Valor P se calcula, en todos los casos, como: Valor P = $P(F>F_o)$ = $UTPF(\nu_N, \nu_D,F_o)$

Los criterios de la prueba son:

- Rechazar H_o si Valor P < α
- No rechazar H_o si Valor P > α.

Ejemplo1 – Considerar dos muestras extraídas de poblaciones normales tales que n_1 = 21, n_2 = 31, s_1^2 = 0.36, y s_2^2 = 0.25. Probamos la hipótesis nula, H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, a un nivel de significado α = 0.05, contra la hipótesis alternativa, H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Para una hipótesis bilateral, necesitamos identificar s_M y s_m, de esta manera:

$$s_M^2=\max(s_1^2,s_2^2) = \max(0.36,0.25) = 0.36 = s_1^2$$
$$s_m^2=\min(s_1^2,s_2^2) = \min(0.36,0.25) = 0.25 = s_2^2$$

Así mismo,

$$n_M = n_1 = 21,$$
$$n_m = n_2 = 31,$$
$$\nu_N = n_M - 1= 21\text{-}1=20,$$
$$\nu_D = n_m -1 = 31\text{-}1 =30.$$

Por lo tanto, la estadística F es $F_o = s_M^2/s_m^2$=0.36/0.25=1.44

El Valor P es Valor P = $P(F>F_o)$ = $P(F>1.44)$ = $UTPF(\nu_N, \nu_D,F_o)$ = UTPF(20,30,1.44) = 0.1788…

Dado que 0.1788… > 0.05, es decir, Valor P > α, por lo tanto, no podemos rechazar la hipótesis nula H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Notas adicionales sobre la regresión linear

En esta sección elaboramos las ideas de la regresión linear presentadas anteriormente en este capítulo y presentamos un procedimiento para la prueba de la hipótesis de los parámetros de la regresión.

El método de los mínimos cuadrados

Sean x = variable no aleatoria independiente, y Y = variable dependiente, aleatoria. La curva de la regresión de Y en x se define como la relación entre x y la media de la distribución correspondiente de las Y's. Asuma que la curva de la regresión de Y en x es linear, es decir, la distribución mala de las y se escribe como A + Bx. Y se diferencia de la media (A + B·x) por un valor ε, por lo tanto podemos escribir Y = A + B·x + ε, en la cual ε es una variable aleatoria.

Para comprobar visualmente si los datos sigan una tendencia linear, dibujar un diagrama de los datos.

Suponer que tenemos n observaciones apareadas (x_i, y_i); predecimos y por medio de ^y = a + b·x, en la cual a y b ser constantes.

Definir el error de la predicción como $e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (a + b \cdot x_i)$.

El método de los mínimos cuadrados requiere seleccionar a, b para reducir al mínimo la suma de los errores ajustados (SSE)

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2$$

A través de las condiciones

$$\frac{\partial}{\partial a}(SSE) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial b}(SSE) = 0$$

Conseguimos, las llamadas ecuaciones normales:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a \cdot n + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Éste es un sistema de ecuaciones lineares con a y b como las incógnitas, que se pueden solucionar usando las soluciones de ecuaciones lineales de la calculadora. No hay, sin embargo, necesidad de utilizar estos cálculos porque usted puede utilizar la opción **3. Fit Data ...** en el menú STAT (↱ STAT) presentado anteriormente.

Notas:

- a,b son los estimados imparciales de A, B.
- El teorema de Gauss-Markov de la probabilidad indica que entre todos los estimados imparciales para A y B, los estimados de mínimos cuadrados (a,b) son los más eficientes.

Ecuaciones adicionales para la regresión linear

La estadísticas Σx, Σx^2, etc., puede ser utilizadas para definir las cantidades siguientes:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = (n-1)\cdot s_x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = (n-1)\cdot s_y^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^{\ 2} - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})^2 = (n-1)\cdot s_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

De las cuales se obtiene que las desviaciones estándares de x y de y, y la covarianza de x,y se obtienen, respectivamente, como

$$s_x = \sqrt{\frac{S_{xx}}{n-1}} \ ,\ s_y = \sqrt{\frac{S_{yy}}{n-1}}\ ,\text{ y }\ s_{xy} = \frac{S_{yx}}{n-1}$$

El coeficiente de correlación de la muestra es $r_{xy} = \dfrac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\cdot S_{yy}}}$.

En términos de $\overline{x}$, $\overline{y}$, S_{xx}, S_{yy}, y S_{xy}, la solución a las ecuaciones normales es:

$$a = \overline{y} - b\overline{x}\ ,\quad b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

Error de la predicción

La curva de la regresión de Y en x se define como $Y = A + B\cdot x + \varepsilon$. Si tenemos un conjunto de n datos (x_i, y_i), podemos escribir $Y_i = A + B\cdot x_i + \varepsilon_I$, (i = 1,2,…,n), en la cual Y_i = variables aleatorias, independientes, normalmente distribuidas con media $(A + B\cdot x_i)$ y varianza común σ^2; ε_i = variables independientes aleatorias normalmente distribuidas con media cero y varianza común σ^2.

Sea y_i = valor real de los datos, $\hat{y}_i = a + b\cdot x_i$ = predicción de mínimos cuadrados de los datos. Entonces, el error de la predicción es: $e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (a + b\cdot x_i)$.

Un estimado de σ^2 es el llamado error estándar del estimado,

$$s_e^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}[y_i - (a + bx_i)]^2 = \frac{S_{yy} - (S_{xy})^2 / S_{xx}}{n-2} = \frac{n-1}{n-2}\cdot s_y^2 \cdot (1 - r_{xy}^2)$$

Intervalos de confianza y prueba de hipótesis en regresión linear

He aquí algunos conceptos y ecuaciones relacionados con la inferencia estadística para la regresión linear:

- Límites de confianza para los coeficientes de la regresión:
  Para la pendiente (B):
  $$b - (t_{n-2,\alpha/2})\cdot s_e/\sqrt{S_{xx}} < B < b + (t_{n-2,\alpha/2})\cdot s_e/\sqrt{S_{xx}},$$
  Para el intercepto (A):
  $$a - (t_{n-2,\alpha/2})\cdot s_e\cdot[(1/n)+ \bar{x}^2/S_{xx}]^{1/2} < A < a + (t_{n-2,\alpha/2})\cdot s_e\cdot[(1/n)+ \bar{x}^2/S_{xx}]^{1/2},$$
  en la cual t sigue la distribución de Student t con $\nu = n - 2$ grados de libertad, y n representa el número de puntos en la muestra.

- Prueba de hipótesis de la pendiente, B:
  Hipótesis nula, H_0: $B = B_0$, probada contra la hipótesis alternativa, H_1: $B \neq B_0$. La estadística de la prueba es $t_0 = (b - B_0)/(s_e/\sqrt{S_{xx}})$, en la cual t sigue la distribución Student t con $\nu = n - 2$ grados de libertad, y n representa el número de puntos en la muestra. La prueba se realiza como la de una hipótesis del valor medio que prueba, es decir, dado el

nivel de significado, α, determine el valor crítico de t, $t_{\alpha/2}$, entonces, rechace H_0 si $t_0 > t_{\alpha/2}$ o si $t_0 < - t_{\alpha/2}$.

Si usted prueba para el valor B_0= 0, y resulta que la prueba sugiere que usted no rechace la hipótesis nula, H_0: B = 0, entonces, la validez de una regresión linear está en duda. Es decir los datos de la muestra no apoyan la aserción de que $B \neq 0$. Por lo tanto, ésta es una prueba de la significación del modelo de la regresión.

- Prueba de hipótesis del intercepto, A:
  Hipótesis nula, H_0: $A = A_0$, probada contra la hipótesis alternativa, H_1: $A \neq A_0$. La estadística de la prueba es $t_0 = (a-A_0)/[(1/n)+ \bar{x}^2/S_{xx}]^{1/2}$, en la cual t sigue la distribución Student t con ν = n – 2 grados de libertad, y n representa el número de puntos en la muestra. La prueba se realiza como la de una prueba de la hipótesis del valor medio, es decir, dado el nivel de significado, α, determine el valor crítico de t, $t_{\alpha/2}$, entonces, rechazar H_0 si $t_0 > t_{\alpha/2}$ o si $t_0 < - t_{\alpha/2}$.

- Intervalo de confianza del valor medio de Y para x = x_0, es decir, $\alpha+\beta x_0$:
  $a+b\cdot x-(t_{n-2,\alpha/2})\cdot s_e\cdot[(1/n)+(x_0- \bar{x})^2/S_{xx}]^{1/2} < \alpha+\beta x_0 <$
  $a+b\cdot x+(t_{n-2,\alpha/2})\cdot s_e\cdot[(1/n)+(x_0- \bar{x})^2/S_{xx}]^{1/2}$.

- límites de la predicción: intervalo de la confianza para el valor predicho $Y_0=Y(x_0)$:
  $a+b\cdot x-(t_{n-2,\alpha/2})\cdot s_e\cdot[1+(1/n)+(x_0- \bar{x})^2/S_{xx}]^{1/2} < Y_0 <$
  $a+b\cdot x+(t_{n-2,\alpha/2})\cdot s_e\cdot[1+(1/n)+(x_0- \bar{x})^2/S_{xx}]^{1/2}$.

Procedimiento para la inferencia estadística en la regresión linear usando la calculadora

1) Escriba (x,y) como columnas de datos en la matriz estadística ΣDAT.
2) Produzca una gráfica para las columnas apropiadas de ΣDAT, y use rangos apropiados de H- y V-VIEWS para comprobar tendencia linear.
3) Use ↱ STAT ▼ ▼ OK, para ajustar una línea recta, y obtener a, b, s_{xy} (Covarianza), y r_{xy} (Correlación).

4) Use STAT OK, para obtener $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_x, s_y. La columna 1 mostrará las estadísticas para x mientras que la columna 2 mostrará las estadísticas para y .
5) Calcule

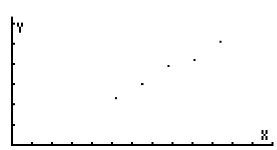
$$S_{xx} = (n-1)\cdot s_x^2, \quad s_e^2 = \frac{n-1}{n-2}\cdot s_y^2 \cdot (1-r_{xy}^2)$$

6) Para intervalos de confianza o pruebas bilaterales, obtenga $t_{\alpha/2}$, con nivel de confianza (1- α)100%, a partir de la distribución t con ν = n -2.
7) Para pruebas unilaterales o bilaterales, obtenga el valor de t usando la ecuación apropiada para A o B. Rechazar la hipótesis nula si `Valor P` < α.
8) Para los intervalos de confianza utilice las fórmulas apropiadas como se indicaron anteriormente.

Ejemplo 1 -- Para los siguientes datos (x,y), determine el intervalo de confianza de 95% para la pendiente B y el intercepto A

x	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y	5.5	7.2	9.4	10.0	12.2

Escriba los datos (x,y) en las columnas 1 y 2 de ΣDAT, respectivamente. Un diagrama de los datos demuestra una buena tendencia linear:



Use la opción `Fit Data..` en el menú ‚ STAT para obtener:

```
3: '-.86 + 3.24*X'
2: Correlation: 0.989720229749
1: Covariance: 2.025
```

Se interpretan estos resultados como a = -0.86, b = 3.24, r_{xy} = 0.989720229749, y s_{xy} = 2.025. El coeficiente de correlación es muy cercano a 1.0 confirmando la tendencia linear observada en el gráfico.

A partir de la opción `Single-var…` del menú ⮡ STAT se calcula: $\overline{x} = 3$, $s_x = 0.790569415042$, $\overline{y} = 8.86$, $s_y = 2.58804945857$.

Después, con n = 5, calcule

$$S_{xx} = (n-1)\cdot s_x^2 = (5-1)\cdot 0.790569415042^2 = 2.5$$

$$s_e^2 = \frac{n-1}{n-2}\cdot s_y^2 \cdot (1-r_{xy}^2) =$$

$$\frac{5-1}{5-2}\cdot 2.5880...^2 \cdot (1-0.9897...^2) = 0.1826...$$

Intervalos de confianza para la pendiente (B) e intercepto (A):

- Primero, obtenemos $t_{n-2,\alpha/2} = t_{3,0.025} = 3.18244630528$ (Ver en el capítulo 17 un programa para obtener $t_{\nu,\alpha}$):
- Después, calculamos los términos

  $(t_{n-2,\alpha/2})\cdot s_e/\sqrt{S_{xx}} = 3.182\ldots\cdot(0.1826\ldots/2.5)^{1/2} = 0.8602\ldots$

  $(t_{n-2,\alpha/2})\cdot s_e\cdot[(1/n)+\overline{x}^2/S_{xx}]^{1/2} =$
  $3.1824\ldots\cdot\sqrt{0.1826\ldots}\cdot[(1/5)+3^2/2.5]^{1/2} = 2.65$

- Finalmente, para la pendiente B, el intervalo de confianza de 95% es

  (-0.86-0.860242, -0.86+0.860242) = (-1.72, -0.00024217)

  Para el intercepto A, el intervalo de confianza de 95% es (3.24-2.6514, 3.24+2.6514) = (0.58855,5.8914).

Ejemplo 2 -- Suponga que los datos y usados en el ejemplo 1 representan el alargamiento (en centésimo de una pulgada) de un alambre de metal cuando están sujetados a una fuerza x (en decenas de libras). El fenómeno físico es tal que esperamos que el intercepto, A, sea cero. Para comprobar si ése es el caso, probamos la hipótesis nula, H_0: $A = 0$, contra la hipótesis alternativa, H_1: $A \neq 0$, con nivel de significado $\alpha = 0.05$.

La estadística de la prueba es t_0 = (a-0)/[(1/n)+ $\bar{x}^2/S_{xx}]^{1/2}$ = (-0.86)/ $[(1/5)+3^2/2.5]^{½}$ = -0.44117. El valor crítico de t, para ν = n – 2 = 3, y $\alpha/2$ = 0.025, puede ser calculado usando la solución numérica para la ecuación α = UTPT(γ,t) convertido en el capítulo 17. En este programa, γ representa los grados de libertad (n-2), y α representa la probabilidad de exceder cierto valor de t, es decir, Pr[$t>t_\alpha$] = 1 – α. Por el actual ejemplo, el valor del nivel de la significación es α = 0.05, γ = 3, y $t_{n-2,\alpha/2} = t_{3,0.025}$. También, para γ = 3 y α = 0.025, $t_{n-2,\alpha/2} = t_{3,0.025}$ = 3.18244630528. Dado que $t_0 > - t_{n-2,\alpha/2}$, no podemos rechazar la hipótesis nula, H_0: $A = 0$, contra la hipótesis alternativa, H_1: $A \neq 0$, , al nivel de significado α = 0.05.
Este resultado sugiere eso que tomar A = 0 para esta regresión linear debe ser aceptable. Después de todo, el valor que encontramos para a, es –0.86, el cuál es relativamente cerca de cero.

Ejemplo 3 – Prueba de significado para la regresión linear. Probar la hipótesis nula para la pendiente H_0: $B = 0$, contra la hipótesis alternativa, H_1: $B \neq 0$, al nivel de significado α = 0.05, para ajuste lineal del ejemplo 1.

La estadística de la prueba es t_0 = (b $-B_0)/(s_e/\sqrt{S_{xx}})$ = (3.24-0)/($\sqrt{0.18266666667/2.5}$) = 18.95. El valor crítico de t, para ν = n – 2 = 3, y $\alpha/2$ = 0.025, fue obtenido en el ejemplo 2, como $t_{n-2,\alpha/2} = t_{3,0.025}$ = 3.18244630528. Dado que $t_0 > t_{\alpha/2}$, debemos rechazar la hipótesis nula H_1: $B \neq 0$, al nivel de significado α = 0.05, para el ajuste lineal del ejemplo 1.

Regresión linear múltiple

Considérese un conjunto de datos de la forma

x_1	x_2	x_3	…	x_n	y
x_{11}	x_{21}	x_{31}	…	x_{n1}	y_1
x_{12}	x_{22}	x_{32}	…	x_{n2}	y_2
x_{13}	x_{32}	x_{33}	…	x_{n3}	y_3
.	.	.		.	.
.	.	.	.	.	.
$x_{1,m-1}$	$x_{2,m-1}$	$x_{3,m-1}$	…	$x_{n,m-1}$	y_{m-1}
$x_{1,m}$	$x_{2,m}$	$x_{3,m}$	…	$x_{n,m}$	y_m

Suponga que buscamos un ajuste de los datos de la forma $y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + \ldots + b_n \cdot x_n$. Usted puede obtener la aproximación de mínimos cuadrados de los coeficientes **b** = $[b_0 \ \ b_1 \ \ b_2 \ \ b_3 \ \ldots \ b_n]$, al crear la matriz **X:**

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{n1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{32} & \cdots & x_{n2} \\ 1 & x_{13} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{n3} \\ . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_{1,m} & x_{2,m} & x_{3,m} & \cdots & x_{n,m} \end{bmatrix}$$

Entonces, el vector de coeficientes se obtiene como $\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{y}$, en la cual **y** es el vector $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \ldots \ y_m]^T$.

Por ejemplo, utilizar los datos siguientes para obtener la regresión linear múltiple

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3,$$

x_1	x_2	x_3	y
1.20	3.10	2.00	5.70
2.50	3.10	2.50	8.20
3.50	4.50	2.50	5.00
4.00	4.50	3.00	8.20
6.00	5.00	3.50	9.50

Con la calculadora, en modo de RPN, usted puede seguir de la forma siguiente:

Primero, dentro de su directorio HOME, cree un sub-directorio que se llamará MPFIT (Multiple linear and Polynomial data FITting), e active este sub-directorio. Dentro del sub-directorio, escriba este programa:

```
« → X y « X TRAN X * INV X TRAN * y * » »
```

y almacénelo en una variable llamada MTREG (MulTiple REGression).

Después, escriba las matrices **X** y **b** en la pantalla:

[[1,1.2,3.1,2][1,2.5,3.1,2.5][1,3.5,4.5,2.5][1,4,4.5,3][1,6,5,3.5]]

ENTER ENTER (guardar una copia adicional)

[5.7,8.2,5.0,8.2,9.5] ENTER

Presione VAR MTREG. El resultado es: [-2.1649…,–0.7144…,-1.7850…,7.0941…], i.e.,

$$y = -2.1649–0.7144\cdot x_1 -1.7850\times 10^{-2}\cdot x_2 + 7.0941\cdot x_3 .$$

Usted debe tener en la pantalla de su calculadora el valor de la matriz X y el vector b, los valores ajustados de y se obtienen al calcular **y** = **X**·**b**, por lo tanto, simplemente presione × para obtener: [5.63.., 8.25.., 5.03.., 8.23.., 9.45..].

Comparar estos valores ajustados con los datos originales según lo demostrado en la tabla siguiente:

x_1	x_2	x_3	y	y-ajust.
1.20	3.10	2.00	5.70	5.63
2.50	3.10	2.50	8.20	8.25
3.50	4.50	2.50	5.00	5.03
4.00	4.50	3.00	8.20	8.23
6.00	5.00	3.50	9.50	9.45

Ajuste polinómico

Considere los datos x-y siguientes $\{(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots, (x_n,y_n)\}$. Suponer que deseamos ajustar un polinomio de orden p a estos datos. Es decir buscamos un ajuste de la forma $y = b_0 + b_1\cdot x + b_2\cdot x^2 + b_3\cdot x^3 + \ldots + b_p\cdot x^p$. Usted puede obtener la aproximación de mínimos cuadrados de los valores de los coeficientes **b** = $[b_0 \ \ b_1 \ \ b_2 \ \ b_3 \ldots b_p]$, creando la matriz **X**

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{p-1} & y_1^{\,p} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{\,p-1} & y_2^{\,p} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \dots & x_3^{\,p-1} & y_3^{\,p} \\ . & . & . & . & & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{\,p-1} & y_n^{\,p} \end{bmatrix}$$

Entonces, el vector de coeficientes se obtiene de $\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{X})^{-1}\cdot\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{y}$, donde **y** es el vector $\mathbf{y} = [y_1\ y_2\ \dots\ y_n]^T$.
En el capítulo 10, definimos la matriz de Vandermonde que correspondía a un vector $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \dots\ x_m]$. La matriz de Vandermonde es similar a la matriz **X** de interés para el ajuste polinómico, pero teniendo solamente *n*, en vez de (*p+1*) columnas.
Podemos aprovecharnos de la función de VANDERMONDE para crear la matriz **X** si observamos las reglas siguientes:

Si $p = n\text{-}1$, $\mathbf{X} = \mathbf{V}_n$.
Si $p < n\text{-}1$, remover las columnas $p+2, \dots, n\text{-}1, n$ de $\mathbf{V}_n$ para formar **X**.
Si $p > n\text{-}1$, agregar las columnas $n+1, \dots, p\text{-}1, p+1$, a $\mathbf{V}_n$ para formar **X**.

En el paso 3 de esta lista, tenemos que estar enterados que la columna *i* ($i= n+1, n+2, \dots, p+1$) es el vector $[x_1^i\ x_2^i\ \dots\ x_n^i]$. Si utilizáramos una lista de los valores de los datos para x en vez de un vector, es decir, $\mathbf{x} = \{\ x_1\ x_2\ \dots\ x_n\ \}$, podemos calcular fácilmente la lista $\{\ x_1^i\ x_2^i\ \dots\ x_n^i\ \}$. Entonces, podemos transformar esta lista en un vector y utilizar el menú COL para agregar esas columnas a la matriz $\mathbf{V}_n$ hasta formar **X**.

Cuando **X** está lista, y con el vector **y** disponible, el cálculo del vector de coeficientes **b** es igual que la regresión linear múltiple. Así, podemos escribir un programa para calcular la regresión polinómica que puede aprovecharse del programa desarrollado ya para la regresión linear múltiple. Necesitamos agregar a este programa los pasos 1 a 3 enumeramos arriba.

El algoritmo para el programa, por lo tanto, se puede escribir como sigue:

Escribir los vectores x y y, de la misma dimensión, como listas. (nota: puesto que la función VANDERMONDE utiliza una lista como entrada, es más conveniente escribir los datos (x,y) como listas.) También, escriba el valor de p.

- Determine n = tamaño del vector **x**.
- Use la función VANDERMONDE para generar la matriz de Vandermonde $\mathbf{V}_n$ para la lista **x** escrita.
- Si *p = n-1*, entonces

  $\mathbf{X} = \mathbf{V}_n$,

  Si no, si *p < n-1*

  Remover columnas *p+2, …, n* de $\mathbf{V}_n$ para formar **X**
  (Use repetición FOR y COL-)

  Si no

  Agregar columnas *n+1, …, p+1* a $\mathbf{V}_n$ para formar **X**
  (repetición FOR , calcular x^i, convertir a vector, use COL+)
- Convertir **y** a vector
- Calcular **b** usando el programa MTREG (ver el ejemplo anterior de la regresión linear múltiple)

Aquí está la traducción del algoritmo a un programa en lenguaje UserRPL. (véase el capítulo 21 para la información adicional sobre la programación):

```
«                              Abrir el programa
 → x y p                       Leer las listas x y y, y p (niveles 3.2.1)
 «                             Abrir el subprograma 1
 x SIZE → n                    Determinar el tamaño de la lista de x
 «                             Abrir el subprograma 2
   x VANDERMONDE               Poner x en stack, obtener Vn
   IF 'p<n-1' THEN             Este IF es el paso 3 del algoritmo
     n                         Poner n en stack
     p 2 +                     Calcular p+1
     FOR j                     Repetir j = n-1, n-2, …, p+1, paso = -1
         j  COL– DROP          Quitar la columna y removerla
    -1 STEP                    Cerrar FOR-STEP
   ELSE
     IF 'p>n-1' THEN
```

```
      n 1 +                    Calcular n+1
      p 1 +                    Calcular p+1
     FOR j                     Repetición con  j = n, n+1, …, p+1.
        x  j  ^                Calcular xʲ, como lista
        OBJ→ →ARRY             Convertir lista a arreglo
        j COL+                 Agregar la columna a la matriz
     NEXT                      Cerrar FOR-NEXT
   END                         Finaliza segunda cláusula IF
 END                           Finaliza primer IF.  El resultado es X
 y  OBJ→ →ARRY                 Convertir lista y a arreglo
 MTREG                         X y y se usan en MTREG
 →NUM                          Convertido al formato decimal
 »                             Cerrar sub-programa 2
»                              Cerrar sub-programa 1
»                              Cerrar programa principal
```

Almacenar programa en variable POLY (POLYnomial fitting).

Como ejemplo, utilizar los datos siguientes para obtener una regresión polinómica con p = 2, 3, 4, 5, 6.

x	y
2.30	179.72
3.20	562.30
4.50	1969.11
1.65	65.87
9.32	31220.89
1.18	32.81
6.24	6731.48
3.45	737.41
9.89	39248.46
1.22	33.45

Dado que utilizaremos los mismos datos x-y para los polinomios de diversas órdenes, es recomendable almacenar las listas de los valores de los datos x y y en variables xx y yy, respectivamente. Esta manera, no tendremos que escribirlas de nuevo en cada uso del programa POLY. Por lo tanto, proseguir de la forma siguiente:

{ 2.3 3.2 4.5 1.65 9.32 1.18 6.24 3.45 9.89 1.22 } ENTER 'xx' STO►

{179.72 562.30 1969.11 65.87 31220.89 32.81 6731.48 737.41 39248.46 33.45} ENTER 'yy' STO►

Para ajustar los datos a los polinomios utilizar lo siguiente:

XX YY 2 POLY, Resultado: [4527.73 -3958.52 742.23]

es decir, $y = 4527.73\text{-}39.58x+742.23x^2$

XX YY 3 POLY, Resultado: [–998.05 1303.21 -505.27 79.23]

es decir, $y = -998.05+1303.21x-505.27x^2+79.23x^3$

XX YY 4 POLY, Resultado: [20.92 –2.61 –1.52 6.05 3.51]

es decir, $y= 20.92\text{-}2.61x\text{-}1.52x^2+6.05x^3+3.51x^4$.

XX YY 5 POLY, Resultado: [19.08 0.18 –2.94 6.36 3.48 0.00]

es decir, $y = 19.08+0.18x\text{-}2.94x^2+6.36x^3+3.48x^4+0.0011x^5$

XX YY 6 POLY, Resultado: [-16.73 67.17 –48.69 21.11 1.07 0.19 0.00], es decir,

$y = -16.73+67.17x\text{-}48.69x^2+21.11x^3+1.07x^4+0.19x^5+0.0058x^6$

Selección del ajuste óptimo

Como usted puede ver de los resultados arriba, usted puede ajustar cualquier polinomio a un sistema de datos. La pregunta se presenta, ¿cuál es la mejor regresión para los datos? Para ayudar la decisión sobre el ajuste óptimo de los datos podemos utilizar varios criterios:

- El coeficiente de correlación, r. Este valor se restringe al rango $-1 < r < 1$. Mientras más cerca está *r* a +1 ó –1, mejor es el ajuste de los datos.
- La suma de errores ajustados, SSE. Ésta es la cantidad que debe ser reducida al mínimo por el método de los mínimos cuadrados.
- Gráfica de residuos. Éste es un diagrama del error que corresponde a cada uno de los puntos de referencias originales. Si estos errores son totalmente aleatorios, el diagrama de los residuos no debe demostrar ninguna tendencia particular.

Antes de procurar programar estos criterios, presentamos algunas definiciones:

Dado los vectores **x** y **y** de los datos que se ajustarán a la ecuación polinómica, formamos la matriz **X** y la utilizamos para calcular un vector de los coeficientes polinómicos **b**. Podemos calcular un vector de los datos ajustados, **y**', usando **y**' = **X**·**b**.

Un vector de errores se calcula como **e** = **y** – **y**'.

La suma de errores cuadrados es igual al cuadrado de la magnitud del vector de errores, es decir, SSE = $|\mathbf{e}|^2 = \mathbf{e}\bullet\mathbf{e} = \Sigma\, e_i^2 = \Sigma\, (y_i - y'_i)^2$.

Para calcular el coeficiente de correlación necesitamos calcular primero lo que se conoce como la suma de totales ajustados, SST, definida como SST = $\Sigma\, (y_i - \bar{y})^2$, en la cual $\bar{y}$ es el valor medio de los valores originales de y, es decir, $\bar{y} = (\Sigma y_i)/n$.

En términos de SSE y de SST, el coeficiente de correlación se define como

$$r = [1-(SSE/SST)]^{1/2} .$$

Aquí está el nuevo programa incluyendo el cálculo de SSE y de r (una vez más, consultar la página pasada de este capítulo para ver cómo producir los nombres de la variable y del comando en el programa):

```
«
 → x y p
 «
 x SIZE → n
  «
   x VANDERMONDE
   IF 'p<n-1' THEN
     n
     p 2 +
     FOR j
          j  COL– DROP
    -1 STEP
   ELSE
     IF 'p>n-1' THEN
```

```
      n 1 +
      p 1 +
     FOR j
        x j ^
        OBJ→ →ARRY
        j  COL+
     NEXT
   END
END
y OBJ→  →ARRY
→  X  yv
   «
    X  yv  MTREG
   →NUM
   → b
    «
     b yv
     X b *                           Calcular X·b
      -                              Calcular e = y - X·b
     ABS SQ DUP                      Calcular SSE, copiar resultado
     y ΣLIST n /                     Calcular ȳ
     n 1 →LIST SWAP CON              Vector de n valores de ȳ
     yv – ABS SQ                     Calcular SST
     /                               Calcular SSE/SST
     NEG 1 + √                       Calcular r = [1–SSE/SST ]^(1/2)
     "r" →TAG                        Rotular resultado como "r"
     SWAP
    "SSE" →TAG
    »
   »
  »
 »
»
```

Almacene este programa bajo el nombre de POLYR, para acentuar el cálculo del coeficiente de correlación r.

Uso del programa POLYR para los valores de p entre 2 y 6 produce la tabla siguiente de valores del coeficiente de correlación, r, y de la suma de los errores cuadrados, SSE:

p	*r*	*SSE*
2	0.9971908	10731140.01
3	0.9999768	88619.36
4	0.9999999	7.48
5	0.9999999	8.92
6	0.9999998	432.61

Mientras que el coeficiente de correlación está muy cerca de 1.0 para todos los valores de p en la tabla, los valores de SSE varían entre sí. El valor más pequeño de SSE corresponde a p = 4. Así, usted podría seleccionar la regresión polinómica para los datos x-y originales como:

$$y = 20.92-2.61x-1.52x^2+6.05x^3+3.51x^4.$$

Capítulo 19
Números en diversas bases

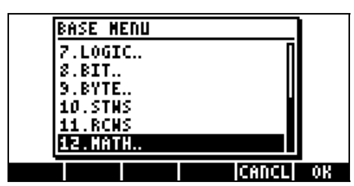
En este capítulo presentamos ejemplos de cálculos del número en bases diferentes a la base decimal.

Definiciones

El sistema de numeración usado para la aritmética diaria se conoce como el sistema decimal pues utiliza 10 (latín, deca) dígitos, a saber 0-9, para escribir cualquier número. Las computadoras, por otra parte, utilizan un sistema que se basa en dos estados posibles, o el sistema binario. Estos dos estados son representados por 0/1, sí/no, o alto voltaje/bajo voltaje. Las computadoras también utilizan los sistemas de numeración basados en ocho dígitos (0-7) o sistema octal, y dieciséis dígitos (0-9, A-f) o hexadecimal. Como en la sistema decimal, la posición relativa de los dígitos determina su valor. En general, un número n en la base b se puede escribir como serie de dígitos $n = (a_1a_2 \ldots a_n.c_1c_2 \ldots c_m)_b$. El "punto" se separa *n* dígitos "enteros" de los *m* dígitos "decimales". El valor del número, convertido a nuestro sistema decimal acostumbrado, se calcula usando $n = a_1\cdot bn^{-1} + a_2\cdot b^{n-2} + \ldots + a_nb^0 + c_1\cdot b^{-1} + c_2\cdot b^{-2} + \ldots + c_m\cdot b^{-m}$. Por ejemplo, $(15.234)_{10} = 1\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 + 2\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} + 4\cdot 10^{-3}$, y $(101.111)_2 = 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3}$

El menú BASE

El menú BASE se activa a través de las teclas ↱ BASE (la tecla 3). Habiendo seleccionado la opción CHOOSE boxes para la señal de sistema número 117 (véase el Capítulo 1), el menú BASE mostrará las siguientes opciones:



Por otro lado, si se selecciona la opción SOFT menus para la señal de sistema número 117, el menú BASE muestra entonces las siguientes opciones:

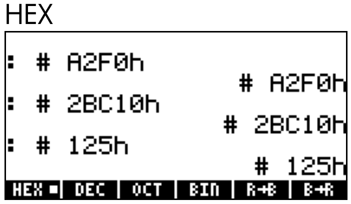
Esta figura indica que las opciones LOGIC, BIT, y BYTE en el menú BASE representan sub-menús y no simplemente funciones. Estos menús se presentan en detalle a continuación.

Funciones HEX, DEC, OCT, y BIN

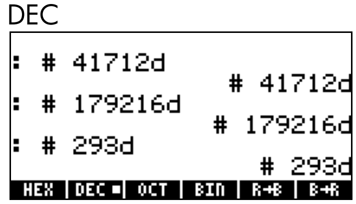
Los números en sistemas no decimales, a los que se les refiere como enteros binarios (binary integers), se escriben en la calculadora precedidos del símbolo # (← #). Para seleccionar la base numérica para los enteros binarios, úsese una de las siguientes funciones HEX(adecimal), DEC(imal), OCT(al), o BIN(ario) en el menú BASE. Por ejemplo, si se selecciona HEX■, los enteros binarios serán números hexadecimales, por ejemplo, #53, #A5B, etc. A medida que se seleccionan diferentes sistemas numéricos, los números se convierten automáticamente a la nueva base.

Para escribir un número en un sistema particular, escríbase el número comenzando con el símbolo # y terminando con la letra h (hexadecimal), d (decimal), o (octal), ó b (binario). Algunos ejemplos se muestran a continuación. El sistema numérico activo se identifica encima de las figuras.

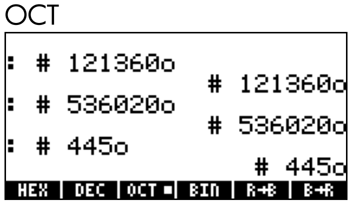
HEX



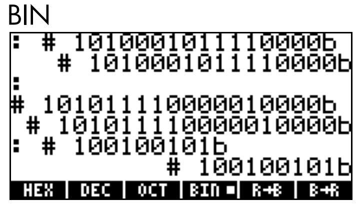
DEC



OCT



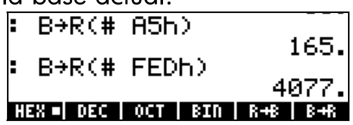
BIN

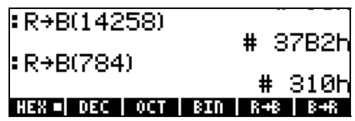


El sistema decimal (DEC) tiene 10 dígitos (0.1.2.3.4.5.6.7.8.9), el sistema hexadecimal (HEX) tiene 16 dígitos (0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E ,F), el sistema octal (OCT) tiene 8 dígitos (0.1.2.3.4.5.6.7), y el sistema binario (BIN) tiene solamente 2 dígitos (0.1).

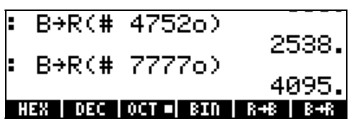
Conversión entre los sistemas de numeración

Cualquiera que sea el sistema de numeración seleccionado, este se denomina sistema binario con el fin de usar las funciones R→B y B→R. Por ejemplo, si se selecciona HEX■, la función B→R convertirá cualquier número hexadecimal (precedido por #) en un número decimal, mientras que la función R→B opera en la dirección opuesta. Intentar los ejercicios siguientes, HEX es la base actual:

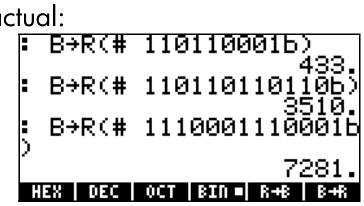


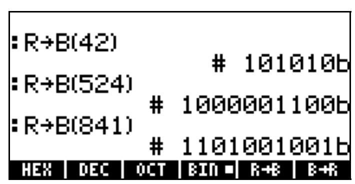


Los ejemplos siguientes demuestran conversiones cuando la base es el sistema octal:



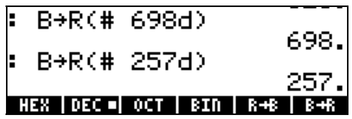
También presentamos transformaciones usando el sistema binario como la base actual:

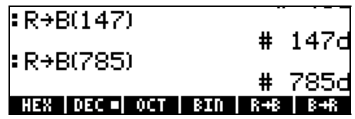




Nótese que cada vez que usted escribe un número comenzando con #, la calculadora escribe el número que usted escribió precedido por # y seguido por la letra h, o, ó b (hexadecimal, octal, o binario). El tipo de letra usado como sufijo depende se ha seleccionado de qué sistema de numeración no-decimal, es decir, HEX, OCT, o BIN.

Para ver qué sucede si usted selecciona DEC, intentar las conversiones siguientes:





El único efecto de seleccionar la sistema DECimal es que los números decimales, cuando están comenzados con el símbolo #, están escritos con el sufijo d.

Wordsize (Tamaño de palabra)

Wordsize es el número de bits en un objeto binario. El valor predeterminado del wordsize es 64 bytes. La función RCWS (ReCall WordSize) muestra el valor actual del wordsize. La función STWS (SeT the WordSize) permite que el usuario reajuste wordsize a cualquier número entre 0 y 64.

El cambiar wordsize afectará la manera que las operaciones del número entero binario se realizan. Por ejemplo, si un número entero binario excede la corriente wordsize, los bits iniciales serán removidos antes de que cualquier operación se pueda realizar en tal número.

Operaciones con números enteros binarios

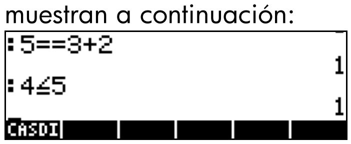
Las operaciones de la adición, de la substracción, del cambio de signo, de la multiplicación, y de la división se definen para los números enteros binarios. Algunos ejemplos, de la adición y de la substracción, se demuestran abajo, para diversas bases:

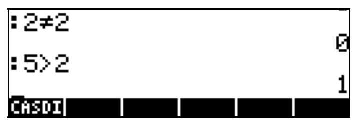
```
#A02h + #12Ah = #B2Ch
#2562d + #298d = #2860d
#5002o + #452o = #5454o
#101000000010b + #100101010b = #101100101100b

#A02h - #12Ah = #8D8h
#2562d - #298d = #2264d
#5002o - #452o = #4330o
#101000000010b - #100101010b = #100011011000b
```

El menú LOGIC

El menú LOGIC, disponible en el menú BASE (↱ BASE) proporciona las funciones siguientes:

Las funciones AND, OR, XOR (OR exclusivo), y NOT son las funciones lógicas. Estas funciones requieren dos valores o expresiones (una en el caso de NOT) eso se puede expresarse como resultados lógicos binarios, es decir, 0 o 1. Comparaciones de números a través de los operadores de comparación =, ≠, >, <, ≤, ≥, son declaraciones lógicas que pueden ser o verdaderas (1) o falsas (0). Algunos ejemplos de declaraciones lógicas se muestran a continuación:



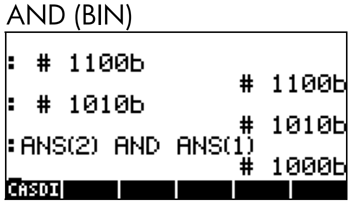


Las funciones AND, OR, XOR, NOT puede ser aplicado a las expresiones comparativas bajo las reglas siguientes:

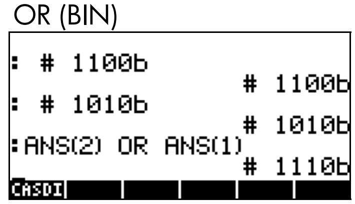
1 AND 1 = 1	1 AND 0 = 0	0 AND 1 = 0	0 AND 0 = 0
1 OR 1 = 1	1 OR 0 = 1	0 OR 1 = 1	0 OR 0 = 0
1 XOR 1 = 0	1 XOR 0 = 1	0 XOR 1 = 1	0 XOR 0 = 0
NOT(1) = 0	NOT(0) = 1		

Estas funciones se pueden utilizar para construir declaraciones lógicas con propósitos de programación. En el contexto de este capítulo, estas operaciones se utilizarán para cálculos bit-a-bit de acuerdo con las reglas indicadas anteriormente. En los ejemplos siguientes, el sistema de numeración de base se indica en paréntesis:

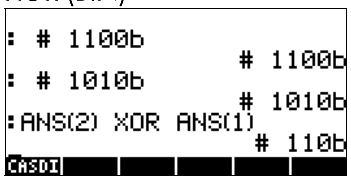
AND (BIN)

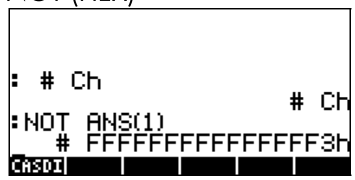


OR (BIN)



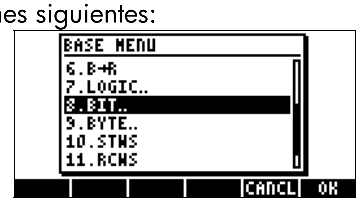
XOR (BIN) NOT (HEX)





El menú BIT

El menú BIT, disponible en el menú BASE (↱ BASE) proporciona las funciones siguientes:

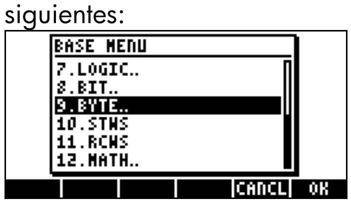


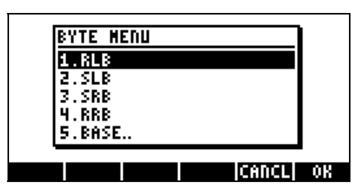
Las funciones RL, SL, ASR, SR, RR, contenidas en el menú BIT, se utilizan manipular bits en un número entero binario. La definición de estas funciones se demuestra abajo:

RL: Rotar a la izquierda un bit, Vg., #1100b → #1001b
SL: Cambiar de puesto a la izquierda un bit, Vg., #1101b → #11010b
ASR: Cambio de puesto aritmético a la derecha, un bit, Vg., #1100010b → #110001b
SR: Cambio de puesto aritmético a la izquierda, un bit, Vg., #11011b →#1101b
RR: Rotar a la derecha un bit, Vg., #1101b → #1110b

El menú BYTE

El menú BYTE, disponible en el menú BASE (↱ BASE) provee las funciones siguientes:





Las funciones RLB, SLB, SRB, RRB, contenidas en el menú BIT, se utilizan para manipular bits en un número entero binario. La definición de estas funciones se demuestra a continuación:

RLB: Rotar a la izquierda un byte, Vg., #1100b → #1001b
SLB: Cambiar de puesto a la izquierda un byte, Vg.., #1101b → #11010b
SRB: Cambiar de puesto a la derecha un byte, Vg.., #11011b →#1101b
RRB: Rotar a la derecha un byte, Vg.., #1101b → #1110b

Números hexadecimales para las referencias del píxel

Muchas funciones gráficas utilizan referencias del píxel como argumento, Vg., { #332h #A23h } #Ah 0. 360. ARC, para dibujar un arco de un círculo. Utilizamos las funciones C→PX y PX→C para convertir rápidamente entre los coordenadas del usuario y las referencias del píxel. Estas funciones se pueden encontrar a través del catálogo de funciones (→ CAT).

Algunos ejemplos se demuestran a continuación:

Capítulo 20
Menús y teclas de usuario

Con el uso de los varios menús de la calculadora usted se ha familiarizado con la operación de los menús. También, usted ya conoce muy bien las diversas funciones disponibles en las teclas de la calculadora, ya sea con su función principal, o combinándolas con las teclas ←, → ó ALPHA (ALPHA). En este capítulo se presentan ejemplos de menús y de teclados modificados para requisitos particulares del usuario.

Menús de usuario

Un menú de usuario es un menú creado por el usuario. Las especificaciones para el menú se almacenan en la variable CST reservada para este propósito. Así, para crear un menú usted debe crear esta variable con las características que usted desea exhibir en su menú y las acciones requeridas para las teclas del menú. Para demostrar ejemplos de modificación de menús para requisitos particulares necesitamos fijar la bandera 117 del sistema a la opción SOFT menus. Cerciórese de hacer esto antes de continuar (véase el capítulo 2 para las instrucciones para fijar banderas del sistema)

El menú PRG/MODES/MENU

Las instrucciones útiles en modificar menús para requisitos particulares son proporcionadas por el menú MENU, accesible a través del menú PRG (← PRG). Habiendo fijado la señal o bandera de sistema 117 a la opción SOFT menus, al utilizar ← PRG NXT MODES MENU se produce el siguiente menú:

Las funciones disponibles son:
MENU: Activa un menú dado su número
CST: Referencia de la variable CST. Por lo tanto, → CST muestra el contenido de la variable CST.
TMENU: Utilícese en vez de la función MENU para crear un menú temporal sin modificar el contenido de CST
RCLMENU: Obtiene el número de menú del menú actual

Números de menú (funciones RCLMENU y MENU)

Cada menú predefinido tiene un número asociado . Por ejemplo, suponga que usted activa el menú MTH (⇦ MTH). A continuación, usando el catálogo de funciones (⇨ CAT) localice la función RCLMENU y actívela. En modo ALG, simplemente presione ENTER después que `RCLMENU()` aparezca en la pantalla. El resultado es el número 3.01. Así, usted puede activar el menú de MTH usando `MENU(3.01)`, en modo ALG, ó `3.01 MENU`, en modo RPN.

La mayoría de los menús pueden ser activados sin conocerse sus números cuando se usa el teclado. Hay, sin embargo, algunos menús no accesibles a través del teclado. Por ejemplo, el menú STATS (estadística) es accesible solamente utilizando la función MENU. Su número es 96.01. Use `MENU(96.01)` en modo ALG, ó `96.01 MENU` en modo RPN para activar el menú STAT.

Nota: El número 96.01 en este ejemplo indica la activación del sub-menú (01) del menú 96.

Menús de usuario (las funciones MENU y TMENU)

Suponga que usted necesita activar cuatro funciones para un uso particular. Por ejemplo, sea que usted necesita acceder rápidamente a las funciones EXP, LN, GAMMA y ! (ALPHA ⇨ 2) las cuales usted colocará en un menú de usuario que usted quiere mantener activo por un tiempo determinado. Usted podría hacer esto creando un menú temporal con la función TMENU, o un menú más permanente con la función MENU. La diferencia principal es que la función MENU crea la variable CST, mientras que TMENU no crea esa variable. Con la variable CST creada permanentemente en su sub-directorio, usted puede reactivar el menú de usuario cuando así lo desee (el menú usa las especificaciones en CST), al presionar ⇦ CUSTOM . Con TMENU se pierden las especificaciones del menú después de que usted substituya el menú temporal por otro menú.

Por ejemplo, en modo de RPN, un menú se crea usando:

{EXP LN GAMMA !} ENTER TMENU ENTER

o

{EXP LN GAMMA !} ENTER MENU ENTER

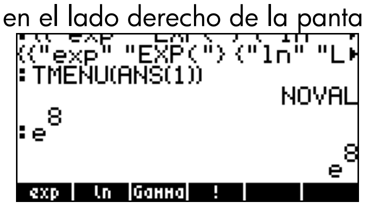
Esta acción produce el menú:

Para activar cualquiera de estas funciones, simplemente escríbase el argumento de la función (un número), y presiónese a continuación la tecla de menú correspondiente.

En modo de ALG, la lista que se escribe como argumento de las funciones TMENU o MENU es más complicado:

{{“exp”,”EXP(“},{“ln”,”LN(“},{“Gamma”,”GAMMA(“},{“!”,”!(“}}

La razón para este argumento, en modo RPN, es que los nombres de las instrucciones o funciones son tanto etiquetas como instrucciones de menú. En modo ALG, los nombres de las instrucciones no producirán ninguna acción puesto que las funciones en modo ALG deben escribirse con un par de paréntesis que encierran los argumentos. En la lista mostrada anteriormente (para el modo ALG), dentro de cada sub-lista usted tiene una etiqueta para la tecla de menú, por ejemplo, "exp", seguida de la forma de escribir la función en la pantalla de manera que el argumento de la función pueda escribirse inmediatamente, por ejemplo, "EXP(". No necesitamos preocuparnos del paréntesis de cierre, porque la calculadora agregará este paréntesis antes de ejecutar la función. La activación de la función TMENU en modo ALG con la lista de argumentos mostrada anteriormente se ilustra a continuación. Primero, se escribe la lista, después producimos el menú temporal (véase las etiquetas de teclas del menú) usando la función TMENU(ANS(1)). También demostramos, en el lado izquierdo, el resultado de presionar la tecla exp, es decir, la línea EXP(. Después de escribir 8 ENTER el resultado de la operación se demuestra en el lado derecho de la pantalla:



Una versión más simple del menú puede ser definida usando

MENU({{”EXP(“,“LN(“,“GAMMA(“,”!(“}).

Menú aumentado en modo RPN

La lista presentada arriba para el modo ALG, se puede modificar levemente para utilizarse en el modo de RPN. L a lista modificada es la siguiente:

{{"exp",EXP},{"ln",LN},{"Gamma",GAMMA},{"!",!}}

Usted puede intentar usar esta lista con TMENU o MENU en modo RPN para verificar que se obtiene el mismo menú obtenido anteriormente en modo ALG.

Especificación del menú y la variable CST

De los dos ejercicios demostrados arriba notamos que la lista más general de la especificación del menú incluye un número de sub-listas iguales al número de los artículos que se exhibirán en el menú de usuario. Cada sub-lista contiene una etiqueta para tecla de menú seguida por la función, la expresión, la etiqueta, o el otro objeto que constituye el efecto de tecla del menú cuando esta es presionada. Hay que tener cuidado al especificar la lista del menú en modo ALG vs. modo RPN. En modo RPN, la acción de la tecla de menú puede ser simplemente un comando de la calculadora (es decir, EXP, LN, etc., según se demostró anteriormente), mientras que en modo ALG tiene que ser un texto presentando la función cuyos argumentos deben proveerse antes de presionar ENTER. Los ejemplos anteriores ilustran la diferencia entre estas especificaciones de menú.

La forma general de la lista de argumentos para los comandos TMENU o MENU en modo ALG es

{"label1","función1(","ls1(","rs1("}, {"label2", "función2(","ls2(","rs2("},…}

Mientras que, en modo RPN, la lista de argumentos tiene el siguiente formato:

{"label1", función1, ls1, rs1}, {"label2", función2, ls2, rs2},…}

En estas especificaciones, función1, función 2, etc., representan la operación principal de la tecla, mientras que ls1, ls2…, etc., representan la función de la tecla combinada con ←. De manera similar, rs1, rs2…, etc., representan la operación de la tecla combinada con →. Esta lista será almacenada en la variable CST si se utiliza la función MENU. Usted puede tener una variable

CST diferente en cada sub-directorio, y puede siempre sustituir el contenido actual del CST por los de otras variables que almacenan la lista con el formato apropiado para producir otro menú de usuario.

Nota: Se puede utilizar un GROB 21x8 (ver El Capítulo 22) para producir un icono en las teclas del menú. Como ejemplo, pruébese, en modo RPN:

{{GROB 21 8 00000EF908FFF900FFF9B3FFF9A2FFF9A3FFF9A0FFF388FF "hp" }}
ENTER MENU

Esta acción colocará el logotipo de hp en la tecla F1 . Al presionar F1 el texto 'hp' aparece en la línea de entrada de la pantalla.

Teclado de usuario

Cada tecla se puede identificar por dos números que representan su fila y columna. Por ejemplo, la tecla VAR (VAR) está situada en la fila 3 de la columna 1, y será referida como la tecla 31. Ahora, puesto que cada tecla tiene hasta diez funciones asociadas a ella, cada función es especificada por valores decimales entre 0 y 1, según las especificaciones siguientes:

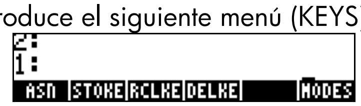
.0 o 1, función principal	0.01 ó 0.11, no es aplicable
.2, tecla combinada con ←	.21, simultáneamente con ←
.3, tecla combinada con →	.31, simultáneamente con →
.4, tecla combinada con ALPHA	.41, simultáneamente con ALPHA
.5, tecla combinada con ALPHA ←	.51, ALPHA simultáneamente con ←
.6, tecla combinada con ALPHA →	.61, ALPHA simultáneamente con →

Así, la función del VAR será referida como tecla 31.0 o 31.1, mientras que la función de UPDIR será la tecla 31.2, la función COPY será la tecla 31.3, la J mayúscula es la tecla 31.4, y la j minúscula es la tecla 31.5. (la tecla 31.6 no se define). En general, una tecla será descrita por el arreglo XY.Z, donde X = número de la fila, Y = número de la columna, Z = combinación de acuerdo con la lista anterior.

Podemos combinar una tecla dada con la tecla USER (← USER) para crear un teclado de usuario. En principio, el teclado entero se puede redefinir para realizar un número de operaciones modificadas para requisitos particulares.

El sub-menú PRG/MODES/KEYS

Las funciones útiles para modificar el teclado al gusto del usuario se proveen en el menú KEYS accesible a través del menú (← PRG). Fijando la bandera de sistema 117 en la opción SOFT menus, la secuencia de teclas ← PRG NXT MODES KEYS produce el siguiente menú (KEYS):



Las funciones disponibles son:

ASN: Asigna un objeto a una tecla especificada por XY.Z
STOKEYS: Almacena la lista de teclas definidas por el usuario
RCLKEYS: Recobra la lista actual de teclas definida por el usuario
DELKEYS: Remueve unas o más teclas en la lista actual de teclas definida por el usuario, los argumentos son 0, para remover todas las teclas, o XY.Z, para remover la tecla XY.Z.

Recobrando la lista actual de teclas de usuario

Use la instrucción RCLKEYS para ver la lista actual de teclas de usuario. Previo a cualquier asignación de teclas de usuario, el resultado es una lista que contiene la letra S, es decir, { S }.

Asignación de un objeto a una tecla de usuario

Suponga que usted desea tener acceso al antiguo menú PLOT, introducido inicialmente con la serie de calculadoras del HP 48G, pero no disponible directamente del teclado. El número del menú para este menú es 81.01. Usted puede activar este menú usando:

Modo ALG : `MENU(81.01)`
Modo RPN: `81.01` ENTER `MENU` ENTER

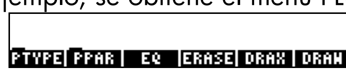
Si usted desea tener una manera rápida de activar este menú desde el teclado, asigne este menú a la tecla GRAPH ([F3]) cuyo número de referencia es 13.0, es decir, primera fila, tercera columna, para la función principal. Para asignar un objeto a una tecla, use la función ASN, como se muestra a continuación:

Modo ALG: `ASN(<<MENU(81.01)>>,13.0)`
Modo RPN: `<< 18.01 MENU >>` [ENTER] `13.0` [ENTER] `ASN`

Otro menú útil es el menú SOLVE original (descrito en el final del capítulo 6 en esta guía), que puede ser activado usando [→][7], simultáneamente.

Operación de teclas de usuario

Para operar esta tecla de usuario presiónese [←]USER antes de presionar la tecla [F3]. Nótese que después de presionar [←]USER la pantalla muestra la especificación `1USR` en la segunda línea del encabezado. Al presionar [←]USER [F3] en este ejemplo, se obtiene el menú PLOT:



Si usted tiene más de una tecla de usuario definida y desea activarlas a la vez, usted puede asegurar el teclado en modo USER al usar [←]USER [←]USER antes de presionar cualquier tecla de usuario. Cuando se asegura el teclado en modo USER, la especificación `USR` se mostrará en la segunda línea del encabezado. Para desactivar el modo USER, presione [←]USER una vez más.

Remoción de una tecla de usuario

Para remover la asignación hecha anteriormente, use la función DELKEYS, como se muestra a continuación:

Modo ALG: `DELKEYS(13.0)`
Modo RPN: `13.0` [ENTER] `DELKEYS` [ENTER]

Asignación de varias teclas de usuario

La manera más simple de asignar varias teclas de usuario es al proporcionar una lista de comandos y de especificaciones para las teclas. Por ejemplo,

suponga que asignamos las tres funciones trigonométricas (SIN, COS, TAN) y las tres funciones hiperbólicas (SINH, COSH, TANH) a las teclas F1 a F6, respectivamente, como teclas definidas por el usuario. En modo RPN use:
{SIN,11.0,COS,12.0,TAN,13.0,SINH,14.0,COSH,15.0,TANH,16.0} ENTER STOKEYS ENTER

En modo ALG, use:
STOKEYS({"SIN(' ,11.0, "COS(", 12.0, "TAN(", 13.0, "SINH(", 14.0, "COSH(", 15.0, "TANH(", 16.0}) ENTER

Opérense estas teclas al usar, por ejemplo, en modo RPN:

5 ← USER F1 4 ← USER F2 6 ← USER F3
2 ← USER F4 1 ← USER F5 2 ← USER F6

Para remover todas las teclas de usuario asignadas, use:
Modo ALG : DELKEYS(0) Modo RPN: 0 DELKEYS

Compruebe que las definiciones de las teclas de usuario han sido removidas con la función RCLKEYS.

Capítulo 21
Programación en lenguaje User RPL

El lenguaje User RPL es el lenguaje el de programación usado lo más comúnmente posible para programar la calculadora. Los componentes del programa se pueden incorporar en el editor de línea incluyéndolos entre los símbolos de programas « » en la orden apropiada. Porque hay más experiencia entre usuarios de la calculadora en la programación en el modo de RPN, la mayoría de los ejemplos en este capítulo serán presentados en el modo de RPN. También, para facilitar el incorporar instrucciones de programación, sugerimos que usted fije la bandera 117 del sistema a SOFT menus. Los programas trabajan igualmente bien en modo de ALG una vez que se hayan eliminado errores y se hayan probado en modo de RPN. Si usted prefiere trabajar en el modo de ALG, aprenda simplemente cómo hacer la programación en RPN y después reajuste el modo de funcionamiento a ALG para activar los programas. Para un ejemplo simple de programación en modo de ALG, referirse a la última página en este capítulo.

Un ejemplo de programación

A través de los capítulos anteriores en esta guía hemos presentado un número de programas que se pueden utilizar para una variedad de usos (por ejemplo, los programas CRMC y CRMT, usados para crear una matriz fuera de un número de listas, fueron presentados en el capítulo 10). En esta sección presentamos un programa simple para introducir los conceptos relacionados con la programación de la calculadora. El programa que escribiremos será utilizado para definir la función $f(x) = sinh(x)/(1+x^2)$, la cuál acepta listas como argumento (es decir, x puede ser una lista de números, según lo descrito en el capítulo 8). En el capítulo 8 indicamos que el signo de adición actúa como un operador de concatenación para las listas y no produce una suma término-por-término. En su lugar, usted necesita utilizar al operador ADD para conseguir una adición de listas término-por-término. Así, para definir la función demostrada arriba utilizaremos el programa siguiente:

```
«'x' STO x SINH 1 x SQ ADD / 'x' PURGE »
```

Para escribir el programa siga estas instrucciones:

Secuencia de teclas:	Produce:	Interpretado como:
[→] «»	«	Comenzar un programa RPL
['] [ALPHA] [←] [X] [▶] [STO▶]	'x' STO	Almacenar nivel 1 en x
[ALPHA] [←] [X]	x	Colocar x en nivel 1
[←] MTH HYP SINH	SINH	Calcular sinh del nivel 1
[1] [SPC] [ALPHA] [←] [X] [←] x^2	1 x SQ	Escribir 1 y calcular x^2
[←] MTH MTH LIST ADD	ADD	Calcular $(1+x^2)$,
[÷]	/	después dividir
['] [ALPHA] [←] [X] [▶]	'x'	
[←] PRG MEM DIR PURGE	PURGE	Eliminar variable x
[ENTER]		Programa en nivel 1

Para almacenar el programa, use: ['] [ALPHA] [←] [G] [STO▶]

Presione [VAR] para recuperar su menú de variables, y evaluar g(3.5) incorporando el valor del argumento en el nivel 1 ([3] [.] [5] [ENTER]) y entonces presionando g. El resultado es 1.2485…, i.e., g(3.5) = 1.2485. Intente también obtener g({1 2 3}), incorporando la lista en el nivel 1 de la exhibición: [←] {} [1] [SPC] [2] [SPC] [3] [ENTER] y presionando g. El resultado ahora es {SINH(1)/2 SINH(2)/5 SINH(3)/10}, si su CAS se fija a modo EXACT. Si su CAS se fija a modo APPROXIMATE, el resultado será {0.5876.. 0.7253… 1.0017…}.

Variables globales y locales y subprogramas

El programa g, definido arriba, puede ser exhibido como

```
« 'x' STO x SINH 1 x SQ ADD / 'x' PURGE »
```

usando [→] g.

Note que el programa utiliza el nombre de la variable x para almacenar el valor colocado en el nivel 1 de la pantalla con los pasos de programación 'x' STO. La variable x, mientras que el programa se está ejecutando, se almacena en su menú variable como cualquier otra variable que usted hubiera almacenado previamente. Después de calcular la función, el

programa borra la variable x así que no se mostrará en su menú de variables después de finalizar el programa. Si purgáramos la variable x dentro del programa, su valor estaría disponible para nosotros después de la ejecución del programa. Por esa razón, la variable x, según lo utilizado en este programa, se conoce como una variable global. Una implicación del uso de x como variable global es que, si tuviéramos previamente definido una variable con el nombre x, su valor sería substituido por el valor que el programa utiliza y después removida totalmente de su menú de variables después de la ejecución del programa.
Desde el punto de vista de la programación, por lo tanto, una variable global es una variable que es accesible al usuario después de la ejecución de programa. Es posible utilizar una variable local dentro del programa que se define solamente para ese programa y no estará disponible para usarse después de la ejecución del programa. El programa anterior se podía modificar para leer:

```
« → x « x SINH 1 x SQ ADD / » »
```

El símbolo de la flecha (→)es obtenido combinando ↱ con 0, i.e., ↱ →. También, note que hay un sistema adicional de símbolos de programación (« ») que indica la existencia de un *sub-programa*, a saber, « x SINH 1 x SQ ADD / », dentro del programa principal. El programa principal comienza con la combinación → x, la cuál representa asignar el valor en el nivel 1 de la pantalla a una variable local x. Entonces, el flujo de programación continúa dentro del subprograma poniendo x en la pantalla, evaluando *SINH(x)*, colocando 1 en la pantalla, poniendo x en la pantalla, ajustando x, agregando 1 a x, y dividir el nivel 2 de la pantalla (*SINH(x)*) por el nivel 1 de la pantalla ($1+x^2$). El control de programa entonces se pasa de nuevo al programa principal, pero no hay comandos entre el primer sistema de símbolos de programación de cierre (»)y segundo, por lo tanto, el programa termina. El último valor en la pantalla, i.e., *SINH(x)/* ($1+x^2$), se vuelve como la salida del programa.

La variable x en la versión anterior del programa nunca ocupa un lugar entre las variables en su menú de variables. Esta variable se opera dentro de la memoria de la calculadora sin afectar ninguna variable con nombre similar en su menú de variables. Por esa razón, la variable x en este caso se refiere como <u>*una variable local*</u>.

Nota: Para modificar el programa, ponga el nombre del programa en la pantalla (ENTER), y use . Use las teclas ( ) para moverse en el programa. Utilizar la tecla de cancelación, , para suprimir cualquier conjunto de caracteres no deseados. Para agregar los símbolos del programa (i.e., « »), use « ». Puesto que estos símbolos vienen en pares usted tendrá que incorporarlos en el comienzo y el extremo del subprograma y suprimir uno de sus componentes con la tecla de cancelación .

```
« → x « x SINH 1 x SQ ADD / »  ».
```

Cuando haya terminado de corregir el programa, presione ENTER . El programa modificado se almacena nuevamente dentro de variable .

Alcance de Variable Global

Cualquier variable que usted define en el directorio HOME (o cualquier otro directorio o sub-directorio) será considerada una variable global desde el punto de vista del desarrollo de programa. Sin embargo, el alcance de tal variable, es decir, la localización en el árbol del directorio donde está accesible la variable, dependerá de la localización de la variable dentro del árbol (véase el capítulo 2).

La regla para determinar el alcance de una variable es la siguiente: una variable global es accesible al directorio donde se define y a cualquier sub-directorio unido a ese directorio, a menos que una variable con el mismo nombre exista en el sub-director bajo consideración. Las consecuencias de esta regla son las siguientes:

- Una variable global definida en el directorio HOME será accesible de cualquier directorio dentro del HOME, a menos que esté redefinida dentro de un directorio o un sub-directorio.
- Si usted redefine la variable dentro de un directorio o de un sub-directorio esta definición toma precedencia sobre cualquier otra definición en directorios sobre el actual.

- Al activar un programa que se refiera a una variable global dada, el programa utilizará el valor de la variable global en el directorio desde el cual se invoca el programa. Si ninguna variable con ese nombre existe en el directorio de invocación, el programa buscará los directorios sobre el actual, hasta el directorio HOME, y utiliza el valor que corresponde al nombre de la variable bajo consideración en el directorio más cercano sobre el actual.
- Un programa definido en un directorio dado puede ser alcanzado desde ese directorio o de cualquiera de sus sub-directorios.

Todo estas reglas pueden confundir a un nuevo usuario de la calculadora. Pero se pueden simplificar a la sugerencia siguiente: *Crear los directorios y los sub-directorios con nombres significativos para organizar sus datos, y se cerciora de usted tener todas las variables globales que usted necesita dentro del sub-directorio apropiado.*

Alcance de Variable Local

Las variables locales son activas solamente dentro de un programa o de un subprograma. Por lo tanto, su alcance se limita al programa o al subprograma donde se definen. Un ejemplo de una variable local es el índice en el lazo FOR (descrito más adelante en este capítulo), por ejemplo
`« → n x « 1 n FOR j x NEXT n →LIST » »`

El menú PRG

En esta sección presentamos el contenido del menú de PRG (programación) con el sistema de la bandera 117 del sistema de la calculadora fija a SOFT menus. Con este ajuste de la bandera los sub-menus y los comandos en el menú de PRG se mostrarán como etiquetas de menú,. Esto facilita el incorporar los comandos de programación en la línea del editor cuando usted está escribiendo un programa.

Para tener acceso al menú PRG use la combinación ← PRG . Dentro del menú PRG identificamos los sub-menus siguientes (presione NXT para moverse a la colección siguiente de sub-menus en el menú de PRG):

He aquí una breve descripción del contenido de estos sub-menus, y sus sub-menus:

SCREEN: Funciones para la manipulación de elementos en la pantalla

MEM: Funciones relacionadas con la manipulación de la memoria
DIR: Funciones relacionadas con la manipulación de directorios
ARITH: Funciones para manipular índices almacenados en variables

BRCH: Colección de sub-menus con ramificación y lazos de programas
IF: IF-THEN-ELSE-END, instrucción para ramificar
CASE: CASE-THEN-END, instrucción para ramificar
START: START-NEXT-STEP, instrucción para ramificar
FOR: FOR-NEXT-STEP, instrucción para los lazos
DO: DO-UNTIL-END, instrucción para los lazos
WHILE: WHILE-REPEAT-END, instrucción para los lazos

TEST: Operadores de comparación, operadores lógicos, funciones de prueba de banderas

TYPE: Funciones para manipulación de objetos

LIST: Funciones relacionadas con la manipulación de listas
ELEM: Funciones para manipular elementos de listas
PROC: Funciones para aplicar procedimientos a las listas

GROB: Funciones para la manipulación de objetos gráficos

PICT: Funciones para producir diagramas en la pantalla de los gráficos

CHARS: Funciones para la manipulación de la cadena de caracteres

MODES: Funciones para modificar modos de la calculadora
FMT: Para cambiar formatos de número, formato de la coma
ANGLE: Para cambiar medida del ángulo y sistemas coordinados
FLAG: Fijar y remover banderas y comprobar su estado
KEYS: Para definir y activar teclas de usuario (Capítulo 20)
MENU: Para definir y activar menús de usuario (Capítulo 20)
MISC: Cambios de modo misceláneos (señal sonora, reloj, etc.)

IN: Funciones para la entrada del programa

OUT: Funciones para la salida del programa

TIME: Funciones de tiempo
ALRM: Manipulación de alarmas

ERROR: Funciones para la gestión de error
IFERR: IFERR-THEN-ELSE-END, construcción para la gestión de error

RUN: Funciones para los programas del funcionamiento y el eliminar errores

Navegación en los sub-menús RPN

Comenzar con la combinación ← PRG , entonces presionar la tecla apropiada del menú (por ejemplo, MEM). Si usted desea tener acceso a un sub-menú dentro de este sub-menú (por ejemplo., DIR dentro del sub-menú MEM), presionar la tecla correspondiente. Para subir de un sub-menú, presione la tecla NXT hasta que usted encuentra la referencia al sub-menú superior (por ejemplo., MEM dentro del sub-menú DIR) o al menú PRG (i.e., PRG).

Funciones enumeradas por sub-menú

La tabla que comienza en la página siguiente es un listado de las funciones dentro de los sub-menús de PRG enumerados por sub-menú.

SCREEN	**MEM/DIR**	**BRCH/IF**	**BRCH/WHILE**	**TYPE**
DUP	PURGE	IF	WHILE	OBJ→
SWAP	RCL	THEN	REPEAT	→ARRY
DROP	STO	ELSE	END	→LIST
OVER	PATH	END		→STR
ROT	CRDIR		**TEST**	→TAG
UNROT	PGDIR	**BRCH/CASE**	==	→UNIT
ROLL	VARS	CASE	≠	C→R
ROLLD	TVARS	THEN	<	R→C
PICK	ORDER	END	>	NUM
UNPICK			≤	CHR
PICK3	**MEM/ARITH**	**BRCH/START**	≥	DTAG
DEPTH	STO+	START	AND	EQ→
DUP2	STO-	NEXT	OR	TYPE
DUPN	STOx	STEP	XOR	VTYPE
DROP2	STO/		NOT	
DROPN	INCR	**BRCH/FOR**	SAME	**LIST**
DUPDU	DECR	FOR	TYPE	OBJ→
NIP	SINV	NEXT	SF	→LIST
NDUPN	SNEG	STEP	CF	SUB
	SCONJ		FS?	REPL
MEM		**BRCH/DO**	FC?	
PURGE	**BRCH**	DO	FS?C	
MEM	IFT	UNTIL	FC?C	
BYTES	IFTE	END	LININ	
NEWOB				
ARCHI				
RESTO				

LIST/ELEM	**GROB**	**CHARS**	**MODES/FLAG**	**MODES/MISC**
GET	→GROB	SUB	SF	BEEP
GETI	BLANK	REPL	CF	CLK
PUT	GOR	POS	FS?	SYM
PUTI	GXOR	SIZE	FC?	STK
SIZE	SUB	NUM	FS?C	ARG
POS	REPL	CHR	FS?C	CMD
HEAD	→LCD	OBJ→	FC?C	INFO
TAIL	LCD→	→STR	STOF	
	SIZE	HEAD	RCLF	**IN**
LIST/PROC	ANIMATE	TAIL	RESET	INFORM
DOLIST		SREPL		NOVAL
DOSUB	**PICT**		**MODES/KEYS**	CHOOSE
NSUB	PICT	**MODES/FMT**	ASN	INPUT
ENDSUB	PDIM	STD	STOKEYS	KEY
STREAM	LINE	FIX	RECLKEYS	WAIT
REVLIST	TLINE	SCI	DELKEYS	PROMPT
SORT	BOX	ENG		
SEQ	ARC	FM,	**MODES/MENU**	**OUT**
	PIXON	ML	MENU	PVIEW
	PIXOF		CST	TEXT
	PIX?	**MODES/ANGLE**	TMENU	CLLCD
	PVIEW	DEG	RCLMENU	DISP
	PX→C	RAD		FREEZE
	C→PX	GRAD		MSGBOX
		RECT		BEEP
		CYLIN		
		SPHERE		

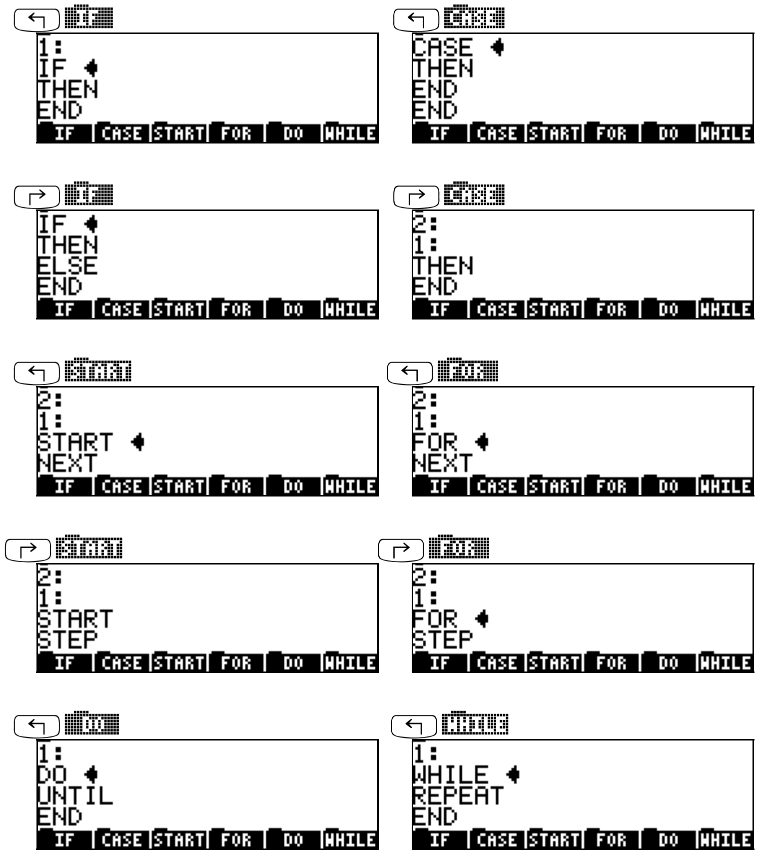
TIME	**ERROR**	**RUN**
DATE	DOERR	DBUG
→DATE	ERRN	SST
TIME	ERRM	SST↓
→TIME	ERR0	NEXT
TICKS	LASTARG	HALT
		KILL
TIME/ALRM	**ERROR/IFERR**	OFF
ACK	IFERR	
ACKALARM	THEN	
STOALARM	ELSE	
RCLALARM	END	
DELALARM		
FINDALARM		

Atajos en el menú de PRG

Muchas de las funciones enumeradas arriba para el menú de PRG son directas fácilmente disponible otros medios:

- Los operadores de la comparación (≠, ≤, <, ≥, >) estar disponible en el teclado.
- Muchas funciones y ajustes en el sub-menú MODES puede ser activado usando las funciones de entrada proporcionadas por la tecla MODE.
- Las funciones del sub-menú TIME se pueden activar con ↱ TIME.
- Las funciones STO y RCL (en el sub-menú MEM/DIR) están disponible en el teclado con las llaves STO▸ y ↰ RCL.
- Las funciones RCL y PURGE (en el sub-menú MEM/DIR sub-menú) estar disponible con el menú TOOL (TOOL).
- Dentro del sub-menú BRCH, presionando (↰) o (↱)antes de presionar cualesquiera de las llaves del sub-menú, creará las construcciones relacionadas con la llave del sub-menú elegida. Esto trabaja solamente con la calculadora en modo de RPN.

Los ejemplos se demuestran abajo:



Note que el cursor (◆) está disponible después de que la palabra clave para cada construcción así que usted pueda comenzar a escribir en el lugar apropiado.

Secuencias de teclas para los comandos comúnmente usados

Los siguientes son secuencias de golpe de teclado para tener acceso a los comandos comúnmente usados para la programación numérica dentro del menú de PRG. Los comandos primero son enumerados por el menú:

STACK		
	DUP	← PRG STACK DUP
	SWAP	← PRG STACK SWAP
	DROP	← PRG STACK DROP
MEM DIR		
	PURGE	← PRG MEM DIR PURGE
	ORDER	← PRG MEM DIR ORDER
BRCH IF		
	IF	← PRG BRCH IF IF
	THEN	← PRG BRCH IF THEN
	ELSE	← PRG BRCH IF ELSE
	END	← PRG BRCH IF END
BRCH CASE		
	CASE	← PRG BRCH CASE CASE
	THEN	← PRG BRCH CASE THEN
	END	← PRG BRCH CASE END
BRCH START		
	START	← PRG BRCH START START
	NEXT	← PRG BRCH START NEXT
	STEP	← PRG BRCH START STEP
BRCH FOR		
	FOR	← PRG BRCH FOR FOR
	NEXT	← PRG BRCH FOR NEXT
	STEP	← PRG BRCH FOR STEP
BRCH DO		
	DO	← PRG BRCH DO DO
	UNTIL	← PRG BRCH DO UNTIL
	END	← PRG BRCH DO END

BRCH WHILE

WHILE	← PRG BRCH WHILE WHILE
REPEAT	← PRG BRCH WHILE REPEA
END	← PRG BRCH WHILE END

TEST

==	← PRG TEST ≠
AND	← PRG TEST NXT AND
OR	← PRG TEST NXT OR
XOR	← PRG TEST NXT XOR
NOT	← PRG TEST NXT NOT
SAME	← PRG TEST NXT SAME
SF	← PRG TEST NXT NXT SF
CF	← PRG TEST NXT NXT CF
FS?	← PRG TEST NXT NXT FS?
FC?	← PRG TEST NXT NXT FC?
FS?C	← PRG TEST NXT NXT FS?C
FC?C	← PRG TEST NXT NXT FC?C

TYPE

OBJ→	← PRG TYPE OBJ→
→ARRY	← PRG TYPE →ARRY
→LIST	← PRG TYPE →LIST
→STR	← PRG TYPE →STR
→TAG	← PRG TYPE →TAG
NUM	← PRG TYPE NXT NUM
CHR	← PRG TYPE NXT CHR
TYPE	← PRG TYPE NXT TYPE

LIST ELEM

GET	← PRG LIST ELEM GET
GETI	← PRG LIST ELEM GETI
PUT	← PRG LIST ELEM PUT
PUTI	← PRG LIST ELEM PUTI
SIZE	← PRG LIST ELEM SIZE
HEAD	← PRG LIST ELEM NXT HEAD
TAIL	← PRG LIST ELEM NXT TAIL

LIST PROC

REVLIST	← PRG LIST PROC REVLI
SORT	← PRG LIST PROC NXT SORT
SEQ	← PRG LIST PROC NXT SEQ

MODES ANGLE

DEG	← PRG NXT MODES ANGLE DEG
RAD	← PRG NXT MODES ANGLE RAD

MODES MENU

CST	← PRG NXT MODES MENU CST
MENU	← PRG NXT MODES MENU MENU
BEEP	← PRG NXT MODES MISC BEEP

IN

INFORM	← PRG NXT IN INFOR
INPUT	← PRG NXT IN INPUT
MSGBOX	← PRG NXT OUT MSGBO
PVIEW	← PRG NXT OUT PVIEW

RUN

DBUG	← PRG NXT NXT RUN DBG
SST	← PRG NXT NXT RUN SST
SST↓	← PRG NXT NXT RUN SST↓
HALT	← PRG NXT NXT RUN HALT
KILL	← PRG NXT NXT RUN KILL

Programas para generar listas de números

Notar por favor que las funciones en el menú de PRG no son las únicas funciones que pueden ser utilizadas en la programación. De hecho, casi todas las funciones en la calculadora se pueden incluir en un programa. Así, usted puede utilizar, por ejemplo, funciones del menú de MTH. Específicamente, usted puede utilizar las funciones para las operaciones con listas, por ejemplo SORT, ΣLIST, etc., disponible con el menú MTH/LIST.

Como ejercicios de programación adicionales, e para practicar las secuencias de teclas listadas arriba, presentamos, adjuntos, tres programas para crear o manipular listas. Los nombres y los listados del programa son como sigue:

LISC:

```
« → n x « 1 n FOR j x NEXT n →LIST » »
```

CRLST:

```
« → st en df « st en FOR  j j df STEP en st - df / FLOOR 1 +
→LIST » »
```

CLIST:

```
« REVLIST DUP DUP SIZE 'n' STO ΣLIST SWAP TAIL DUP SIZE 1 - 1
SWAP FOR j DUP ΣLIST SWAP TAIL NEXT 1 GET n →LIST REVLIST 'n'
PURGE »
```

La operación de estos programas es como sigue:

(1) *LISC*: crea una lista de n elementos todos iguales a una constante c.
Operación: escriba n, escriba c, presione LISC
Ejemplo: 5 ENTER 6.5 ENTER LISC crea la lista: {6.5 6.5 6.5 6.5 6.5}

(2) *CRLST*: crea una lista de números de n_1 a n_2 con el incremento Δn, i.e., $\{n_1, n_1+\Delta n, n1+2\cdot\Delta n, \ldots n_1+N\cdot\Delta n \}$, donde N=floor$((n_2-n_1)/\Delta n)+1$.
Operación: escriba n_1, escriba n_2, escriba Δn, presione CRLST
Ejemplo:.5 ENTER 3.5 ENTER .5 ENTER CRLST produce: {0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5}

(3) *CLIST*: crea una lista con las sumas acumulativas de los elementos, i.e., si la lista original es $\{x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_N\}$, entonces CLIST crea la lista:

$$\{x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \ldots, \sum_{i=1}^{N} x_i\}$$

Operación: poner la lista original en el nivel 1, presionar CLIST.
Ejemplo: {1 2 3 4 5} ENTER CLIST produces {1 3 6 10 15}.

Ejemplos de la programación secuencial

En general, un programa es cualquier secuencia de instrucciones de la calculadora incluidas entre los símbolos del programa « ». Los subprogramas pueden ser incluidos como parte de un programa. Los ejemplos presentados previamente en esta guía (por ejemplo, en capítulos 3 y 8) 6 se pueden clasificar básicamente en dos tipos: (a) programas generados definiendo una función; y, (b) programas que simulan una secuencia de las operaciones del apilado. Estos dos tipos de programas se describen después. La forma general de estos programas es entrada→procesamiento→salida, por lo tanto, les referimos como programas secuenciales.

Programas generados definiendo una función

Éstos son programas generados usando la función DEFINE (← DEF) con una discusión de la forma:

'nombre_de_función(x_1, x_2, …) = expresión que contiene variables x_1, x_2, …'

El programa se almacena en una variable llamada `function_name`. Cuando el programa se recuerda a la pantalla, usando → function_name. El programa demuestra anteriormente como sigue:

« → x_1, x_2, … ' expresión que contiene variables x_1, x_2, …'».

Para evaluar la función para un sistema de variables de la entrada x_1, x_2, …, en modo RPN, incorporar las variables en pantalla en el orden apropiado (i.e., x_1 primero, seguido por x_2, después x_3, etc.), y presione la tecla function. La calculadora volverá el valor de la función, es decir, función(x_1, x_2, …).

Ejemplo: *Ecuación de Manning para un canal rectangular ancho* .

Como ejemplo, considerar la ecuación siguiente que calcula la descarga unitaria (descarga por unidad de ancho), q, en un canal rectangular usando la ecuación de Manning:

$$q = \frac{C_u}{n} y_0^{5/3} \sqrt{S_0}$$

donde C_u es una constante que depende del sistema de las unidades usadas [C_u = 1.0 para las unidades del sistema internacional (S.I.), y C_u = 1.486 para las unidades del sistema inglés (E.S.)], n es el coeficiente de Manning (o coeficiente de resistencia), que depende del tipo de superficie del canal y de otros factores, y_0 es la profundidad de flujo, y S_0 es la pendiente del lecho del canal dada como fracción sin dimensiones.

Nota: Valores del coeficiente de Manning, n, están disponible en tablas como números adimensionales, típicamente entre 0.001 y 0.5. El valor de Cu también se utiliza sin dimensiones. Sin embargo, asegúrese de que el valor de y0 tiene las unidades apropiadas, es decir, m en S.I. y ft en E.S. El resultado para q se provee en las unidades apropiadas del sistema correspondiente en uso, es decir, m^2/s en S.I. y ft^2/s en E.S. Por lo tanto, la ecuación de Manning no es *dimensionalmente consistente*.

Suponer que deseamos crear una función q(Cu, n, y0, S0) para calcular la descarga unitaria q para este caso. Utilice la expresión

'q(Cu,n,y0,S0)=Cu/n*y0^(5./3.)*√S0',

como argumento de la función DEFINE. Notar que el exponente 5./3., en la ecuación, representa un cociente de números reales debido a los puntos decimales incluidos. Presione VAR, si es necesario, para recuperar la lista de variables. A este punto habrá un variable llamada en su menú de variables. Para ver el contenido de q, use ↱. El programa generado definiendo la función `q(Cu,n,y0,S0)` se muestra como:

« → Cu n y0 S0 'Cu/n*y0^(5./3.)*√S0' ».

Éste debe ser interpretado como "escriba Cu, n, y0, S0, en ese orden, entonces calcular la expresión entre apóstrofes." Por ejemplo, para calcular q para Cu = 1.0, n = 0.012, y0 = 2 m, y S0 = 0.0001, use, en modo RPN:

1 ENTER 0.012 ENTER 2 ENTER 0.0001 ENTER

El resultado es 2.6456684 (o, q = 2.6456684 m^2/s).

Usted puede también separar los datos de entrada con espacios en una sola línea en vez de usar diferentes niveles en la pantalla. Para terminar, presione ENTER.

Programas que simulan una secuencia de operaciones

En este caso, los términos que se implicarán en la secuencia de operaciones se asumen que están presentes en la pantalla. El programa se escribe abriendo primero los símbolos del programa con ↱ « » . Después, la secuencia de las operaciones que se realizarán se incorpora. Cuando todas las operaciones se hayan escrito, presione ENTER para terminar el programa. Si este programa se usará solamente una vez, presione EVAL para ejecutar el programa usando los datos de entrada disponibles. Si debe ser un programa permanente, necesita ser almacenado en un nombre variable.

La mejor manera de describir este tipo de programas es con un ejemplo:

<u>Ejemplo</u>: *Altura de velocidad para un canal rectangular.*
Suponer que deseamos calcular la altura de la velocidad, h_v, en un canal rectangular de ancho b, con una profundidad de flujo y, eso lleva una descarga Q. Se calcula la energía específica como $h_v = Q^2/(2g(by)^2)$, donde g es la aceleración de la gravedad (g = 9.806 m/s^2 en unidades de S.I. o g = 32.2 ft/s^2 en unidades de E.S.). Si calculáramos h_v para Q = 23 cfs (pies cúbicos por segundo = ft^3/s), b = 3 ft, y = 2 ft, utilizaríamos: $h_v = 23^2/(2\cdot 32.2\cdot\ (3\cdot 2)^2)$. Usando el modo RPN en la calculadora, interactivamente, podemos calcular esta cantidad como:

2 ENTER 3 × ↰ x^2 3 2 . 2 ×
2 × 2 3 ↰ x^2 ▶ ÷

Lo que resulta en 0.228174, o h_v = 0.228174.

Para traducir este cálculo a un programa necesitamos tener los datos de entrada (Q, g, b, y) en la pantalla en la orden en la cual serán utilizados en el cálculo. En los términos de las variables Q, g, b, y, el cálculo apenas realizado se escribe como (no escriba lo siguiente):

y ENTER b × ← x^2 g × 2 × Q ← x^2 ▶ ÷

Como usted puede ver, y se utiliza primero, entonces utilizamos b, g, y Q, en esa orden. Por lo tanto, con el fines de cálculo, necesitamos incorporar las variables en la orden inversa, i.e., (no escriba lo siguiente):

Q ENTER g ENTER b ENTER y ENTER

Para los valores específicos siguientes consideración utilizamos:

23 ENTER 32.2 ENTER 3 ENTER 2 ENTER

El programa mismo contendrá solamente las teclas (o instrucciones) que resultan al remover los valores de la entrada del cálculo interactivo mostrado anteriormente, es decir, removiendo Q, g, b, y, de la operación siguiente (no escriba lo siguiente):

y ENTER b × ← x^2 g × 2 × Q ← x^2 ▶ ÷

y guardando solamente las operaciones mostradas abajo (no escriba lo siguiente):

ENTER × ← × 2 × ← x^2 ▶ ÷

Nota: Al incorporar el programa no utilice la tecla ▶, en su lugar, utilice: ← PRG STACK SWAP.

A diferencia del uso interactivo de la calculadora que se realizó anteriormente, necesitamos hacer un cierto intercambio de los niveles 1 y 2 de la pantalla dentro del programa. Para escribir el programa, utilizamos, por lo tanto:

→ « »	Abre símbolos del programa
×	Multiplicar y con b
← x^2	Elevar al cuadrado (b·y)
×	Multiplicar $(b·y)^2$ con g
2 ×	Escribir un 2 y multiplicarlo con g· $(b·y)^2$
← PRG STACK SWAP	Intercambiar Q con 2·g· $(b·y)^2$
← x^2	Elevar al cuadrado Q
← PRG STACK SWAP	Intercambiar 2·g· $(b·y)^2$ con Q^2

[÷] Dividir Q^2 por $2 \cdot g \cdot (b \cdot y)^2$
[ENTER] Pasar programa a la pantalla

El programa que resulta luce así:

```
« * SQ * 2 * SWAP SQ SWAP / »
```

Nota: `SQ` es la función que resulta de la secuencia de teclas [←] x^2 .

Almacene el programa en una variable llamada hv:

['] [ALPHA] [←] [H] [ALPHA] [←] [V] [STO▶]

Una nueva variable [hv] estará disponible en su menú de variables. (Presione [VAR] para ver su lista de variables.) El programa dejado en pantalla puede ser evaluado usando la función EVAL. El resultado debe ser 0.228174…, como se mostró anteriormente. También, el programa está disponible para el uso futuro en la variable [hv]. Por ejemplo, para Q = 0.5 m^3/s, g = 9.806 m/s^2, b = 1.5 m, y = 0.5 m, use:

0.5 [SPC] 9.806 [SPC] 1.5 [SPC] 0.5 [hv]

Nota: [SPC] se utiliza aquí como alternativa a [ENTER] para la entrada de datos.

El resultado ahora es 2.26618623518E-2, es decir, hv = $2.26618623518 \times 10^{-2}$ m.

Nota: Puesto que la ecuación programada en [hv] somos dimensionalmente consistente, podemos utilizar unidades en la entrada.

Según lo mencionado anteriormente, los dos tipos de programas presentados en esta sección son programas secuenciales, en el sentido que el flujo de programa sigue una sola trayectoria, es decir, INPUT→ OPERATION →OUTPUT. La ramificación del flujo de programa es posible usando los comandos en el menú [←] PRG [BRCH] . Más detalles en la ramificación de los programas se presenta a continuación.

Entrada interactiva en programas

En los ejemplos de programas secuenciales mostrados en la sección anterior no le queda claro al usuario el orden en el cual las variables se deben poner en pantalla antes de la ejecución de programa. Para el caso del programa [q], escrito como:

« →Cu n y0 S0 'Cu/n*y0^(5/3)*√S0' »,

es siempre posible recordar la definición del programa en pantalla ([→][q])para ver la orden en la cual las variables deben ser incorporadas, a saber, `→Cu n y0 S0`. Sin embargo, para el caso del programa [hv], su definición

« * SQ * 2 * SWAP SQ SWAP / »

no proporciona una pista sobre el orden en el cual los datos deben ser incorporados, a menos que, por supuesto, Ud. tenga una experiencia extensiva con el modo RPN y el lenguaje User RPL.

Una forma de comprobar el resultado del programa como una fórmula es incorporar variables simbólicas, en vez de resultados numéricos, en la pantalla, y dejar el programa operar en esas variables. Para que este procedimiento sea eficaz, el CAS de la calculadora debe utilizar los modos `symbolic` y `exact`. Esto es logrado usando [MODE][CAS], y asegurándose de que las marcas de cheque en las opciones `_Numeric` y `_Approx` han sido removidas. Presione [OK] [OK] para volver a la pantalla normal de la calculadora. Presione [VAR] para exhibir su menú de las variables.

Utilizaremos este último procedimiento para comprobar la fórmula que resulta de usar el programa [hv] como sigue: Sabemos que hay cuatro entradas al programa, así, utilizamos las variables simbólicas S4, S3, S2, y S1 para indicar los niveles de la pantalla como datos de entrada:

[ALPHA][S][4][ENTER] [ALPHA][S][3][ENTER] [ALPHA][S][2][ENTER] [ALPHA][S][1][ENTER]

Después, presione [hv]. La fórmula que resulta puede lucir así:

`'SQ(S4)/(S3*SQ(S2*S1)*2)',`

si su pantalla no se fija a estilo “textbook”, o de esta manera,

$$\frac{SQ(S4)}{S3 \cdot SQ(S2 \cdot S1) \cdot 2}$$

si se selecciona el estilo “textbook”. Puesto que sabemos que la función SQ( ) representa x^2, interpretamos el último resultado como

$$\frac{S4^2}{2 \cdot S3 \cdot (S2 \cdot S1)^2},$$

lo que indica la posición de los diferentes niveles de entrada en la formula. Comparando este resultado con la fórmula original que programamos, es decir,

$$h_v = \frac{Q^2}{2g(by)^2},$$

encontramos que debemos escribir y en el nivel 1 (S1), b en el nivel 2 (S2), g en el nivel 3 (S3), y Q en el nivel 4 (S4).

Aviso con una secuencia de entrada

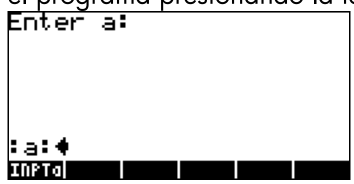
Estos dos procedimientos para identificar el orden de los datos de entrada no son muy eficientes. Usted puede, sin embargo, ayudar al usuario a identificar las variables que se utilizarán identificando el nombre de las variables. De los varios métodos proporcionados por el lenguaje User RPL, el más simple es utilizar una secuencia de entrada y la función INPUT (← PRG NXT IN INPUT) para cargar sus datos de entrada.

El programa siguiente solicita del usuario el valor de una variable a y coloca la entrada en el nivel 1 de la pantalla:

```
« "Enter a: " {"↵:a: " {2 0} V } INPUT OBJ→ »
```

Este programa incluye el símbolo:: (inglés, tag, o etiqueta y ↵ (return), disponible con las combinaciones de teclas ← :: y → ↵, ambas asociadas con la tecla . . El símbolo de etiqueta (::) se utiliza para etiquetar las secuencias para la entrada y la salida. El símbolo de entrada (↵) es similar a producir una nueva línea en una computadora. Las secuencias entre comillas (" ") se escriben directamente usando el teclado alfanumérico.

Almacene el programa en un variable llamado INPTa (inglés, INPuT a, o entre a). Intente operar el programa presionando la tecla INPTa.



El resultado es una pantalla que requiere del usuario el valor de a y que pone el cursor en frente del mensaje :a: Escriba un valor de a, digamos 35, y presione ENTER. El resultado es la secuencia de entrada `:a:35` en el nivel 1 de la pantalla.

Una función con una secuencia de entrada

Si usted utilizara este código para calcular la función, f(a) = 2*a^2+3, usted podría modificar el programa para leer como sigue:

```
« "Enter a: " {"↵:a: " {2 0} V }
INPUT OBJ→ → a « '2*a^2+3' » »
```

Almacene este nuevo programa bajo el nombre de 'FUNCa' (FUNCtion of a):

Active el programa presionando FUNCa. Cuando se le solicite escribir el valor de a, escriba, por ejemplo, 2, y presione ENTER. El resultado es simplemente el algebraico $2a^2+3$, cuál es un resultado incorrecto. La calculadora proporciona funciones para eliminar errores en los programas, e identificar errores lógicos durante la ejecución de programa según lo demostrado abajo.

Eliminando errores del programa

Para determinar porqué el programa no trabajó como esperábamos, utilizamos la función DBUG en la calculadora como sigue:

['] FUNCa [ENTER]	Copia nombre de programa a nivel 1
[←] PRG [NXT] [NXT] RUN DBG	Activa programa DBUG
SST↓	Gradualmente eliminando errores, resultado:
“Enter a:”	
SST↓	Resulta: {“ ↵ a:” {2 0} V}
SST↓	Resulta: se requiere el valor de a
[2] [ENTER]	Escribir valor de 2 para a. Resulta: “↵a:2”
SST↓	Resulta: a:2
SST↓	Resulta: pantalla vacía, ejecutando →a
SST↓	Resulta: pantalla vacía, entrando subprog. «
SST↓	Resulta: ‘2*a^2+3’
SST↓	Resulta: ‘2*a^2+3’, saliendo de subprog. »
SST↓	Resulta: ‘2*a^2+3’, saliendo de progr. »

Continuar presionando SST↓ a este punto no produce más salida puesto que hemos recorrido el programa entero, paso a paso. Esta ejecución de DBUG no proporcionó ninguna información sobre porqué el programa no está calculando el valor $2a^2+3$ para a = 2. Para ver cuál es el valor de a en el subprograma, necesitamos operar DBUG otra vez y evaluar a dentro del subprograma. Intente lo siguiente:

[VAR]	Recupera el menú de las variables
['] FUNCa [ENTER]	Copia nombre de programa a la pantalla
[←] PRG [NXT] [NXT] RUN DBG	Activa DBUG
SST↓	Resulta: “Enter a:”
SST↓	Resulta: {“ ↵ a:” {2 0} V}
SST↓	Resulta: se requiere valor de a
[2] [ENTER]	Escribir 2 para a. Resulta: “↵a:2”
SST↓	Resulta: a:2
SST↓	Resulta: pantalla vacía, ejecutando →a
SST↓	Resulta: pantalla vacía, entere subprog. «

A este punto estamos dentro del subprograma « '2*a^2+3' » el cuál utiliza la variable local a. Para ver el valor de a, use:

ALPHA ← A EVAL Esto muestra que a = 2

Detengamos DBUG a este punto puesto que sabemos ya el resultado que conseguiremos. Para detener DBUG, use KILL. Ud. recibe el mensaje: <!> Interrupted reconociendo que se detuvo DEBUG. Presione ON para recuperar la pantalla normal de la calculadora.

Nota: En modo de DBUG, cada vez que presionamos SST↓ la esquina izquierda superior de la pantalla muestra el paso del programa que es ejecutado. Una función de tecla llamada SST está también disponible en el sub-menú RUN dentro del menú PRG. Esto se puede utilizar para ejecutar inmediatamente cualquier subprograma llamado dentro de un programa principal. Ejemplos del uso de SST serán mostrados más adelante.

Corrigiendo el programa

La única explicación posible para la falta del programa de producir un resultado numérico se parece ser la carencia del comando →NUM después de la expresión algebraica '2*a^2+3'. Corrijamos el programa agregando la función ->NUM. El programa, después de corregirse, se mostrará como sigue:

```
« "Enter a: " {"↵:a: " {2 0} V } INPUT
   OBJ→ → a « '2*a^2+3' →NUM » »
```

Almacénelo otra vez en la variable FUNCa, y opere el programa otra vez con a = 2. Esta vez, el resultado es11, i.e., $2*2^2+3 = 11$.

Secuencia de entrada para dos o tres valores

En esta sección crearemos un sub-directorio, dentro del directorio HOME, para mostrar ejemplos de secuencias de entrada para uno, dos, y tres valores de los datos de entrada. Éstas serán las secuencias genéricas de la entrada que se pueden incorporar en cualquier programa futuro, tomando el cuidado de cambiar los nombres variables según las necesidades de cada programa.

Comencemos creando un sub-directorio llamado PTRICKS (Programming TRICKS, o trucos de programación) para guardar ideas de programación los cuales podemos utilizar más adelante en ejercicios de programación más complejos. Para crear el sub-directorio, primero cerciorarse de que usted se traslada al directorio HOME. Dentro del directorio HOME, utilizar las teclas siguientes para crear el sub-directorio PTRICKS:

' ALPHA ALPHA P T R I C K S ENTER	Escriba 'PTRICKS'
← PRG MEM DIR CRDIR	Crear directorio
VAR	Recuperar el listado de variables

Un programa puede tener más de 3 valores de los datos de entrada. Al usar secuencias de la entrada deseamos limitar el número de los valores de los datos de entrada a 5 a la vez por la razón simple que, en general, tenemos solamente 7 niveles visibles de la pantalla. Si utilizamos el nivel 7 de la pantalla para dar un título a la secuencia de la entrada, y dejamos el nivel 6 de la pantalla vacío para facilitar el leer de la pantalla, tenemos solamente niveles 1 a 5 de la pantalla para definir variables de la entrada.

Programa de secuencia de entrada para dos valores

El programa de la secuencia de la entrada para dos valores, digamos a y b, luce así:

```
« "Enter a and b: " {"↵:a:↵:b:" {2 0} V } INPUT OBJ→ »
```

Este programa puede ser creado fácilmente modificando el contenido de INPTa. Almacenar este programa en la variable INPT2.

<u>Uso</u>: evaluación de una función de dos variables

Considere la ley de los gas ideales, pV = nRT, donde p = presión de gas (Pa), V = volumen del gas (m^3), n = número de moles (gmol), R = constante universal de los gases = 8.31451_J/(gmol*K), y T = temperatura absoluta (K).

Podemos definir la presión p en función de dos variables, V y T, como p(V,T) = nRT/V para una masa dada del gas puesto que n seguirá siendo constante. Asuma que n = 0.2 gmol, entonces la función al programa es:

$$p(V,T) = 8.31451 \cdot 0.2 \cdot \frac{T}{V} = (1.662902\_\frac{J}{K}) \cdot \frac{T}{V}$$

Podemos definir la función escribiendo el programa siguiente

```
« →V T '(1.662902_J/K)*(T/V)' »
```

y almacenándolo en la variable p.

El paso siguiente es agregar la secuencia de la entrada de la cual requerirá del usuario los valores V y T. Para crear este flujo de entradas, modificar el programa en p como se muestra a continuación:

```
« "Enter V and T: " {"↵ :V:↵ :T: " {2 0} V }
INPUT OBJ→ → V T '(1.662902_J/K)*(T/V)' »
```

Almacenar el nuevo programa nuevamente dentro de la variable p. Presione p para activar el programa. Escribir los valores de V = 0.01_m^3 y T = 300_K en la secuencia de la entrada, entonces presione ENTER. El resultado es 49887.06_J/m^3. Las unidades de J/m^3 ser equivalente a Pascals (Pa), la unidad preferida de la presión en el sistema de S.I..

Nota: porque incluimos unidades en la definición de la función, los valores de la entrada deben unidades adjuntas para producir el resultado apropiado.

Programa de la secuencia de la entrada para tres valores entrados

El programa de la secuencia de la entrada para tres valores, digamos a,b, y c, luce así:

```
« "Enter a, b and c: " {"↵ :a:↵ :b:↵ :c: " {2 0} V }
INPUT OBJ→ »
```

Este programa puede ser creado fácilmente modificando el contenido de INPT2 mostrado inmediatamente arriba. El programa que resulta se puede entonces almacenar en una variable llamada INPT3. Con este programa terminamos la colección de los programas de la secuencia de la entrada que permitirán que incorporemos uno, dos, o tres valores de los datos. Almacene estos programas como una referencia que Ud. puede copiar y modificar para satisfacer los requisitos de nuevos programas que Ud. escriba.

Uso: evaluación de una función de tres variables
Suponga que deseamos programar la ley de los gases ideales incluyendo el número de moles, n, agregando una variable adicional, es decir, deseamos definir la función:

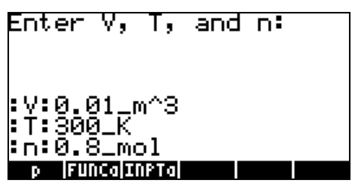
$$p(V,T,n) = (8.31451\_\frac{J}{K})\frac{n \cdot T}{V},$$

y modificarlo para incluir la secuencia entrada para tres variables. El procedimiento para escribir esta función es muy similar a ése usado anterior en definir la función p(V, T). El programa que resulta lucirá así:

```
« "Enter V, T, and n:" {" ↵ :V:↵ :T:↵ :n:" {2 0} V }
INPUT OBJ→ →V T n '(8.31451_J/(K*mol))*(n*T/V)'»
```

Almacene este resultado nuevamente en la variable . Para activar el programa, presione .

Escriba los valores V = 0.01_m^3, T = 300_K, y n = 0.8_mol. Antes de presionar ENTER, la pantalla lucirá así:



Presione ENTER para obtener 199548.24_J/m^3, ó 199548.24_Pa = 199.55 kPa.

Entrada a través de formas interactivas

La función INFORM (←PRG NXT IN INFOR.) puede ser utilizado para crear las formas interactivas detalladas para un programa. La función INFORM requiere cinco discusiones, en este orden:

1. Un título: una cadena de caracteres que describe la forma interactiva
2. Definiciones de campo: una lista con unas o más definiciones de campo {s_1 s_2 … s_n}, donde cada definición de campo, s_i, puede tener uno de dos formatos:
    a. Una etiqueta simple del campo: una cadena de caracteres
    b. Una lista de las especificaciones de la forma {"etiqueta" "Información" $tipo_0$ $tipo_1$ … $tipo_n$}. La "etiqueta" es una etiqueta de campo. La "Información" es una cadena de caracteres que describe la etiqueta de campo detalladamente, y las especificaciones de tipo es una lista de tipos de variables permitidas para el campo (véase el capítulo 24 para los tipos del objeto).
3. Información del formato de campo: un solo número *col* o una lista {*col tabs*}. En esta especificación, *col* es el número de columnas en la forma interactiva, y *tabs* (opcional) especifica el número de las posiciones de la tabulación entre las etiquetas y los campos en la forma. La lista podía ser una lista vacía. Los valores prefijados son *col* = 1 y *tabs* = 3.
4. 4. Lista de los valores del reajuste: una lista que contiene los valores para reajustar los diversos campos si la opción RESET se selecciona mientras que usa la forma interactiva.
5. 5. Lista de valores iniciales: una lista que contiene los valores iniciales de los campos.

Las listas en los artículos 4 y 5 pueden ser listas vacías. También, si no hay valor seleccionado para estas opciones usted puede utilizar la instrucción NOVAL (←PRG NXT IN NOVAL).

Después de activar la función INFORM usted conseguirá como resultado, ya sea un cero, en caso de que la opción CANCEL se seleccione, o una lista con los valores incorporados en los campos en el orden especificado y el número 1, es decir, en la pantalla RPN:

```
2:   {v1 v2 … vn}
1:             1
```

Así, si el valor en el nivel 1 de la pantalla es cero, no se realizó ninguna entrada, mientras que si este valor es 1, los valores de la entrada estarán disponibles en el nivel 2 de la pantalla.

Ejemplo 1 - Como ejemplo, considerar el programa siguiente, INFP1 (Interactive form Program 1) para calcular la descarga Q en un canal abierto con la fórmula de Chezy: $Q = C\cdot(R\cdot S)^{1/2}$, donde el coeficiente C de Chezy, es una función de la rugosidad de la superficie del canal (valores típicos 80-150), R es el radio hidráulico del canal (una longitud), y S es la pendiente del lecho del canal (números sin dimensiones, típicamente 0.01 a 0.000001). El programa siguiente define una forma interactiva con la función INFORM:

```
« " CHEZY'S EQN" { { "C:" "Chezy's coefficient" 0} { "R:"
"Hydraulic radius" 0 } { "S:" "Channel bed slope" 0} } { }
{ 120 1 .0001} { 110 1.5 .00001 }  INFORM »
```

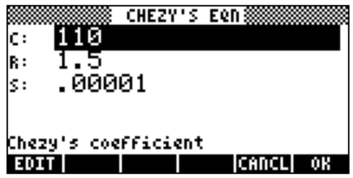
En el programa podemos identificar los 5 componentes de la entrada como sigue:

1. Título: `" CHEZY'S EQN"`
2. Definiciones del campo: hay tres de ellas, con las etiquetas "C:", "R:", "S:", secuencias informativas "Chezy coefficient", "Hydraulic radius", "Channel bed slope", y aceptando solamente el tipo de datos 0 (números reales) para todos los tres campos:

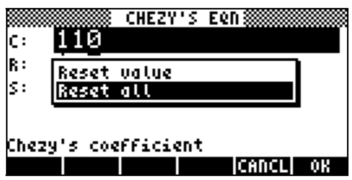
   ```
   { { "C:" "Chezy's coefficient" 0} { "R:" "Hydraulic
   radius" 0 } { "S:" "Channel bed slope" 0} }
   ```

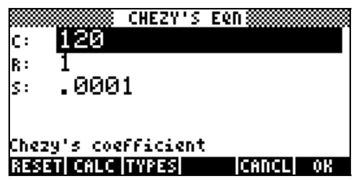
3. Información del formato del campo: `{ }` (una lista vacía, así, se usan valores prefijados)
4. Lista de los valores de reajuste: `{ 120 1 .0001}`
5. Lista de valores iniciales: `{ 110 1.5 .00001}`

Almacene el programa en la variable INFP1. Presione INFP1 para funcionar el programa. La forma interactiva, con los valores iniciales cargados, es la siguiente:

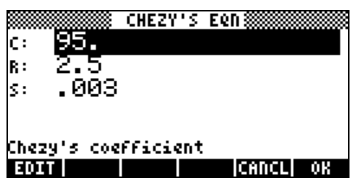


Para ver el efecto de reajustar estos valores, use NXT RESET (seleccione *Reset all* para reajustar valores de campo):





Ahora, incorpore diversos valores para los tres campos, por ejemplo, C = 95, R = 2.5, y S = 0.003, presionando OK después de incorporar cada uno de estos nuevos valores. Después de estas substituciones la forma interactiva lucirá así:



Ahora, para escribir estos valores en el programa presione OK una vez más. Esto activa la función INFORM produciendo los resultados siguientes en pantalla:

Así, demostramos el uso de la función INFORM. Para ver cómo utilizar estos valores de la entrada en un cálculo modificar el programa como sigue:

```
« " CHEZY'S EQN" { { "C:" "Chezy's coefficient" 0} { "R:"
"Hydraulic radius" 0 } { "S:" "Channel bed slope" 0} } { }
{ 120 1 .0001} { 110 1.5 .00001 }  INFORM IF THEN OBJ→ DROP →
C R S 'C*(R*S)' →NUM "Q" →TAG ELSE "Operation cancelled"
MSGBOX END »
```

Los pasos del programa demostrados arriba después del comando INFORM incluyen el uso de ramificación de la decisión con la instrucción IF-THEN-ELSE-END (descrito detalladamente en otra parte en este capítulo). El control de programa se puede enviar a una de dos posibilidades dependiendo del valor en el nivel 1 de la pantalla. Si este valor es 1 el control se pasa a los comandos:

```
OBJ→ DROP → C R S 'C*√(R*S)' →NUM "Q" →TAG
```

Estos comandos calcularán el valor de Q y pondrán una etiqueta al resultado. Por otra parte, si el valor en el nivel 1 de la pantalla es 0 (lo cuál sucede cuando una instrucción CANCEL se incluye al usar la forma interactiva) , el control de programa se pasa a los comandos:

```
"Operation cancelled" MSGBOX
```

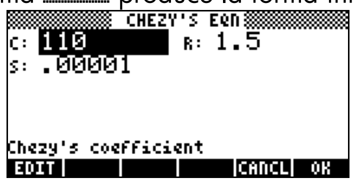
Estos comandos producirán una caja de mensaje (inglés, message box) que indica que la operación fue cancelada.

Nota: La función MSGBOX pertenece a la colección de funciones de salida bajo el sub-menú PRG/OUT. Las instrucciones IF, THEN, ELSE, END estar disponible bajo el sub-menu PRG/BRCH/IF. Funciones OBJ→, →TAG estar disponible bajo el sub-menu PRG/TYPE. Función DROP está disponible bajo el menú de PRG/SCREEN. Las funciones → y →NUM están disponible en el teclado.

<u>Ejemplo 2</u> – Para ilustrar el uso del artículo 3 (información del formato del campo) en las discusiones de la función INFORM, cambie la lista vacía usada en el programa INFP1 a { 2 1 }, significando 2, más bien que el valor predefinido 3, columnas, y solamente una localidad de tabulación entre las etiquetas y los valores. Almacene este nuevo programa en la variable INFP2:

```
« " CHEZY'S EQN" { { "C:" "Chezy's coefficient" 0}
{ "R:" "Hydraulic radius" 0 } { "S:" "Channel bed slope"
0} } { 2 1 } { 120 1 .0001} { 110 1.5 .00001 }  INFORM
IF THEN OBJ→ DROP → C R S 'C*(R*S)' →NUM "Q" →TAG ELSE
"Operation cancelled" MSGBOX END »
```

La ejecución del programa INFP2 produce la forma interactiva siguiente:



Ejemplo 3 - Cambie la lista de la información del formato del campo a { 3 0 } y almacene el programa modificado en la variable INFP3. Active este programa para ver la nueva forma interactiva:

Crear una caja de selección

La función CHOOSE (PRG NXT IN CHOOS) permite que el usuario cree una caja de selección en un programa. Esta función requiere tres argumentos:

1. Un aviso (una cadena de caracteres que describe la caja del elegir)
2. 2. Una lista de definiciones de selección {c_1 c_2 … c_n}. Una definición c_i puede tener cualesquiera de dos formatos:
    a. Un objeto, por ejemplo., un número, algebraico, etc., que será presentado en la caja de selección y también será el resultado de una opción.
    b. Una lista {objeto_mostrado object_resultado} de modo que objecto_mostrado esté enumerado en la caja de selección, y objeto_resultado se seleccione como el resultado si se selecciona esta opción.

3. Un número que indica la posición en la lista de las definiciones de la opción predefinida. Si este número es 0, no se destaca ninguna opción del defecto.

La activación de la función CHOOSE producirá ya sea un cero, si se usa CANCL, o, si se hace una selección, la opción seleccionada (por ejemplo, v) y el número 1, es decir, en la pantalla de RPN:

```
2:           v
1:           1
```

Ejemplo 1 – La ecuación de Manning para calcular la velocidad en un flujo de canal abierto incluye un coeficiente, C_u, el cuál depende del sistema de las unidades usadas. Si usa el S.I. (Sistema internacional), C_u = 1.0, mientras que si usa el E.S. (English System), C_u = 1.486. El programa siguiente utiliza una caja del elegir que permite al usuario seleccionar el valor de C_u seleccionando el sistema de unidades. Guárdelo en la variable CHP1 (CHoose Program 1):

```
« "Units coefficient" { { "S.I. units" 1}
   { "E.S. units" 1.486}  } 1 CHOOSE »
```

Activando este programa (presione CHP1) demuestra que los siguientes eligen la caja:

Dependiendo de si usted selecto Unidades de S.I. o unidades de E.S., la función CHOOSE pone un valor de 1 o un valor de 1.486 en nivel 2 y un 1 en nivel 1. Si usted cancela la caja del elegir, la OPCIÓN produce un cero (0).

Los valores producidos por la función CHOOSE pueden funcionar sobre por otros comandos del programa según lo demostrado en el programa modificado CHP2:

« "Units coefficient" { { "S.I. units" 1} { "E.S. units" 1.486} } 1 CHOOSE IF THEN "Cu" →TAG ELSE "Operation cancelled" MSGBOX END »

Los comandos después de la función CHOOSE en este nuevo programa indican una decisión basada en el valor del nivel 1 de la pantalla a través de la construcción IF-THEN-ELSE-END. Si el valor en el nivel 1 de la pantalla es 1, las instrucciones `"Cu" →TAG` produce un resultado marcado con etiqueta en la pantalla. Si el valor en el nivel 1 de la pantalla es cero, las instrucciones `"Operation cancelled"` MSGBOX indican que la operación fue cancelada.

Identificar salida en programas

La manera más simple de identificar una salida numérica del programa es "marcar" los resultados del programa con etiqueta. Una etiqueta es simplemente una secuencia unida a un número, o a cualquier objeto. La secuencia será el nombre asociado al objeto. Por ejemplo, anteriormente, al eliminar errores de los programas INPTa (o INPT1) y de INPT2, obtuvimos resultados que marcaron una salida con etiqueta numérica tal como :a:35.

Marcar un resultado numérico con una etiqueta

Para marcar un resultado con etiqueta numérico usted necesita poner el número en el nivel 2 de la pantalla y la secuencia que marca con etiqueta en el nivel 2 de la pantalla, entonces utilice la función →TAG (← PRG TYPE →TAG) Por ejemplo, para producir el resultado marcado con etiqueta `B:5.`, use:

5 ENTER → "" ALPHA B ← PRG TYPE →TAG

Descomposición de un resultado numérico con etiqueta

Para descomponer un resultado marcado con etiqueta en su valor numérico y su etiqueta, utilice simplemente la función OBJ→ (← PRG TYPE OBJ→). El resultado de descomponer un número marcado con etiqueta con →OBJ es poner el valor numérico en el nivel 2 y la etiqueta de la pantalla en el nivel 1 de la pantalla. Si usted está interesado en usar el valor numérico solamente, remueva la etiqueta usando la tecla ◄. Por ejemplo, descomponiendo la cantidad marcada con etiqueta B:5 (ver arriba), producirá:

Removiendo la etiqueta de una cantidad etiquetada

Remover la etiqueta significa extraer el objeto fuera de una cantidad marcada con etiqueta. Esta función se realiza con la combinación del teclas ← PRG TYPE NXT DTAG. Por ejemplo, dado la cantidad marcada con etiqueta `a:2`, DTAG produce el valor numérico 2.

Nota: Para las operaciones matemáticas con cantidades marcadas con etiqueta, la calculadora remueve la etiqueta automáticamente antes de la operación. Por ejemplo, la figura lateral izquierda abajo muestra las cantidades con etiqueta antes y después de presionar la tecla × en modo RPN:

Ejemplos de salida marcada con etiqueta

Ejemplo 1 – Ejemplos de la salida marcada con etiqueta

Modifiquemos la función FUNCa, definida anteriormente, para producir una salida marcada con etiqueta. Use ↱ FUNCa para recuperar el contenido de FUNCa a la pantalla. El programa original de la función es:

```
« "Enter a: " {"↵:a: " {2 0} V } INPUT OBJ→ → a «
                '2*a^2+3' →NUM » »
```

Modificarlo de esta manera:

```
« "Enter a: " {"↵:a: " {2 0} V } INPUT OBJ→ → a «
          '2*a^2+3' →NUM "F" →TAG » »
```

Almacenar el programa nuevamente dentro de FUNCa usando ← FUNCa. Después, activar el programa presionando FUNCa. Escriba un valor de 2 cuando está incitado, y presione ENTER. El resultado ahora es el resultado marcado con etiqueta `F:11.`

Ejemplo 2 – marcar la entrada y la salida con etiqueta en la función FUNCa

En este ejemplo modificamos el programa FUNCa de modo que la salida incluya no solamente la función evaluada, pero también una copia de la entrada con una etiqueta. Use ⟨→⟩ FUNCa para recobrar el contenido de FUNCa a la pantalla:

```
« "Enter a: " {"↵:a: " {2 0} V } INPUT OBJ→ → a «
        '2*a^2+3' →NUM "F" →TAG » »
```

Modificarlo de esta manera:

```
« "Enter a: " {"↵:a: " {2 0} V } INPUT OBJ→ → a «
        '2*a^2+3' EVAL "F" →TAG a SWAP» »
```

(Recordar que la función SWAP está disponible usando ⟨←⟩PRG STACK SWAP). Almacenar el programa nuevamente dentro de FUNCa usando ⟨←⟩ FUNCa. Después, activar el programa presionando FUNCa . Escriba un valor de 2 cuando se solicite, y presione ENTER. Los resultados ahora son dos números marcados con etiqueta `a:2.` en el nivel 2 de la pantalla, y `F:11.` en el nivel 1 de la pantalla.

Nota: Como utilizamos una secuencia de entrada para conseguir el valor de los datos de entrada, la variable local almacena realmente un valor marcado con etiqueta (:a:2, en el ejemplo arriba). Por lo tanto, no necesitamos marcarla con etiqueta en la salida. Todo lo que necesitamos hacer es colocar una a antes de la función SWAP en el subprograma arriba, y la entrada marcada con etiqueta será colocada en la pantalla. Debe precisarse que, en la ejecución del cálculo de la función, la etiqueta de la entrada marcada con etiqueta se elimina automáticamente, y solamente su valor numérico está utilizado en el cálculo.

Para ver la operación de la función FUNCa, gradualmente, usted podría utilizar la función de DBUG como sigue:

⟨'⟩ FUNCa ENTER	Copia nombre del programa al nivel 1
⟨←⟩PRG NXT NXT RUN DBG	Comenzar DBUG
SST↓	Resulta: "Enter a:"
SST↓	Resulta: {" ↵a:" {2 0} V}

SST↓	Resulta: se requiere valor de a
2 ENTER	Escribir un 2 para a. Resulta: "↵a:2"
SST↓	Resulta: a:2
SST↓	Resulta: pantalla vacía, ejecutando →a
SST↓	Resulta: pantalla vacía, entrar subprog. «
SST↓	Resulta: '2*a^2+3'
SST↓	Resulta: pantalla vacía, calculando
SST↓	Resulta: 11.,
SST↓	Resulta: "F"
SST↓	Resulta: F: 11.
SST↓	Resulta: a:2.
SST↓	Resulta: intercambiar niveles 1 y 2
SST↓	saliendo del subprograma »
SST↓	saliendo del programa principal »

Ejemplo 3 – marcar la entrada y la salida con etiqueta de la función p(V,T)
En este ejemplo modificamos el programa p de manera que haya entrada y salida etiquetada. Use ↱ p para recordar el contenido del programa a la pantalla:

```
« "Enter V, T, and n:" {"↵ :V:↵ :T:↵ :n:" {2 0} V }
INPUT OBJ→ →V T n '(8.31451_J/(K*mol))*(n*T/V)' »
```

Modifíquelo de esta manera:

```
« "Enter V, T and n: " {"↵ :V:↵ :T:↵ :n:" {2 0} V } INPUT
OBJ→ →V T n « V T n'(8.31451_J/(K*mol))*(n*T/V)' EVAL "p"
→TAG » »
```

Note: Notar que hemos puesto el cálculo y el marcar con etiqueta la función p(V,T,n), precedido el recobrar las variables de entrada V T n, en un subprograma [la secuencia de las instrucciones contenidas dentro del par interno de símbolos de programa « »]. Esto es necesario porque sin el símbolo del programa que separa los dos listados de las variables de entrada (`V T N « V T n`), el programa asumirá que el comando de entrada

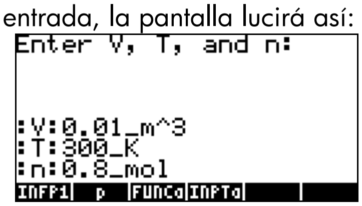
→ V T N V T n

requiere seises valores, mientras que solamente tres están disponibles. El resultado habría sido la generación de un mensaje de error y de la interrupción de la ejecución de programa.

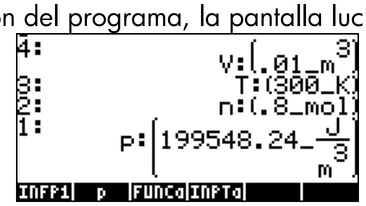
Para incluir el subprograma mencionado arriba en la definición modificada del programa p, le requerirá utilizar « » al principio y fin del subprograma. Porque los símbolos del programa ocurren en pares, siempre que « » se invoca, usted necesitará borrar el símbolo de cierre del programa (»)al principio, y el símbolo del programa en la abertura («) al final del subprograma.

Para borrar cualquier carácter mientras que corrige el programa, coloque el cursor a la derecha del carácter que se borrará y utilice la tecla de retroceso ⬅.

Almacene el programa nuevamente dentro de p variable usando p. Después, active el programa presionando p. Escriba los valores de V = 0.01_m^3, T = 300_K, and n = 0.8_mol, cuando así se requiera. Antes de presionar ENTER para la entrada, la pantalla lucirá así:



Después de la ejecución del programa, la pantalla lucirá así:



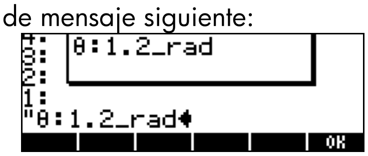
En resumen: La idea común en los tres ejemplos demostrados aquí es el uso de etiquetas para identificar variables de entrada y de salida. Si utilizamos una secuencia de entrada para conseguir nuestros valores de entrada, esos valores ya están marcados con etiquetas y pueden ser fácilmente recobrados en la pantalla para usarlos en la salida. El uso de la función →TAG permite que identifiquemos la salida de un programa.

Usar una caja de mensaje

Una caja de mensaje es una manera más lujosa de presentar la salida de un programa. El comando de la caja de mensaje en la calculadora es obtenido usando ← PRG NXT OUT MSGBOX. El comando de la caja de mensaje requiere que la secuencia que se colocará en la caja esté disponible en el nivel 1 de la pantalla. Para ver la operación del comando de MSGBOX intente el ejercicio siguiente:

→ "" ALPHA → T ALPHA ← :: / • 2
→ _ ALPHA ← R ALPHA ← A ALPHA ← D
← PRG NXT OUT MSGBOX

El resultado es la caja de mensaje siguiente:



Presione OK para cancelar la caja de mensaje.

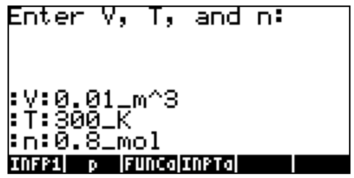
Usted podría utilizar una caja de mensaje para la salida de un programa usando una salida marcada con etiqueta, convertida a una secuencia, como la secuencia de la salida para MSGBOX. Para convertir cualquier resultado marcado con etiqueta, o cualquier valor algebraico o no-marcado con etiqueta, a una secuencia, use la función →STR disponible en ← PRG TYPE →STR.

Usar una caja de mensaje para la salida del programa

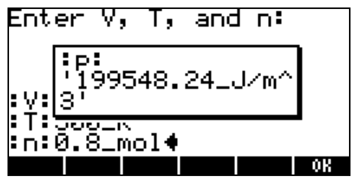
La función p, del ejemplo pasado, puede ser modificado para leer:

```
« "Enter V, T and n: " {"↵ :V:↵ :T:↵ :n: " {2 0} V }INPUT
OBJ→ →V T n « V T n '(8.31451_J/(K*mol))*(n*T/V)' EVAL
"p" →TAG →STR MSGBOX » »
```

Almacene el programa nuevamente dentro de la variable p usando ⬅ p. Active el programa presionando p. Escriba los valores V = 0.01_m^3, T = 300_K, y n = 0.8_mol, cuando se le solicite.
Como en la versión anterior de p, antes de presionar ENTER para la entrada, la pantalla lucirá así:



La primera salida del programa es una caja de mensaje que contiene la secuencia:



Presione OK para cancelar salida de la caja de mensaje. La pantalla lucirá así:

Incluyendo entrada y salida en una caja de mensaje
Podríamos modificar el programa para no solamente incluir la salida, sino también la entrada, en una caja de mensaje. Para el caso del programa p, el programa modificado lucirá así:

```
« "Enter V, T and n: " {"↵ :V:↵ :T:↵ :n: " {2 0} V }INPUT
OBJ→ → V T n « V →STR "↵ " + T →STR "↵ " + n →STR "↵ " +
'(8.31451_J/(K*mol))*(n*T/V)' EVAL "p" →TAG →STR + + +
MSGBOX » »
```

Notar que usted necesita agregar el siguiente código después de cada uno de los nombres de la variable V, T, y n, dentro del subprograma:

→STR "↵ " +

Para escribir este código por primera vez, use:

← PRG TYPE →STR → "" → ↵ ▶ +

Dado que las funciones para el menú TYPE siguen estando disponible en las teclas del menú, para las segundas y terceras ocurrencias del código anterior (→STR "↵ " +) dentro del subprograma (i.e., después de las variables T y n, respectivamente), todo lo que usted necesita utilizar es:

→STR → "" → ↵ ▶ +

Usted notará que después de usar las teclas → ↵ una nueva línea se genera en la pantalla.

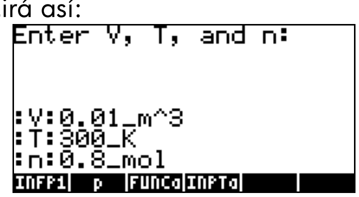
La última modificación que necesita ser incluida es escribir el signo de adición tres veces después de la llamada a la función en el final del subprograma

Nota: El signo de más (+) en este programa se utiliza para concatenar secuencias. La concatenación es simplemente la operación de ensamblar cadenas de caracteres individuales.

Para ver el funcionamiento del programa:

- Almacene el programa nuevamente dentro de la variable p usando ← p.
- Active el programa presionando p.
- Escriba los valores V = 0.01_m^3, T = 300_K, y n = 0.8_mol, cuando se le solicite.

Como en la versión anterior de [p], antes de presionar [ENTER] para entrada, la pantalla lucirá así:



La primera salida del programa es una caja de mensaje que contiene la secuencia:

Presione OK para cancelar salida de la caja de mensaje.

Incorporando unidades dentro de un programa

Como usted ha podido observar de todos los ejemplos para las diversas versiones del programa p presentado en este capítulo, el incluir unidades a los valores de la entrada puede ser un proceso tedioso. Usted podría hacer que el programa mismo adjunte esas unidades a los valores de la entrada y de la salida. Ilustraremos estas opciones modificando una vez más el programa p, como se muestra a continuación.

Recobre el contenido del programa p a la pantalla usando ↱ p, y modifíquelo de esta manera:

> **Nota**: Hemos separado el programa arbitrariamente en varias líneas para la lectura fácil. Ésta no es necesariamente la manera que el programa se muestra en la pantalla de la calculadora. La secuencia de comandos es correcta, sin embargo. También, recuerde que el carácter ↵ no se muestra en la pantalla, sino que produce una nueva línea.

```
« “Enter V,T,n [S.I.]: “ {“↵ :V:↵ :T:↵ :n: “ {2 0} V }
INPUT OBJ→ → V T n
« V ‘1_m^3’ *  T ‘1_K’ *  n ‘1_mol’ * → V T n
« V “V” →TAG →STR “↵ ” + T “T” →TAG →STR “↵ ” +  n
“n” →TAG →STR “↵ ” +
‘(8.31451_J/(K*mol))*(n*T/V)‘ EVAL “p” →TAG →STR + + +
MSGBOX » » »
```

Esta nueva versión del programa incluye un nivel adicional de sub-programas (es decir, un tercer nivel de los símbolos del programa « »), y algunos pasos usando listas, i.e.,

```
V '1_m^3' * { } + T '1_K' * + n '1_mol' * + EVAL → V T n
```

La interpretación de este código es como sigue (utilizamos valores de la secuencia de la entrada de `:V:0.01`, `:T:300`, and `:n:0.8`):

1. `V` : El valor de V, como entrada marcada con etiqueta (por ejemplo., V:0.01) es colocado en la pantalla.

2. `'1_m^3'` : Las unidades de S.I. que corresponden a V entonces se ponen en el nivel 1 de la pantalla, la entrada marcada con etiqueta para V se mueven al nivel 2 de la pantalla.

3. `*` : Multiplicando el contenido de los niveles 1 y 2 de la pantalla, generamos un número con las unidades (por ejemplo., 0.01_m^3), pero se pierde la etiqueta.

4. `T '1_K' *` : Calculando valor de T incluyendo unidades de S.I.

5. `n '1_mol' *` : Calculando valor de n incluyendo unidades

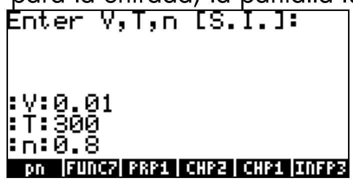
6. `→ V T n` : Los valores de V, T, y n, situados respectivamente en los niveles 3, 2, y 1 de la pantalla, se pasan encendido al nivel siguiente de sub-programas

Para ver esta versión del programa en la acción hacer el siguiente:

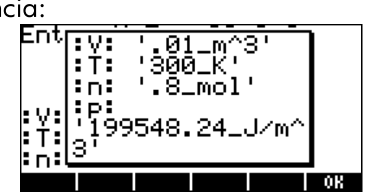
- Almacene el programa nuevamente dentro de la variable p usando [↰][p].
- Activar el programa presionando [p].

- Escriba los valores V = 0.01, T = 300, y n = 0.8, cuando se le solicite (no se requieren unidades en este caso).

Antes de presionar ENTER para la entrada, la pantalla lucirá así:



Presione ENTER para activar el programa. La salida es una caja de mensaje que contiene la secuencia:



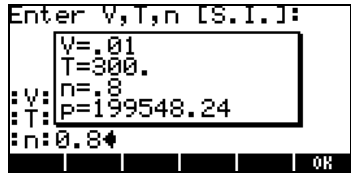
Presione OK para cancelar salida de la caja de mensaje.

Caja de mensaje sin unidades

Modifiquemos el programa p una vez más para eliminar el uso de unidades a través de él. El programa sin unidades lucirá así:

```
« “Enter V,T,n [S.I.]: “ {“↵ :V:↵ :T:↵ :n: “ {2 0} V }
INPUT OBJ→ → V T n
« V DTAG  T DTAG  n DTAG →  V T n
« “V=” V →STR + “↵ ”+ “T=” T →STR + “↵ ”+ “n=”  n →STR +
“↵ ”+
‘8.31451*n*T/V‘ EVAL →STR “p=” SWAP + + + + MSGBOX » » »
```

Y cuando opera con los datos de entrada V = 0.01, T = 300, y n = 0.8, produce la salida de la caja de mensaje:



Presione OK para cancelar la salida de la caja de mensaje.

Operadores relacionales y lógicos

Hemos trabajado hasta ahora principalmente con programas secuenciales. El lenguaje User RPL proporciona declaraciones que permiten el ramificaciones y lazos en el flujo de programa. Muchas de estas decisiones se basan en si una declaración lógica es verdad o no. En esta sección presentamos algunos de los elementos usados para construir tales declaraciones usando operadores relacionales y lógicos.

Operadores relacionales

Operadores relacionales son esos operadores usados para comparar la posición relativa de dos objetos. Por ejemplo, utilizando números reales solamente, los operadores relacionales se utilizan para hacer una declaración con respecto a la posición relativa de dos números reales. Dependiendo de los números reales usados, tal declaración puede ser verdadera (representado por el valor numérico de 1. en la calculadora), o falsa (representado por el valor numérico de 0. en la calculadora).
Los relacionales de los operadores disponibles para programar la calculadora son:

Operador	**Significado**	**Ejemplo**
==	"es igual a"	'x==2'
≠	"no es igual a"	'3 ≠ 2'
<	"es menor que"	'Minh'
>	"es mayor que"	'10>a'
≥	"es mayor o igual que"	'p ≥ q'
≤	"es menor o igual que"	'7≤12'

Todos los operadores, excepto == (el cuál puede ser creado escribiendo ↱ = ↱ =), están disponible en el teclado. Estos operadores están también disponibles en ↰ PRG TEST.

Dos números, variables, o algebraics conectados por una forma de operador relacional constituyen una expresión lógica que puede tomar el valor de verdad (1.), de falso (0.), o podría, simplemente, no ser evaluada. Para determinarse si una declaración lógica es verdad o no, ponga la declaración en el nivel 1 de la pantalla, y presione EVAL (EVAL). Ejempl0s:

‘2<10’ EVAL, resulta: 1. (verdadero)

‘2>10’ EVAL, resulta: 0. (falso)

En el ejemplo siguiente se asume que el m variable no está inicializado (no se ha dado un valor numérico): ‘2==m’ EVAL, resulta: ‘2==m’
El hecho de que el resultado de evaluar la declaración es la misma declaración original indica que la declaración no se puede evaluar únicamente.

Operadores lógicos

Los operadores lógicos son las partículas lógicas que se utilizan para ensamblar o para modificar declaraciones lógicas simples. Los operadores lógicos disponibles en la calculadora pueden ser obtenidos fácilmente con la secuencia de teclas: ↰ PRG TEST NXT.

Los operadores lógicos disponibles son: AND, OR, XOR, NOT, and SAME (traducción: y, o, o exclusivo, no, y el mismo). Los operadores producirán los resultados que son verdades o falsos, dependiendo del valor de verdad de las declaraciones lógicas afectadas. El operador NOT (negación) aplica a declaraciones lógicas únicas. Todos los otros se aplican a dos declaraciones lógicas.

La tabulación de todas las combinaciones posibles de una o dos declaraciones junto con el valor que resulta de aplicar un cierto operador lógico produce lo qué se llama la tabla de verdad del operador. Las siguientes son tablas de verdad de cada uno de los operadores lógicos estándares disponibles en la calculadora:

p	NOT p
1	0
0	1

p	q	p AND q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	p OR q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	p XOR q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

La calculadora incluye también a operador lógico SAME. Esto es operador lógico no estándar usado para determinar si dos objetos son idénticos. Si son idénticos, un valor de 1 (verdad) se vuelve, si no, un valor de 0 (falso) se vuelve. Por ejemplo, el ejercicio siguiente, en modo RPN, produce un valor de 0: 'SQ(2)' ENTER 4 ENTER SAME

Note por favor que el uso de SAME implica una interpretación muy estricta de la palabra "idéntico." Por esa razón, SQ(2) no es idéntico a 4, aunque ambos evalúan, numéricamente, a 4.

Ramificación del programa

La ramificación de un flujo de programa implica que el programa toma una decisión entre dos o más posibles trayectorias del flujo. El lenguaje User RPL proporciona un número de comandos que se puedan utilizar para la ramificación del programa. Los menús que contienen estos comandos están alcanzados con la secuencia teclas:

Este menú muestra los sub-menús para las instrucciones de programa

Las instrucciones de programa IF…THEN..ELSE…END, y CASE…THEN…END será referido como construcciones de ramificación del programa. Las instrucciones restantes, a saber, START, FOR, DO, y WHILE, son apropiadas para controlar el proceso repetitivo dentro de un programa y será referido como construcciones del lazo del programa. Los últimos tipos de construcciones del programa se presentan más detalladamente en una sección posterior.

Ramificación con IF

En esta sección presentamos ejemplos usando las instrucciones IF…THEN…END y IF…THEN…ELSE…END.

La instrucción IF…THEN…END

La instrucción IF…THEN…END es el más simple de las instrucciones IF. El formato general de esta instrucción es:

```
IF expresión_lógica THEN expresiones_del_programa END.
```

La operación de esta instrucción es como sigue:

1. Evaluar expresión_lógica.
2. Si expresión_lógica es verdad, se realizan expresiones_del_programa y continuar el flujo de programa después de la instrucción END.

3. Si expresión_lógica es falso, ignore expresiones_del_programa y continuar el flujo de programa después de la instrucción END.

Para escribir las partículas IF, THEN, ELSE, y END, use:

← PRG BRCH IF

Las funciones IF THEN ELSE END están disponibles en ese menú para ser escritas selectivamente por el usuario. Alternativamente, para producir la instrucción IF…THEN…END directamente en la pantalla, use:

← PRG BRCH ← IF

Esto creará la entrada siguiente en la pantalla:

Con el cursor ⬅ delante de la instrucción IF solicitando del usuario la declaración lógica que activará la instrucción IF cuando se ejecuta el programa.

Ejemplo: Escriba el siguiente programa:

```
« → x « IF 'x<3' THEN 'x^2' EVAL END "Done" MSGBOX » »
```

y almacénelo bajo el nombre 'f1'. Presione VAR y verifique que esa variable f1 está de hecho disponible en su menú de variables. Verifique los siguientes resultados:

0 f1	Resulta: 0	1.2 f1	Resulta: 1.44
3.5 f1	Resulta: no acción	10 f1	Resulta: no acción

Estos resultados confirman la operación correcta de la instrucción IF…THEN…END. El programa, según lo escrito, calcula la función $f_1(x) = x^2$, si $x < 3$ (y no salida de otra manera).

La instrucción IF…THEN…ELSE…END

La instrucción IF…THEN…ELSE…END permite dos trayectorias alternativas del flujo de programa basadas en el valor de verdad de la expresión_lógica. El formato general de esta instrucción es:

```
IF expresión_lógica THEN
expresiones_del_programa_si_verdadera     ELSE
expresiones_del_programa_si_falsa END.
```

La operación de esta instrucción es la siguiente:

1. Evalúe expresión_lógica.
2. Si expresión_lógica es verdad, se realizan expresiones_del_programa_si_verdadera y continúe el flujo de programa después de la instrucción END.
3. Si expresión_lógica es falsa, se realizan expresiones_del_programa_si_falsa and continúe el flujo del programa después de la instrucción END.

Para producir una instrucción IF…THEN…ELSE…END directamente si la pantalla, use:

← PRG BRCH → IF

Esto creará la entrada siguiente dentro la pantalla:

Ejemplo: Escriba el siguiente programa:

```
« → x « IF 'x<3' THEN 'x^2' ELSE '1-x' END EVAL "Done" MSGBOX
» »
```

y almacénelo bajo el nombre 'f2'. Presione VAR y verifique que esa variable f2 está de hecho disponible en su menú de variables. Verifique los siguientes resultados:

0 f2 Resulta: 0 1.2 f2 Resulta: 1.44
3.5 f2 Resulta: -2.5 10 f2 Resulta: -9

Estos resultados confirman la operación correcta de la instrucción IF…THEN…ELSE…END. El programa, según lo escrito, calcula la función

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2, \, if \;\; x < 3 \\ 1 - x, \, otherwise \end{cases}$$

> **Nota**: Para este caso particular, una alternativa válida habría sido utilizar la función IFTE de la forma: 'f2(x) = IFTE(x<3,x^2,1-x)'

Instrucciones IF…THEN…ELSE…END anidadas

En la mayoría de los lenguajes de programación de computadoras donde la instrucción IF…THEN…ELSE…END está disponible, el formato general usado para la presentación del programa es el siguiente:

```
IF expresión_lógica THEN
      expresiones_del_programa_si_verdadera
ELSE
      expresiones_del_programa_si_falsa
END
```

Al diseñar un programa de calculadora que incluye las instrucciones IF, usted podría comenzar escribiendo a mano el pseudo-código para las instrucciones IF según lo demostrado arriba. Por ejemplo, para el programa f2, usted podría escribir

```
IF x<3 THEN
      x²
ELSE
      1-x
END
```

Mientras que esta instrucción simple trabaja muy bien cuando la función tiene solamente dos ramas, usted puede necesitar jerarquizar instrucciones IF…THEN…ELSE…END para ocuparse de la función con tres o más ramas. Por ejemplo, considere la función

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2, \, if \;\; x < 3 \\ 1 - x, \;\; if \;\; 3 \le x < 5 \\ \sin(x), \, if \;\; 5 \le x < 3\pi \\ \exp(x), if \;\; 3\pi \le x < 15 \\ -2, \, elsewhere \end{cases}$$

He aquí una manera posible de evaluar este uso de la función con instrucciones IF… THEN … ELSE … END:

```
IF x<3 THEN
        x²
ELSE
        IF x<5 THEN
                1-x
        ELSE
                IF x<3π          THEN
                        sin(x)
                ELSE
                        IF x<15 THEN
                                exp(x)
                        ELSE
                                -2
                        END
                END
        END
END
```

Una instrucción IF como esta se llama un sistema jerarquizado, o anidado, de instrucciones IF … THEN … ELSE … END.

Una manera posible de evaluar f3(x), de acuerdo con las instrucciones IF anidadas como se demuestra arriba, es con el programa:

```
« → x « IF 'x<3' THEN 'x^2' ELSE IF 'x<5' THEN '1-x' ELSE IF
'x<3*π' THEN 'SIN(x)' ELSE IF 'x<15' THEN 'EXP(x)' ELSE -2
END END END END EVAL » »
```

Almacene el programa en la variable F3 e intente las evaluaciones siguientes:

1.5 F3	*Resulta:*	2.25 (i.e., x^2)
2.5 F3	*Resulta:*	6.25 (i.e., x^2)
4.2 F3	*Resulta:*	-3.2 (i.e., 1-x)
5.6 F3	*Resulta:*	-0.631266… (sin(x), con x en radianes)
12 F3	*Resulta:*	162754.791419 (exp(x))
23 F3	*Resulta:*	-2. (-2)

La instrucción CASE

La instrucción CASE (traducción: caso) puede ser utilizado para cifrar varias trayectorias posibles del flujo de programa, como en el caso de los IF anidados, presentado anteriormente. El formato general de esta instrucción es como sigue:

```
CASE
Expresión_lógica1 THEN expresiones_del_programa1 END
Expresión_lógica2 THEN expresiones_del_programa2 END
.
.
.
Expresión_lógica THEN expresiones_del_programa END
Default_expresiones_del_programa (opcional)
END
```

Al evaluar esta instrucción, el programa prueba cada una de las *expresión_lógicas* hasta que encuentra una que sea verdad. El programa ejecuta las *expresiones_del_programa* correspondientes, y pasa el flujo de programa al paso que sigue la instrucción END.

Las partículas CASE, THEN, y END están disponibles para escribirse selectivamente usando ← PRG BRCH CASE .

Si usted está en el menú BRCH, i.e., (PRG BRCH) usted puede utilizar los atajos siguientes para escribir la instrucción CASE (La localización del cursor es indicada por el símbolo ⇐):

- CASE: Comienza la instrucción del caso indicando: CASE ⇐ THEN END END
- CASE: Termina una línea CASE agregando las partículas THEN ⇐ END

Ejemplo – programa $f_3(x)$ usando la instrucción CASE
La función es definida por las 5 expresiones siguientes:

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2, if\ x < 3 \\ 1-x,\ if\ 3 \le x < 5 \\ \sin(x), if\ 5 \le x < 3\pi \\ \exp(x), if\ 3\pi \le x < 15 \\ -2, elsewhere \end{cases}$$

Usando la instrucción CASE en el lenguaje User RPL podemos cifrar esta función como:

```
« → x « CASE 'x<3' THEN 'x^2' END 'x<5' THEN '1-x' END
'x<3*π' THEN 'SIN(x)' END 'x<15' THEN 'EXP(x)' END –2 END
EVAL » »
```

Almacene el programa en una variable llamada f3c. Entonces, intentamos los ejercicios siguientes:

1.5	f3c	*Resulta:* 2.25 (i.e., x^2)
2.5	f3c	*Resulta:* 6.25 (i.e., x^2)
4.2	f3c	*Resulta:* -3.2 (i.e., 1-x)
5.6	f3c	*Resulta:* -0.631266… (i.e., sin(x), x en radianes)
12	f3c	*Resulta:* 162754.791419 (i.e., exp(x))
23	f3c	*Resulta:* -2. (i.e., -2)

Como usted puede ver, f3c produce exactamente los mismos resultados que f3. La única diferencia en los programas es las instrucciones de ramificación usadas. Para el caso de la función $f_3(x)$, la cuál requiere cinco expresiones para su definición, la instrucción CASE puede ser más fácil de cifrar que un número de instrucciones IF … THEN … ELSE … END anidadas.

Lazos de programa

Los lazos de programa son instrucciones que permiten al programa la ejecución de un número de declaraciones repetidamente. Por ejemplo, suponga que usted desea calcular la adición del cuadrado de los números enteros de 0 a n, i.e.,

$$S = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

Para calcular esta adición todo lo que usted tiene que hacer es utilizar las teclas ⮫ _Σ dentro del editor de ecuaciones y cargar los límites y la expresión para la adición (los ejemplos de adiciones se presentan en los capítulos 2 y 13). Sin embargo, para ilustrar el uso de programar lazos, calcularemos esta adición con nuestros propios códigos del User RPL. Hay cuatro diversos comandos que se pueden utilizar para cifrar un lazo de programa en lenguaje User RPL, éstos son START, FOR, DO, y WHILE. Las instrucciones START y FOR utilizan un índice para determinar cuántas veces se ejecuta el lazo. Los comandos DO y WHILE usan una declaración lógica para decidir cuando terminar la ejecución del lazo. La operación de los comandos de lazo se describe detalladamente en las secciones siguientes.

La instrucción START

La instrucción START usa dos valores de un índice para ejecutar un número de declaraciones en varias ocasiones. Hay dos versiones de la instrucción START: START…NEXT y START … STEP. La versión START…NEXT se utiliza cuando el incremento del índice es igual a 1, y la versión START…STEP se utiliza cuando el incremento del índice es determinado por el usuario.

Los comandos implicados en la instrucción START están disponible a través de:

‹PRG BRCH START START

Dentro del menú BRCH (‹PRG BRCH) las teclas siguientes están disponibles para generar instrucciones START (el símbolo ⇐ indica la posición del cursor):

- ‹ START: Comienza la instrucción START…NEXT: START ⇐ NEXT
- › START: Comienza la instrucción START…STEP: START ⇐ STEP

La instrucción START…NEXT
La forma general de esta declaración es:

```
valor_inicial valor_final START expresiones_del_programa
NEXT
```

Porque para este caso el incremento es 1, para que el lazo termine, se debe asegurar que `valor_inicial < valor_final`. Si no usted producirá qué se llama un lazo infinito (interminable).

Ejemplo - calcular de la adición S definida arriba
La instrucción START…NEXT contiene un índice cuyo valor es inaccesible al usuario. Puesto que para el cálculo de la suma el índice mismo (k, en este caso) es necesario, debemos crear nuestro propio índice, k, que incrementaremos dentro del lazo cada vez que el lazo se ejecuta. Una aplicación práctica posible en el cálculo de S es el programa:

```
« 0. DUP →n S k « 0. n START k SQ S + 1. 'k' STO+ 'S' STO
NEXT S "S" →TAG » »
```

Escriba el programa, y almacénelo en una variable llamada S1.

He aquí una breve explicación de cómo el programa trabaja:

1. Este programa necesita un número entero como entrada. Así, antes de la ejecución del programa, ese número (n) está en el nivel 1 de la pantalla. El programa entonces se ejecuta.

2. Se introduce un cero, n se cambia al nivel 2 de la pantalla
3. La instrucción DUP, la cuál se puede escribir como ALPHA ALPHA D U P ALPHA, copia el contenido del nivel 1 de la pantalla, mueve todos los niveles de la pantalla hacia arriba, y coloca la copia en el nivel 1 de la pantalla. Así, después de ejecutar DUP, n está en el nivel 3 y aparecen ceros en los otros niveles.
4. La parte del código `→ n S k` almacena los valores de n, 0, y 0, respectivamente en las variables locales n, S, k. Decimos que se han inicializado las variables n, S, y k (S y k a cero, n a cualquier valor que el usuario elige).
5. La parte del código `0. n START` identifica un lazo START cuyo índice tomará valores 0, 1, 2, …, n
6. La suma S se incrementa en k^2 en la parte del código: `k SQ S +`
7. El índice k se incrementa en 1 en la parte del código: `1. k +`
8. 8. A este punto, los valores actualizados de S y k están disponibles en los niveles 2 y 1 de la pantalla, respectivamente. La parte del código `'k' STO` almacena el valor del nivel 1 de la pantalla en la variable local k. El valor actualizado de S ahora ocupa el nivel 1 de la pantalla.
9. La parte del código `'S' STO` almacena el valor del nivel 1 de la pantalla en la variable local k. El pantalla del la es vacío ahora.
10. La partícula NEXT aumenta el índice en uno y envía el control al principio del lazo (paso 6).
11. Se repite el lazo hasta que el índice del lazo alcanza el valor máximo, n.
12. La parte última del programa recuerda el valor último de S (la adición), lo etiqueta, y lo coloca en el nivel 1 de la pantalla como la salida del programa.

Para ver el programa en acción, paso a paso, usted puede utilizar el programa DBUG como sigue (use n = 2). Sea SL1 el nivel 1 de la pantalla:

VAR 2 ['] S1 ENTER	Coloque 2 en el nivel 2, y el nombre del programa, ' S1 ', en el nivel 1
← PRG NXT NXT RUN DBG	Comenzar DBUG. SL1 = 2.
SST↓	SL1 = 0., SL2 = 2.
SST↓	SL1 = 0., SL2 = 0., SL3 = 2. (DUP)
SST↓	Pantalla vacía (-> n S k)

SST↓	Pantalla vacía (« - comienza subprograma)
SST↓	SL1 = 0., (comenzar índice del lazo)
SST↓	SL1 = 2.(n), SL2 = 0. (valor del final del índice del lazo)
SST↓	Pantalla vacía (START – principio del lazo)

--- ejecución del lazo número 1 para k = 0

SST↓	SL1 = 0. (k)
SST↓	SL1 = 0. (SQ(k) = k^2)
SST↓	SL1 = 0.(S), SL2 = 0. (k^2)
SST↓	SL1 = 0. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 1., SL2 = 0. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 0.(k), SL2 = 1., SL3 = 0. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 1.(k+1), SL2 = 0. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 'k', SL2 = 1., SL3 = 0. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 0. (S + k^2) [Almacena SL2 = 1, en SL1 = 'k']
SST↓	SL1 = 'S', SL2 = 0. (S + k^2)
SST↓	Pantalla vacía [Almacena SL2 = 0, en SL1 = 'S']
SST↓	Pantalla vacía (NEXT – final del lazo)

--- ejecución del lazo número 2 para k = 1

SST↓	SL1 = 1. (k)
SST↓	SL1 = 1. (SQ(k) = k^2)
SST↓	SL1 = 0.(S), SL2 = 1. (k^2)
SST↓	SL1 = 1. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 1., SL2 = 1. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 1.(k), SL2 = 1., SL3 = 1. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 2.(k+1), SL2 = 1. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 'k', SL2 = 2., SL3 = 1. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 1. (S + k^2) [Almacena SL2 = 2, en SL1 = 'k']
SST↓	SL1 = 'S', SL2 = 1. (S + k^2)
SST↓	Pantalla vacía [Almacena SL2 = 1, en SL1 = 'S']
SST↓	Pantalla vacía (NEXT – final del lazo)

-- ejecución del lazo número 3 para k = 2

SST↓	SL1 = 2. (k)
SST↓	SL1 = 4. (SQ(k) = k^2)
SST↓	SL1 = 1.(S), SL2 = 4. (k^2)
SST↓	SL1 = 5. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 1., SL2 = 5. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 2.(k), SL2 = 1., SL3 = 5. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 3.(k+1), SL2 = 5. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 'k', SL2 = 3., SL3 = 5. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 5. (S + k^2) [Almacena SL2 = 3, en SL1 = 'k']
SST↓	SL1 = 'S', SL2 = 5. (S + k^2)
SST↓	Pantalla vacía [Almacena SL2 = 0, en SL1 = 'S']
SST↓	Pantalla vacía (NEXT – final del lazo)

-- para n = 2, se agota el índice del lazo y el control se pasa al paso siguiente de la instrucción NEXT

SST↓	SL1 = 5 (S se pasa a la pantalla)
SST↓	SL1 = "S", SL2 = 5 ("S" se pasa a la pantalla)
SST↓	SL1 = S:5 (etiqueta para salida)
SST↓	SL1 = S:5 (dejar el subprograma »)
SST↓	SL1 = S:5 (dejar programa principal »)

El listado paso a paso se termina. El resultado de activar el programa S1 con n = 2, es S:5.

Comprobar también los resultados siguientes: VAR

3 S1	Resulta: `S:14`	4 S1	Resulta: `S:30`
5 S1	Resulta: `S:55`	8 S1	Resulta: `S:204`
10 S1	Resulta: `S:385`	20 S1	Resulta: `S:2870`
30 S1	Resulta: `S:9455`	100 S1	Resulta: `S:338350`

La instrucción START…STEP

La forma general de esta declaración es:

```
valor_inicial valor_final START expresiones_del_programa
incremento NEXT
```

Las partículas valor_inicial, valor_final, e `incremento` de lazo en el índice puede ser cantidades positivas o negativas. Para `increment > 0`, la ejecución ocurre mientras el índice es menos que o igual a `valor_final`. Para `increment < 0`, la ejecución ocurre mientras el índice es mayor que o igual a `valor_final`.

Ejemplo – generación de una lista de valores
Suponer que usted desea generar una lista de valores de x de x = 0.5 a x = 6.5 en incrementos de 0.5. Usted puede escribir el programa siguiente:

```
« → xs xe dx « xs DUP xe START DUP dx + dx STEP DROP xe
xs – dx / ABS 1 + →LIST » »
```

y almacenarlo en la variable GLIST.

En este programa, xs = valor inicial del lazo, xe = valor final del lazo, dx = valor del incremento para el lazo. El programa coloca los valores de xs, xs+dx, xs+2·dx, xs+3·dx, … en la pantalla. Entonces, calcula el número de los elementos generados usando: `xe xs – dx / ABS 1. +`

Finalmente, el programa junta una lista con los elementos puestos en la pantalla.

- Verifique que al activar el programa con 0.5 ENTER 2.5 ENTER 0.5 ENTER GLIST se produce la lista {0.5 1. 1.5 2. 2.5}.
- Para ver, paso a paso, la operación del programa, use DBUG con una lista corta, Por ejemplo:

VAR 1 SPC 1.5 SPC 0.5 ENTER	Escriba 1 1.5 0.5
['] GLIST ENTER	Escriba nombre en nivel 1
← PRG NXT NXT RUN DBG	Comenzar el DBUG.

Use SST↓ para caminar en el programa y ver la operación detallada de cada comando.

La instrucción FOR

Como en el caso de la instrucción START, la instrucción FOR tiene dos variaciones: la instrucción FOR…NEXT, para los incrementos del índice del lazo de 1, y la instrucción FOR…STEP, para los incrementos del índice del lazo seleccionados por el usuario. A diferencia de la instrucción START, sin embargo, la instrucción FOR requiere que proporcionemos un nombre para el índice del lazo (por ejemplo., j, k, n). No necesitamos preocuparnos de incrementar el índice nosotros mismos, como se hizo con los ejemplos que usan START. El valor que corresponde al índice está disponible para los cálculos.

Los comandos implicados en la instrucción FOR estar disponible a través de:

↰ PRG BRCH FOR

Dentro del menú BRCH (↰ PRG BRCH)los golpes de teclado siguientes están disponibles para generar instrucciones FOR (el símbolo ⇐ indica la posición del cursor):

- ↰ FOR: Comienza la instrucción FOR…NEXT : FOR ⇐ NEXT
- ↱ FOR: Comienza la instrucción FOR…STEP : FOR ⇐ STEP

La instrucción FOR…NEXT

La forma general de esta declaración es:

```
valor_inicial valor_final FOR loop_index
expresiones_del_programa NEXT
```

Para evitar un bucle infinito, cerciorarse de que `valor_inicial < valor_final`.

Ejemplo – calcular la adición S usando una instrucción FOR…NEX. El programa siguiente calcula la adición

$$S = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

Use una instrucción FOR…NEXT:

```
« 0 →n S « 0 n FOR k k SQ S + ‘S‘ STO NEXT S “S” →TAG » »
```

Almacene este programa en una variable ▒▒. Verifique los siguientes ejercicios: VAR

3 ▒▒	Resulta: `S:14`	4 ▒▒	Resulta: `S:30`
5 ▒▒	Resulta: `S:55`	8 ▒▒	Resulta: `S:204`
10 ▒▒	Resulta: `S:385`	20 ▒▒	Resulta: `S:2870`
30 ▒▒	Resulta: `S:9455`	100 ▒▒	Resulta: `S:338350`

Usted pudo haber notado que el programa es mucho más simple que el que está almacenado en ▒▒. No hay necesidad de inicializar k, o de incrementar k dentro del programa. El programa mismo produce tales incrementos.

La instrucción FOR…STEP

La forma general de esta instrucción es:

```
valor_inicial valor_final FOR loop_index
expresiones_del_programa incremento STEP
```

Las cantidades valor_inicial, valor_final, e `incremento` del índice del lazo puede ser cantidades positivas o negativas. Para `incremento > 0`, la ejecución ocurre mientras el índice es menos que o igual a `valor_final`. Para `incremento < 0`, la ejecución ocurre mientras el índice es mayor que o igual a `valor_final`. Las declaraciones del programa se ejecutan por lo menos una vez (por ejemplo, `1 0 START 1 1 STEP` produce 1)

<u>Ejemplo</u> – generar una lista de números usando una instrucción FOR…STEP Escriba el programa:

```
« → xs xe dx « xe xs – dx / ABS 1. + → n « xs xe FOR x
x dx STEP n →LIST » » »
```

y almacénelo en la variable GLIST.

- Verifique que 0.5 ENTER 2.5 ENTER 0.5 ENTER GLIST produce la lista {0.5 1. 1.5 2. 2.5}.
- Para ver, paso a paso, la operación del programa, use DBUG para una lista corta, por ejemplo:

VAR 1 SPC 1.5 SPC 0.5 ENTER	Escriba 1 1.5 0.5
['] GLIST ENTER	Nombre de programa en nivel 1
← PRG NXT NXT RUN DBG	Comenzar DBUG.

Use SST↓ para recorrer el programa y ver la operación detallada de cada comando.

La instrucción DO

La estructura general de este comando es:

```
DO expresiones_del_programa UNTIL expresión_lógica END
```

La instrucción DO comienza un lazo indefinido ejecutando las expresiones_del_programa hasta que la expresión_lógica produce un falso (FALSE (0)). La `expresión_lógica` debe contener el valor de un índice cuyo valor se cambia en las `expresiones_del_programa`.

Ejemplo 1 - Este programa produce un contador en la esquina izquierda superior de la pantalla que agrega 1 en un lazo indefinido hasta que una tecla (presione cualquiera de ellas) para el contador:

```
« 0 DO DUP 1 DISP 1 + UNTIL KEY END DROP »
```

La instrucción KEY evalúa a TRUE (verdadero) cuando se presiona una tecla.

Ejemplo 2 – calcular la suma S usando una instrucción DO…UNTIL…END
El programa siguiente calcula la sumatoria:

$$S = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

Usando una instrucción DO…UNTIL…END:

```
« 0. → n S « DO n SQ S + ‘S‘ STO n 1 – ‘n‘ STO UNTIL
‘n<0‘ END S “S” →TAG » »
```

Almacene este programa en una variable S3. Verifique los siguientes ejercicios: VAR

3 S3	Resulta: S:14	4 S3	Resulta: S:30
5 S3	Resulta: S:55	8 S3	Resulta: S:204
10 S3	Resulta: S:385	20 S3	Resulta: S:2870
30 S3	Resulta: S:9455	100 S3	Resulta: S:338350

Ejemplo 3 - generar una lista usando una instrucción DO…UNTIL…END
Escriba el siguiente programa

```
« → xs xe dx « xe xs – dx / ABS 1. + xs → n x « xs DO
‘x+dx’ EVAL DUP ‘x’ STO UNTIL ‘x≥xe’ END n →LIST » » »
```

y almacenarlo en la variable GLIS3.

- Verifique que 0.5 ENTER 2.5 ENTER 0.5 ENTER GLIS3 produce la lista {0.5 1. 1.5 2. 2.5}.
- Para ver, paso a paso, la operación del programa, use DBUG para una lista corta, por ejemplo:

VAR 1 SPC 1.5 SPC 0.5 ENTER	Escriba 1 1.5 0.5
[‘] GLIS3 ENTER	Nombre de programa en nivel 1
← PRG NXT NXT RUN DBG	Comenzar DBUG

Use SST↓ para recorred el programa y ver la operación detallada de cada instrucción.

La instrucción WHILE

La estructura general de este comando es:

```
WHILE expresión_lógica REPEAT expresiones_del_programa
END
```

La instrucción WHILE repetirá las `expresiones_del_programa` mientras `expresión_lógica` es verdadero (no cero). Si no, el control de programa se pasa a la instrucción que sigue a la declaración END. Las `expresiones_del_programa` debe incluir un índice de lazo que se modifica antes de que se verifique la `expresión_lógica` al principio de la repetición siguiente. A diferencia de la instrucción DO, si la primera evaluación la expresión_lógica es falsa, el lazo nunca se ejecuta.

Ejemplo 1 – calcular la sumatoria S usando una instrucción WHILE…REPEAT…END

El programa siguiente calcula la sumatoria

$$S = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

Usando un lazo WHILE…REPEAT…END:

```
« 0. →n S « WHILE 'n≥0' REPEAT n SQ S + 'S' STO n 1 –
'n' STO END S "S" →TAG » »
```

Almacene este programa en una variable S4. Verifique los siguientes ejercicios: VAR

3 S4	Resulta: `S:14`	4 S4	Resulta: `S:30`
5 S4	Resulta: `S:55`	8 S4	Resulta: `S:204`
10 S4	Resulta: `S:385`	20 S4	Resulta: `S:2870`
30 S4	Resulta: `S:9455`	100 S4	Resulta: `S:338350`

Ejemplo 2 – generar una lista usando la instrucción WHILE…REPEAT…END. Escriba el siguiente programa

```
« → xs xe dx « xe xs – dx / ABS 1. + xs → n x « xs
WHILE 'x<xe' REPEAT 'x+dx' EVAL DUP 'x' STO END n →LIST » »
»
```

y almacénelo en la variable GLIST.

- Verifique que 0.5 ENTER 2.5 ENTER 0.5 ENTER GLIST produce la lista {0.5 1. 1.5 2. 2.5}.
- Para ver, paso a paso, la operación del programa, use DBUG para una lista corta, por ejemplo:

VAR 1 SPC 1.5 SPC 0.5 ENTER	Escriba 1 1.5 0.5
['] GLIST ENTER	Nombre del programa en nivel 1
← PRG NXT NXT RUN DBG	Comenzar DBUG.

Use SST↓ para recorrer el programa y ver la operación detallada de cada comando.

Errores y captura de errores

Las funciones del sub-menu PRG/ERROR proporcionan maneras de manipular errores en la calculadora, y atrapan errores en programas. El sub-menu de PRG/ERROR, está disponible a través de ← PRG NXT NXT ERROR , y contiene las funciones y los sub-menús siguientes:

DOERR

Esta función ejecuta un error definido por el usuario, así haciendo que la calculadora se comporte como si haya ocurrido ese error particular. La función puede tomar como argumento un número entero, un entero binario, un mensaje de error, o el número cero (0). Por ejemplo, en el modo de RPN, al escribir 5 ENTER DOERR, produce el mensaje de error siguiente: *Error: Memory Clear*

Si usted escribe #11h ENTER DOERR, se produce el mensaje siguiente: *Error: Undefined FPTR Name*

Si Ud. escribe "TRY AGAIN" ENTER DOERR, produce el mensaje siguiente: *TRY AGAIN*

Finalmente, 0 ENTER DOERR, produce el mensaje: *Interrupted*

ERRN

Esta función produce un número que representa el error más reciente. Por ejemplo, si usted intenta 0 1/x ON ERRN, usted consigue el número #305h. Éste es el número entero binario que representa el error: *Infinite Result*

ERRM

Esta función produce una cadena de caracteres que representa el mensaje de error del error más reciente. Por ejemplo, en modo Approx, si usted intenta 0 1/x ON ERRM, usted consigue la secuencia siguiente: *"Infinite Result"*

ERR0

Esta función despeja el número pasado del error, de modo que, al ejecutar ERRN, en modo Approx, se produce # 0h. Por ejemplo, si usted intenta 0 1/x ON ERR0 ERRN, se obtiene # 0h. También, si usted intenta 0 1/x ON ERR0 ERRM, usted consigue la secuencia vacía " ".

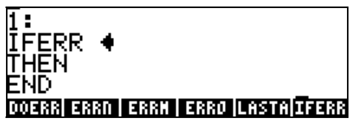
LASTARG

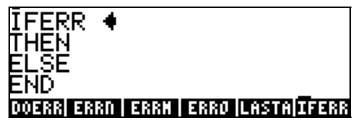
Esta función produce las copias de los argumentos del comando o de la función ejecutada lo más recientemente posible. Por ejemplo, en modo de RPN, si usted utiliza: 3 ÷ 2 ENTER, y después usa la función LASTARG (LASTA),usted conseguirá los valores 3 y 2 enumerados en la pantalla. Otro ejemplo, en modo RPN, es el siguiente: 5 TAN ENTER. Usando LASTARG después de estas entradas produce un 5.

Sub-menu IFERR

El sub-menú IFERR proporciona las funciones siguientes:

Éstos son los componentes de la instrucción IFERR … THEN … END o de la instrucción IFERR … THEN … ELSE … END. Ambas instrucciones lógicas se utilizan para la captura de errores durante la ejecución de un programa. Dentro del sub-menú ERROR, al escribir ← IFERR, o → IFERR, se colocarán las componentes de la estructura IFERR en la pantalla, alistar para que el usuario llene los términos que faltan, i.e.,





La forma general de las dos instrucciones de la captura de errores es como sigue:

IF cláusula_de_atrapar THEN clausula_de_error END

IF clausula_de_atrapar THEN clausula_de_error ELSE clausula_normal END

La operación de estas instrucciones lógicas es similar a la de las instrucciones IF … THEN … END y IF … THEN … ELSE … END. Si un error se detecta durante la ejecución de la clausula_de_atrapar, entonces la clausula_de_error se ejecuta. Si no, la clausula_normal se ejecuta.

Como ejemplo, considerar el programa siguiente (ERR1) que toma como entrada dos matrices, A y b, y verifica si hay un error en la cláusula de atrapar: A b / (modo RPN, i.e., A/b). Si hay un error, entonces el programa llama la función LSQ (ver el capítulo 11) para solucionar el sistema de ecuaciones:

```
« → A b « IFERR A b / THEN LSQ END »  »
```

Intentarlo con los argumentos A = [[2, 3, 5] , [1, 2, 1]] y b = [[5] , [6]]. Una división simple de estas dos discusiones produce un error: */Error: Invalid Dimension.*

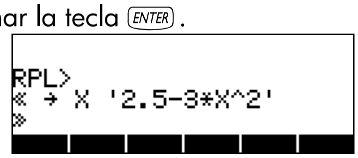
Sin embargo, con la instrucción de captura de errores del programa, , con los mismos argumentos produce: [0.262295…, 0.442622…].

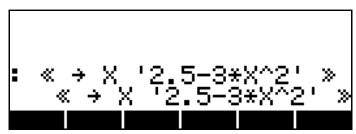
Programación de User RPL en modo algebraico

Mientras que todos los programas presentados anteriormente se produjeron y activaron en modo RPN, usted puede escribir un programa en User RPL en modo algebraico usando la función RPL>. Esta función está disponible a través del catálogo de funciones. Como ejemplo, intente crear el programa siguiente en modo algebraico, y almacénelo en la variable P2:

« → X '2.5-3*X^2' »

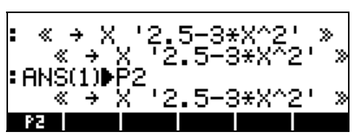
Primero, active la función RPL> en el catálogo de funciones (→ CAT). Todas las funciones activadas en modo ALG tienen un par de paréntesis unidos a su nombre. La función RPL> no es una excepción, excepto que los paréntesis deben removerse antes de escribir un programa en la pantalla. Utilice las teclas (◀ ▶) y (◆) para eliminar paréntesis de la instrucción RPL>(). A este punto usted estará listo a escribir el programa en User RPL. Las figuras siguientes muestran la instrucción RPL> con el programa antes y después de presionar la tecla ENTER.





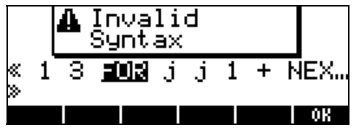
Para almacenar el programa use la función STO como sigue:

← ANS STO▶ ALPHA P 2 ENTER

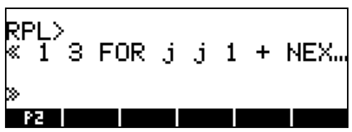


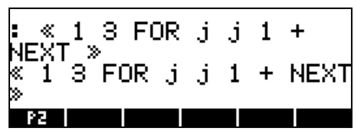
Una evaluación del programa P2 para la discusión X = 5 se demuestra en la pantalla siguiente:

Mientras que usted puede escribir programas en modo algebraico, sin usar la función RPL>, algunas de las instrucciones de RPL producirán un mensaje de error cuando usted presiona ENTER, por ejemplo:



Mientras que, usando RPL, no hay problema al cargar este programa en modo algebraico:





Capítulo 22
Programas para la manipulación de los gráficos

Este capítulo incluye un número de ejemplos que demuestran cómo utilizar las funciones de la calculadora para la manipulación de gráficos, interactivamente o con el uso de programas. Como en el capítulo 21 recomendamos usar el modo RPN y fijando la bandera del sistema 117 a SOFT menus.

Introducimos una variedad de usos gráficos de la calculadora en el capítulo 12. Los ejemplos del capítulo 12 representan la producción interactiva de gráficos usando las formas preprogramadas de la entrada de la calculadora. Es también posible utilizar gráficos en programas, por ejemplo, para complementar resultados numéricos con los gráficos. Para lograr tales tareas, primero introducimos la función en el menú PLOT.

El menú PLOT

Las funciones para ajustar y producir las gráficas están disponibles a través del menú PLOT. Usted puede tener acceso al menú PLOT usando: 8 1 . 0 1 ← PRG NXT MODES MENU MENU.

El menú producido así proporciona el acceso de usuario a una variedad de funciones de los gráficos. Para el uso en ejemplos subsecuentes, definamos la tecla F3 (GRAPH) para proporcionar el acceso a este menú según lo descrito abajo.

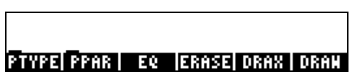
Tecla de usuario para el menú PLOT

Escriba lo siguiente para determinar si usted tiene teclas de usuario definidas en su calculadora: ← PRG NXT MODES KEYS RCLK.

A menos que usted haya definido algunas teclas de usuario, usted debe obtener una lista que contiene una S, es decir, {S}. Esto indica que el teclado estándar es la única definición almacenada en su calculadora. Para definir una tecla de usuario usted necesita agregar a esta lista una instrucción o un programa seguido por la referencia de la tecla (véanse los detalles en el capítulo 20). Escriba la lista `{ S << 81.01 MENU >> 13.0 }` en la pantalla y use la función STOKEYS (← PRG NXT MODES KEYS STOK) para definir la tecla F3 para acceder al menú PLOT. Verificar que tal lista fuera almacenada en la calculadora usando ← PRG NXT MODES KEYS RCLK.

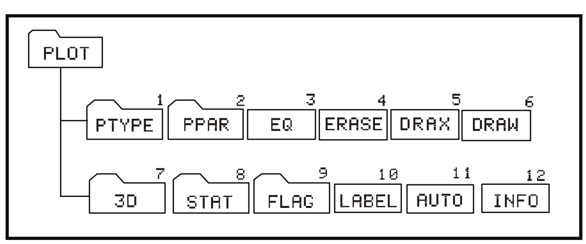
Nota: No trabajaremos ningún ejercicio mientras que presentamos el menú PLOT, sus funciones o sub-menus. Esta sección será más como una exploración de los contenidos de PLOT Y como se relacionan con el diverso tipo de gráficos disponibles en la calculadora.

Para activar una tecla de usuario usted necesita presionar ← USER (la tecla ALPHA) antes de presionar la tecla o la combinación de teclas de interés. Para activar el menú PLOT, con la definición de tecla usada anteriormente, presione: ← USER F3 . Usted conseguirá el menú siguiente (presione NXT para moverse al segundo menú)



Descripción del menú PLOT

El diagrama siguiente demuestra los menús en PLOT. El número que acompaña los diversos menús y funciones en el diagrama se utiliza como referencia en la descripción subsiguiente de esos objetos.



Las teclas denominadas 3D, STAT, FLAG, PTYPE, y PPAR, producen los menús adicionales, que serán presentados detalladamente más adelante. A este punto describimos las teclas del menú 81.02. Éstas son:

LABEL (10)
La función LABEL se utiliza para etiquetar los ejes en un diagrama incluyendo los nombres de variables y los valores mínimos y máximos de los ejes. Los nombres de variables se seleccionan de la información contenida en la variable PPAR.

AUTO (11)
La función AUTO (AUTO escala) calcula el rango de la gráfica para los ejes x y y en gráficas bidimensionales según el tipo de diagrama definido en la variable PPAR. Para cualesquiera de los gráficos tridimensionales la función AUTO no produce ninguna acción. Para los diagramas de dos dimensiones, las acciones siguientes se realizan por AUTO:

- FUNCTION: de acuerdo con el rango de la gráfica en x, hace un muestreo la función en EQ y determina los valores mínimo y máximo de y.
- CONIC: fija la escala del eje e igual a la del eje x.
- POLAR: de acuerdo con los valores de la variable independiente (típicamente θ), hace un muestreo la función en EQ y determina valores mínimos y máximos de x y de y.
- PARAMETRIC: produce un resultado similar a POLAR de acuerdo con los valores del parámetro que define las ecuaciones para x y y.
- TRUTH: no produce ninguna acción.
- BAR: el rango del eje x se fija de 0 a *n+1* donde *n* es el número de elementos en ΣDAT. El rango de valores de y se basa en el contenido de ΣDAT. Los valores mínimo y máximo de y se determinan de manera que el eje x se incluye siempre en el gráfico.
- HISTOGRAM: similar a BAR.
- SCATTER: ajusta rangos en los ejes x y y de acuerdo con el contenido de las variables independientes y dependientes en ΣDAT.

INFO (12)
La función INFO es interactiva solamente (es decir, no puede ser programada). Cuando se presiona la tecla correspondiente del menú proporciona la información sobre el actual traza parámetros.

EQ (3)
El nombre de la variable EQ es reservado por la calculadora para almacenar la ecuación actual en diagramas o la solución a las ecuaciones (ver, por ejemplo, el capítulo 6). La tecla de menú etiquetada EQ puede ser utilizada como si usted tiene su menú de variables disponible, por ejemplo, si usted presiona [EQ] listará el contenido actual de esa variable.

ERASE (4)
La función ERASE borra el contenido actual de la ventana de los gráficos. En la programación, puede ser utilizado para asegurarse de que la ventana de los gráficos se ha despejado antes de trazar un nuevo gráfico.

DRAX (5)
La función DRAX dibuja los ejes en el diagrama actual, si hay alguno visible.

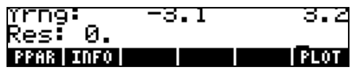
DRAW (6)
La función DRAW dibuja el diagrama definido en PPAR.

El menú PTYPE bajo PLOT (1)
El menú PTYPE enumera el nombre de todos los tipos de diagramas de dos dimensiones preprogramados en la calculadora. El menú contiene las siguientes teclas del menú:

Estas llaves corresponden a los tipos del diagrama *Function, Conic, Polar, Parametric, Truth*, y *Diff Eq*, presentado anterior. Presionar una de estas teclas del menú, mientras que se escribe un programa, pondrá la función correspondiente en el programa. Presione NXT PLOT para conseguir de nuevo el menú PLOT principal.

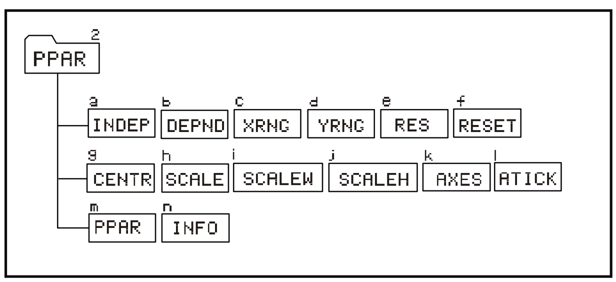
El menú PPAR (2)

El menú PPAR enumera las diversas opciones en la variable PPAR según lo indicado por las teclas del menú. Presione NXT para moverse a los menús siguientes:



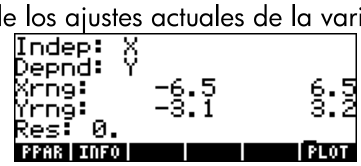
Nota: las funciones SCALE demostrado aquí representan realmente SCALE, SCALEW, SCALEH, en ese orden.

El diagrama siguiente ilustra las funciones disponibles en el menú PPAR. Las letras unidas a cada función en el diagrama se utilizan para los propósitos de la referencia en la descripción de las funciones demostradas abajo.



INFO (n) y PPAR (m)

Si Ud. presiona INFO, o escribe ↱ PPAR, mientras que en este menú, usted conseguirá un listado de los ajustes actuales de la variable PPAR, por ejemplo:



Esta información indica que X es la variable independiente (Indep), Y es la variable dependiente (Depnd), el rango del eje x alcanza de –6.5 a 6.5 (Xrng), el rango del eje y alcanza de –3.1 a 3.2 (Yrng). Una pieza de información en la pantalla, el valor de Res (resolución), determina el intervalo de la variable independiente usada para generar la grafica.

Las etiquetas de las teclas incluidas en el menú PPAR(2) representar los comandos que se pueden utilizar en programas. Estos comandos incluyen:

INDEP (a)

El comando INDEP especifica la variable independiente y rango en la gráfica. Estas especificaciones se almacenan como el tercer parámetro en la variable PPAR. El valor prefijado es ' X '. Los valores que se pueden asignar a la especificación variable independiente son:

- Un nombre de la variable, por ejemplo, 'Vel'
- Un nombre de variable en una lista, por ejemplo, { Vel }
- Un nombre de variable y un rango en una lista, por ejemplo, { Vel 0 20 }
- Un rango sin un nombre variable, por ejemplo., { 0 20 }
- Dos valores que representan un rango, por ejemplo., 0 20

En un programa, cualesquiera de estas especificaciones serán seguidas por el comando INDEP.

DEPND (b)

El comando DEPND especifica el nombre de la variable dependiente. Para el caso de diagramas TRUTH también especifica el rango de la gráfica. El valor prefijado es Y. El tipo de especificaciones para la variable de DEPND es igual a los de la variable INDEP.

XRNG (c) y YRNG (d)

El comando XRNG especifica el rango de la gráfica para el eje x, mientras que el comando YRNG especifica el rango de la gráfica para el eje y. La entrada para cualesquiera de estos comandos consiste de dos números que representan los valores mínimo y máximo de x o de y. Los valores de los rangos de los ejes x y y se almacenan como los pares ordenados (x_{min}, y_{min}) y (x_{max}, y_{max}) en los dos primeros elementos de la variable PPAR. Valores prefijados para x_{min} y x_{max} son -6.5 y 6.5, respectivamente. Valores prefijados para x_{min} y x_{max} son –3.1 y 3.2, respectivamente.

RES (e)
El comando RES (RESolution) especifica el intervalo entre los valores de la variable independiente al producir un diagrama específico. La resolución se puede expresar en términos de las unidades del usuario como número verdadero, o en términos de píxeles como número entero binario (números comenzando con #, por ejemplo., #10). La resolución se almacena como el cuarto artículo en la variable PPAR.

CENTR (g)
El comando CENTR toma como argumento el par ordenado (x,y) o un valor x, y ajusta los primeros dos elementos en la variable PPAR, i.e., (x_{min}, y_{min}) y (x_{max}, y_{max}), de modo que el centro del diagrama es (x,y) o (x,0), respectivamente.

SCALE (h)
El comando SCALE El comando SCALE determina la escala de la gráfica representada por el número de las unidades del usuario por marca del eje. La escala pre-selecta es 1 unidad de usuario por marca. Cuando se usa el comando SCALE, toma como argumentos dos números, x_{scale} y y_{scale}, representando las escalas horizontal y vertical nuevas. El efecto del comando SCALE es ajustar los parámetros (x_{min}, y_{min}) y (x_{max}, y_{max}) en PPAR para acomodar la escala deseada. El centro del diagrama se preserva.

SCALEW (i)
Dado un factor x_{factor}, el comando SCALEW multiplica la escala horizontal por ese factor. La W en SCALEW significa 'width' (ancho). La ejecución de SCALEW cambia los valores de x_{min} y x_{max} en PPAR.

SCALEH (j)
Dado un factor y_{factor}, el comando SCALEH multiplica la escala vertical por ese factor. La H en SCALEH significa 'height' (altura). La ejecución de SCALEW cambia los valores de y_{min} y y_{max} en PPAR.

Nota: Cambios introducidos usando SCALE, SCALEW, o SCALEH, puede ser utilizado para enfocar hacia adentro o enfocar hacia afuera en un diagrama.

ATICK (l)
El comando ATICK (Axes TICK mark, o marca de ejes) se utiliza para fijar las anotaciones de marcas en los ejes. El valor de entrada para el comando ATICK puede ser uno del siguiente:

- Un valor real x : fija las anotaciones para los ejes x y y a unidades x
- Una lista de dos valores reales { x y }: fija las anotaciones para los ejes x y y a unidades x y y, respectivamente.
- Un entero binario #n: ajusta las anotaciones de los ejes x y y a #n píxeles
- Una lista de dos números enteros binarios {#n #m}: fija las anotaciones en los ejes x y y a #n y #m píxeles, respectivamente.

AXES (k)
El valor de la entrada para el comando AXES consiste ya sea en par ordenado (x,y) o una lista {(x,y) *atick* "etiqueta eje x " "etiquta eje y "}. El parámetro *atick* representa la especificación de las anotaciones de las marcas según lo descrito arriba para el comando ATICK. El par ordenado representa el centro del diagrama. Si solamente un par ordenado se da como entrada a AXES, solamente se altera el origen de los ejes. El argumento del comando AXES, ya sea un par ordenado o una lista de valores, se almacena como el quinto parámetro en PPAR.

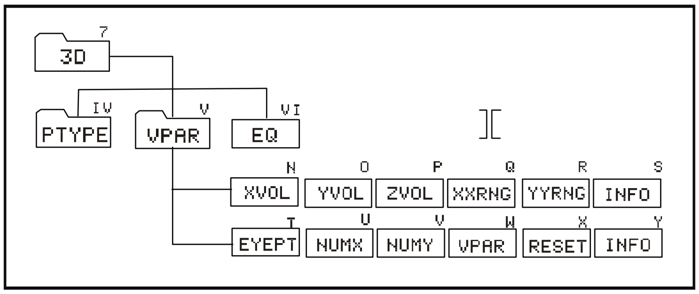
Para volver al menú PLOT, presione PLOT.

Presione NXT para alcanzar el segundo menú de PLOT.

RESET (f)
Esta tecla reajustará los parámetros del diagrama a los valores prefijados.

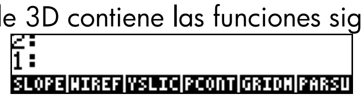
El menú 3D dentro de PLOT (7)

El menú 3D contiene dos sub-menus, PTYPE y VPAR, y una variable, EQ. Conocemos ya con el significado de EQ, por lo tanto, nos concentraremos en el contenido de los menús PTYPE y VPAR. El diagrama abajo demuestra la ramificación del menú 3D.



El menú PTYPE dentro de 3D (IV)

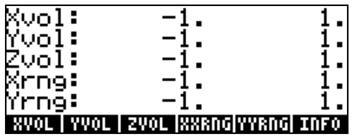
El menú PTYPE dentro de 3D contiene las funciones siguientes:

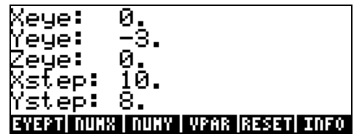


Estas funciones corresponden a las opciones de los gráficos *Slopefield, Wireframe, Y-Slice, Ps-Contour, Gridmap* y *Pr-Surface* presentado anteriormente en este capítulo. Presionar una de estas teclas de menú, mientras que escribe un programa, pondrá la referencia a la función correspondiente en el programa. Presione NXT 3D para conseguir de nuevo el menú principal 3D.

El menú VPAR dentro de 3D (V)

El VPAR variable representa parámetros de volumen (Volume PARameters), refiriendo a un paralelepípedo en el espacio dentro del cual el gráfico tridimensional de interés se construye. Cuando uno presiona [VPAR] en el menú 3D, usted conseguirá las funciones siguientes. Presione NXT para moverse al menú siguiente:





Después, describimos el significado de estas funciones:

<u>INFO (S) y VPAR (W)</u>
Cuando Ud. presiona INFO (S) usted consigue la información demostrada en la pantalla lateral izquierda anterior. Los rangos en *Xvol*, *Yvol*, y *Zvol* describen el tamaño del paralelepípedo en el espacio donde el gráfico será generado. *Xrng* y *Yrng* describir el rango de valores de x y de y, respectivamente, como variables independientes en el plano x-y que serán utilizadas para generar las funciones de la forma z = f(x,y).

Presione NXT e INFO (Y) para obtener la información en la pantalla lateral derecha tirada arriba. Éstos son el valor de la localización del punto de vista para el gráfico tridimensional (X_{eye}, Y_{eye}, Z_{eye}), y del número de pasos en x y y para generar una rejilla para los diagramas de superficies en el espacio.

<u>XVOL (N), YVOL (O), y ZVOL (P)</u>
Estas funciones toman como entrada un valor mínimo y un valor máximo y se utilizan para especificar el tamaño del paralelepípedo donde el gráfico será generado (el paralelepípedo de la visión). Estos valores se almacenan en la variable VPAR. Los valores prefijados para los rangos XVOL, YVOL, y ZVOL son de –1 a 1.

<u>XXRNG (Q) y YYRNG (R)</u>
Estas funciones toman como entrada un valor mínimo y un valor máximo y se utilizan para especificar los rangos de las variables x y y para generar funciones z = f(x,y). El valor prefijado de los rangos XXRNG y YYRNG será igual que los de XVOL y de YVOL.

<u>EYEPT (T)</u>
La función EYEPT toma como valores de entrada los números reales x, y, z que representan la localización del punto de vista para un gráfico tridimensional. El punto de vista es un punto en el espacio desde donde se

observa el gráfico tridimensional. Cambiando el punto de vista producirá diversas vistas del gráfico. La figura siguiente ilustra la idea del punto de vista con respecto al espacio gráfico real y de su proyección en el plano de la pantalla.

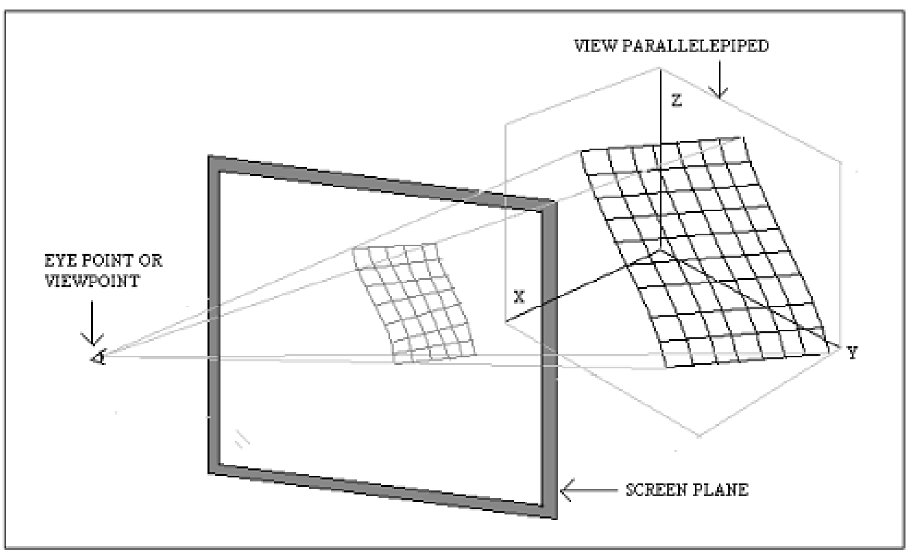
<u>NUMX(U) y NUMY (V)</u>
Las funciones NUMX y NUMY se utilizan para especificar el número de puntos o de pasos a lo largo de cada dirección que se utilizará en la generación de la rejilla bajo la cual se obtendrán los valores de z = f(x,y).

<u>VPAR (W)</u>
Esto es solamente una referencia a la variable VPAR.

<u>RESET (X)</u>
Reajusta parámetros en pantalla a sus valores prefijados.

Presione NXT 3D para volver al menú 3D.

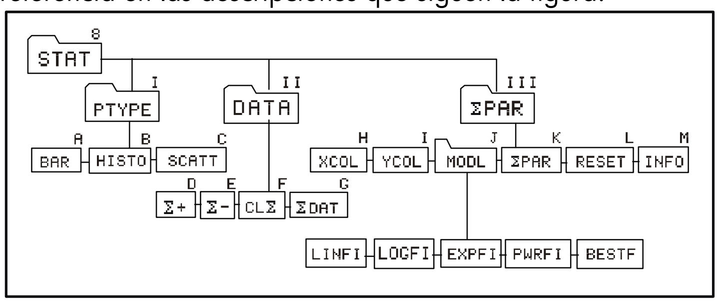
Presione PLOT para volver al menú PLOT.



El menú STAT dentro de PLOT

El menú STAT proporciona el acceso a los diagramas relacionados con el análisis estadístico. Dentro de este menú encontramos los menús siguientes::

El diagrama abajo demuestra la ramificación del menú STAT dentro de PLOT. Los números y las letras que acompañan cada función o menú se utilizan para la referencia en las descripciones que siguen la figura.



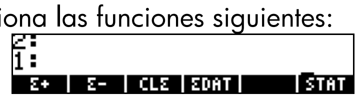
El menú PTYPE dentro STAT (I)

El menú de PTYPE proporciona las funciones siguientes:

Estas llaves corresponden a los tipos del diagrama *Bar (A), Histogram (B),* y *Scatter(C)*, presentado en un capítulo anterior. Presionando una de estas teclas de menú, mientras se escribe un programa, pondrá la referencia a la función correspondiente en el programa. Presione STAT para conseguir de nuevo el menú del STAT.

El menú DATA dentro de STAT (II)

El menú DATA proporciona las funciones siguientes:



Las funciones enumeradas en este menú se utilizan para manipular la matriz estadística ΣDAT. Las funciones Σ+ (D) y Σ- (E), agregan o quitan filas de datos de la matriz ΣDAT. CLΣ (F) despeja la matriz ΣDAT (G), y la tecla denominada ΣDAT se utiliza como referencia para los usos interactivos. Más detalles en el uso de estas funciones fueron presentados en un capítulo anterior en usos estadísticos. Presione STAT para volver al menú STAT.

El menú ΣPAR dentro de STAT (III)

El menú ΣPAR proporciona las funciones siguientes:

INFO (M) y ΣPAR (K)

La tecla INFO en ΣPAR proporciona la información mostrada en la pantalla anterior. La información enumerada en la pantalla se contiene en la variable ΣPAR. Los valores mostrados son los valores prefijados para las columnas x y y, intercepto y pendiente de un modelo de ajuste de datos, y el tipo de modelo que se ajustará a los datos contenidos en ΣDAT.

XCOL (H)

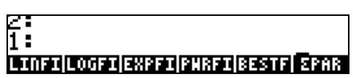
El comando XCOL se utiliza para indicar cuáles de las columnas ΣDAT, si hay más de una, es la columna de la x o variable independiente.

YCOL (I)

El comando YCOL se utiliza para indicar cuáles de las columnas ΣDAT, si hay más de una, es la columna de la y o variable dependiente.

MODL (J)

El comando MODL se refiere al modelo que se seleccionará para ajustar los datos en ΣDAT, si se implementa un ajuste de datos. Para ver qué opciones están disponibles, presione MODL. Usted conseguirá el menú siguiente:



Estas funciones corresponden al ajuste lineal, ajuste logarítmico, ajuste exponencial, ajuste de potencia, o el mejor ajuste posible. El ajuste de los datos se describe más detalladamente en el capítulo sobre estadística. Presione ΣPAR para volver al menú ΣPAR.

ΣPAR (K)
ΣPAR es solamente una referencia a la variable ΣPAR para uso interactivo.

RESET (L)
Esta función reajusta el contenido de ΣPAR a sus valores prefijados.

Presione NXT STAT para volver al menú del STAT. Presione [PLOT] para volver al menú principal PLOT.

El menú FLAG dentro de PLOT
El menú FLAG es realmente interactivo, de modo que usted pueda seleccionar cualesquiera de las opciones siguientes:

- AXES: cuando está seleccionada, se muestran los ejes si son visibles dentro del área o volumen del diagrama.
- CNCT: cuando está seleccionada, se produce un diagrama con los puntos individuales conectados por líneas.
- SIMU: cuando está seleccionado, si se va a trazar más de una gráfica en el mismo sistema de ejes, traza todos los gráficos simultáneamente

Presione PLOT para volver al menú PLOT.

Generación de diagramas con programas

Dependiendo de si se trata de un diagrama bidimensional definido por una función, por datos en la matriz ΣDAT, o por una función tridimensional, usted necesita crear las variables PPAR, ΣPAR, y/o VPAR antes de generar un diagrama en un programa. Los comandos demostrados en la sección anterior le ayudarán a crear tales variables.

A continuación, describimos el formato general para las variables necesarias para producir los diversos tipos de diagramas disponibles en la calculadora

Gráficos de dos dimensiones

Los gráficos de dos dimensiones generados por funciones, a saber, *Function, Conic, Parametric, Polar, Truth* y *Differential Equation*, usan PPAR con el formato:

{ (x_{min}, y_{min}) (x_{max}, y_{max}) indep res axes ptype depend }

Los gráficos de dos dimensiones generados de datos en la matriz estadística ΣDAT, a saber, *Bar, Histogram,* y *Scatter*, usan la variable ΣPAR con el formato siguiente:

{ x-column y-column slope intercept model }

mientras que al mismo tiempo usan PPAR con el formato demostrado anteriormente.

El significado de los diversos parámetros en PPAR y ΣPAR fueron presentados en la sección anterior.

Gráficos tridimensionales

Los gráficos tridimensionales disponibles, a saber, opciones *Slopefield, Wireframe, Y-Slice, Ps-Contour, Gridmap* y *Pr-Surface*, usan la variable VPAR con el formato siguiente:

{x_{left}, x_{right}, y_{near}, y_{far}, z_{low}, z_{high}, x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}, x_{eye}, y_{eye}, z_{eye}, x_{step}, y_{step}}

Estos pares de valores de x, y, z, representan lo siguiente:

- dimensiones del paralelepípedo de vista (x_{left}, x_{right}, y_{near}, y_{far}, z_{low}, z_{high})
- Rango de las variables independientes x,y (x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max})
- Localización del punto de vista (x_{eye}, y_{eye}, z_{eye})
- Número de pasos en las direcciones x,y (x_{step}, y_{step})

Los gráficos tridimensionales también requieren la variable PPAR con los parámetros demostrados arriba.

La variable EQ

Todos los diagramas, excepto aquellos basados en la matriz ΣDAT, también requieren que usted defina la función o las funciones que se trazarán almacenando las expresiones o las referencias a esas funciones en la variable EQ.

En resumen, producir un diagrama en un programa que usted necesita cargar EQ, si se requiere. Entonces carga PPAR, PPAR y ΣPAR, o PPAR y VPAR. Finalmente, utilizar el nombre del tipo apropiado del diagrama: FUNCTION, CONIC, POLAR, PARAMETRIC, TRUTH, DIFFEQ, BAR, HISTOGRAM, SCATTER, SLOPE, WIREFRAME, YSLICE, PCONTOUR, GRIDMAP, o PARSURFACE, para producir su diagrama.

Ejemplos de diagramas interactivos usando el menú PLOT

Entender mejor la manera que un programa trabaja con los comandos y variables en PLOT, intente los ejemplos siguientes del uso interactivo de los diagramas con el menú PLOT.

Ejemplo 1 – Un diagrama de función:

← USER F3	Activar menú PLOT (*)
PTYPE FUNCT	Seleccionar FUNCTION como tipo
'√r' ENTER ← EQ	Almancenar función '√r' en EQ
PPAR	Mostrar parámetros del diagrama
ALPHA ← R ENTER INDEP	Definir 'r' como la variable indep.
ALPHA ← S ENTER DEPND	Definir 's' como variable depend.
1 +/- SPC 10 XRNG	Definir (-1, 10) como el rango x
1 +/- SPC 5 YRNG NXT	Definir (-1, 5) como el rango y
{ (0,0) {.4 .2} "Rs" "Sr"}	Lista de definición de ejes
AXES	Definir centro, marcas, etiquetas
NXT PLOT	Regresar al menú PLOT
ERASE DRAX NXT LABEL	Borrar gráfica, crear ejes y etiquetas
NXT DRAW	Dibujar diagrama, mostrar figura
EDIT NXT MENU	Remueve etiquetas del menú
NXT NXT PICT CANCL	Regresar a pantalla normal

(*) Menú PLOT disponible a través de la tecla de usuario F3 según lo demostrado anteriormente en este capítulo.

Ejemplo 2 - Un diagrama paramétrico (use RAD para los ángulos):

← USER F3	Activar menú PLOT
PTYPE PARAM	Seleccionar PARAMETRIC como tipo
{ 'SIN(t)+i*SIN(2*t)' } ENTER	Definir función compleja X+iY
← EQ	Almancenar función compleja en EQ
PPAR	Mostrar parámetros del diagrama
{t 0 6.29} ENTER INDEP	Definir 't' como indep. variable
ALPHA Y ENTER DEPND	Definir 'Y' como variable depend.
2.2 +/- SPC 2.2 XRNG	Definir (-2.2,2.2) como el rango x
1.1 +/- SPC 1.1 YRNG NXT	Definir (-1.1,1.1) como el rango y
{ (0,0) {.4 .2} "X(t)" "Y(t)"} ENTER	Lista de definición de ejes
AXES	Definir centro, marcas, etiquetas
NXT PLOT	Regresar al menú PLOT
ERASE DRAX NXT LABEL	Borrar gráfica, crear ejes y etiquetas
NXT DRAW	Dibujar diagrama, mostrar la figura
EDIT NXT MENU NXT NXT PICT CANCL	Completar diagrama

Ejemplo 3 – Un diagrama polar

← USER F3	Activar menú PLOT
PTYPE POLAR	Seleccionar POLAR como tipo
'1+SIN(θ)' ENTER ← EQ	Función r = f(θ) en EQ
PPAR	Mostrar parámetros del diagrama
{ θ 0 6.29} ENTER INDEP	Definir 'θ' como la variable indep.
ALPHA Y ENTER DEPND	Definir 'Y' como la variable depend.
3 +/- SPC 3 XRNG	Definir (-3,3) como el rango x
0.5 +/- SPC 2.5 YRNG NXT	Definir (-0.5,2.5) como el rango y
{ (0,0) {.5 .5} "x" "y"} ENTER	Lista de definición de ejes
AXES	Definir centro, marcas, etiquetas
NXT PLOT	Regresar al menú PLOT
ERASE DRAX NXT LABEL	Borrar gráfica, crear ejes y etiquetas
NXT DRAW	Dibujar diagrama, mostrar la figura
EDIT NXT MENU	Remover etiquetas de menú
NXT NXT PICT CANCL	Regresar a pantalla normal

De estos ejemplos observamos un patrón para la generación interactiva de un gráfico de dos dimensiones a través el menú PLOT:

1 – Seleccione PTYPE.
2 – Almacenar la función para trazar en variable EQ (usar el formato apropiado, i.e., 'X(t)+iY(t)' para PARAMETRIC).
3 – Incorporar el nombre (y rango, si es necesario) de variables independientes y dependientes
4 – Incorporar las especificaciones de los ejes como una lista { center atick x-label y-label }
5 – Use ERASE, DRAX, LABEL, DRAW para producir un gráfico con los ejes completamente etiquetados.

Este mismo procedimiento se puede utilizar para producir diagramas con un programa, excepto que, en este caso, usted necesita agregar la instrucción PICTURE después de la función DRAW para recobrar el gráfico a la pantalla.

Ejemplos de diagramas generados con programas

En esta sección demostramos cómo programar la generación de gráficos en los tres ejemplos pasados. Active el menú PLOT antes de que usted comience a escribir el programa para facilitar la escritura de las instrucciones de gráficas (← USER F3).

Ejemplo 1 - Un diagrama de función. Incorporar el programa siguiente:

`«`	Comenzar programa
`{PPAR EQ} PURGE`	Borrar PPAR y EQ actuales
`'√r' STEQ`	Almancenar '√r' en EQ
`'r' INDEP`	Cambie indep. variable a 'r'
`'s' DEPND`	Cambie depend. variable a 's'
`FUNCTION`	Seleccionar FUNCTION como tipo
`{ (0.,0.) {.4 .2}`	
`"Rs" "Sr" } AXES`	Información de ejes
`-1. 5. XRNG`	Establecer rango de x
`-1. 5. YRNG`	Establecer rango de y
`ERASE DRAW DRAX LABEL`	Borrar y trazar diagrama, ejes, etc.
`PICTURE »`	Mostrar gráficos en pantalla

Almacenar el programa en variable PLOT1. Para activarlo, presione VAR, si es necesario, después presione PLOT1.

Ejemplo 2 - Un diagrama paramétrico. Incorporar el programa siguiente:

«	Comenzar programa
`RAD {PPAR EQ} PURGE`	Cambiar a radianes, borrar
`'SIN(t)+i*SIN(2*t)' STEQ`	Almancenar 'X(t)+iY(t)' en EQ
`{ t 0. 6.29} INDEP`	Variable indep. es 'r'
`'Y' DEPND`	Cambie depend. variable a 'Y'
`PARAMETRIC`	Seleccionar PARAMETRIC como tipo
`{ (0.,0.) {.5 .5} "X(t)"`	
`"Y(t)" } AXES`	Información de ejes
`-2.2 2.2 XRNG`	Establecer rango de x
`-1.1 1.1 YRNG`	Establecer rango de y
`ERASE DRAW DRAX LABEL`	Borrar y trazar diagrama, ejes, etc.
`PICTURE`	Mostrar gráficos en pantalla
»	Terminar programa

Almacene el programa en variable PLOT2. Para activarlo, presione VAR, si es necesario, después presione PLOT2.

Ejemplo 3 - Un diagrama polar. Incorporar el programa siguiente:

«	Comenzar programa
`RAD {PPAR EQ} PURGE`	Radianes, borrar variables.
`'1+SIN(θ)' STEQ`	Almancenar 'f(θ)' en EQ
`{ θ 0. 6.29} INDEP`	Indep. var. es 'θ'
`'Y' DEPND`	Cambie depend. variable a 'Y'
`POLAR`	Seleccionar POLAR como tipo
`{ (0.,0.) {.5 .5}`	
`"x" "y"} AXES`	Información de ejes
`-3.  3. XRNG`	Establecer rango de x
`-.5  2.5 YRNG`	Establecer rango de y
`ERASE DRAW DRAX LABEL`	Borrar y trazar diagrama, ejes, etc.
`PICTURE`	Mostrar gráficos en pantalla
»	Terminar programa

Almacene el programa en la variable PLOT3. Para activarlo, presione VAR, si es necesario, después presione PLOT3.

Estos ejercicios, que ilustran el uso de las instrucciones del menú PLOT en programas, apenas rasguñan la superficie de la programación de diagramas. Se invita al lector a intentar sus propios ejercicios en la programación de diagramas.

Comandos de dibujo para el uso en la programación

Usted puede dibujar figuras directamente en la ventana de los gráficos con programas que usan los comandos contenidos en el menú PICT, accesible con ← PRG NXT PICT. Las funciones disponibles en este menú son las siguientes. Presione NXT para moverse al siguiente menú:

Obviamente, los comandos LINE, TLINE, y BOX, realizan las mismas operaciones que sus contrapartes interactivas, dada la entrada apropiada. Éstas y las otras funciones en el menú PICT se refieren a las ventanas de los gráficos cuyos rangos en x y y se determinan en la variable PPAR, según lo demostrado anteriormente para diversos tipos de gráficos. Las funciones en el menú PICT se describen después:

PICT

Esta tecla se refiere a una variable llamada PICT que almacena el contenido actual de la ventana de los gráficos. Este nombre de variable, sin embargo, no se puede colocar entre apóstrofes, y puede almacenar solamente objetos de los gráficos. En ese sentido, PICT es diferente a las otras variables de la calculadora.

PDIM

La función PDIM toma como entrada ya sean dos pares ordenados (x_{min},y_{min}) (x_{max},y_{max}) o dos números enteros binarios #w y #h. El efecto de PDIM es sustituir el contenido actual de PICT por una pantalla vacía. Cuando el argumento es (x_{min},y_{min}) (x_{max},y_{max}), estos valores se convierten en el rango de las coordenadas de usuario en PPAR. Cuando los argumentos son #w y #h, los rangos de las coordenadas de usuario en PPAR no se cambian, pero el tamaño del gráfico cambia a #h × #v píxeles.

PICT y la pantalla de los gráficos

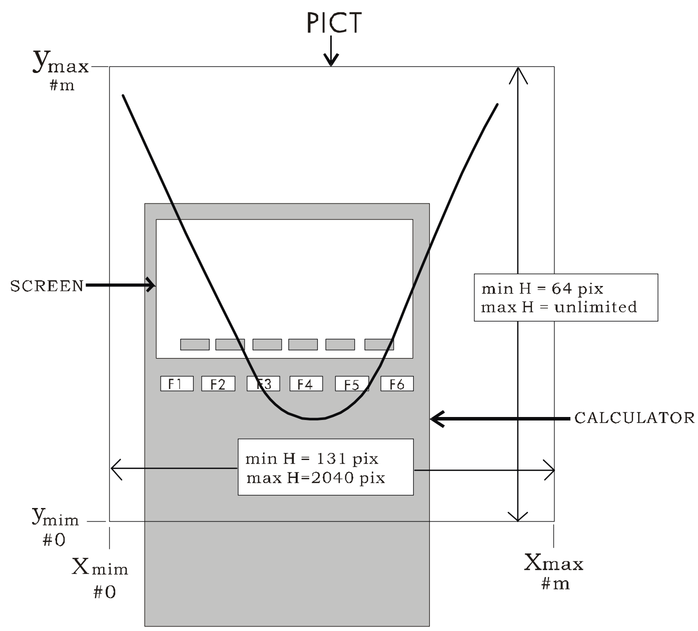
PICT, el área de almacenamiento para el gráfico actual, se puede describir como un gráfico de dos dimensiones con un tamaño mínimo de 131 píxeles de ancho y 64 píxeles de altura. La anchura máxima de PICT es 2048 píxeles, sin restricción en la altura máxima. Un píxel es cada de los puntos en la pantalla de la calculadora en la cual puede ser encendido (oscuro) o apagado (claro) para producir texto o gráficos. La pantalla de la calculadora tiene 131 píxeles de ancho y 64 píxeles de altura, es decir, el tamaño mínimo para PICT. Si su PICT es más grande que la pantalla, el gráfico de PICT se puede describir como un dominio de dos dimensiones que se pueda deslizar a través de la pantalla de la calculadora, según se ilustra en el diagrama mostrado más adelante.

LINE

Este comando toma como entrada dos pares ordenados (x_1,y_1) (x_2, y_2), o dos pares de coordenadas de píxel $\{\#n_1\ \#m_1\}$ $\{\#n_2\ \#m_2\}$. El comando traza la línea entre esas coordenadas.

TLINE

Este comando (inglés, Toggle LINE) toma como entrada dos pares ordenados (x_1,y_1) (x_2, y_2), o dos pares de coordenadas de píxel $\{\#n_1\ \#m_1\}$ $\{\#n_2\ \#m_2\}$. El comando traza la línea entre esas coordenadas, cambiando el estado de los píxeles en la trayectoria de la línea.



BOX

Este comando toma como entrada dos pares ordenados (x_1,y_1) (x_2, y_2), o dos pares de coordenadas de píxel {#n_1 #m_1} {#n_2 #m_2}. El comando dibuja la caja cuyas diagonales son representadas por los dos pares de coordenadas en la entrada.

ARC

Este comando se utiliza dibujar un arco. ARC toma como entrada los objetos siguientes:

- coordenadas del centro del arco como (x,y) en coordenadas de usuario o {#n, #m} en píxeles.
- radio del arco como r (coordenadas de usuario) o #k (píxeles).
- Ángulo inicial θ_1 y ángulo final θ_2.

PIX?, PIXON, y PIXOFF

Estas funciones toman como entrada las coordenadas del punto en coordenadas de usuario, (x,y), o en píxeles {#n, #m}.

- PIX? Comprueba si el píxel en la localización (x,y) o {#n, #m} está encendido.
- PIXOFF apaga el píxel en la localización (x,y) o {#n, #m}.
- PIXON enciende el píxel en la localización (x,y) o {#n, #m}.

PVIEW

Este comando toma como entrada las coordenadas de un punto como coordenadas de usuario (x,y) o píxeles {#n, #m}, y coloca el contenido de PICT con la esquina izquierda superior en la localización del punto especificado. Usted puede también utilizar una lista vacía como argumento, en cuyo caso el cuadro se centra en la pantalla. PVIEW no activa el cursor de los gráficos o el menú del cuadro. Para activar cualesquiera de esas características utilice la función PICTURE.

PX→C

La función PX→C convierte coordenadas de píxel {#n #m} a coordenadas de usuario (x,y).

C→PX

La función C→PX convierte coordenadas de usuario (x,y) a coordenadas de píxel {#n #m}.

Ejemplos de programación usando funciones de dibujo

En esta sección utilizamos los comandos descritos arriba para producir gráficos con programas. El listado del programa se proporciona en la ROM unida del disquete o del CD.

Ejemplo 1 - Un programa que utiliza comandos de dibujo

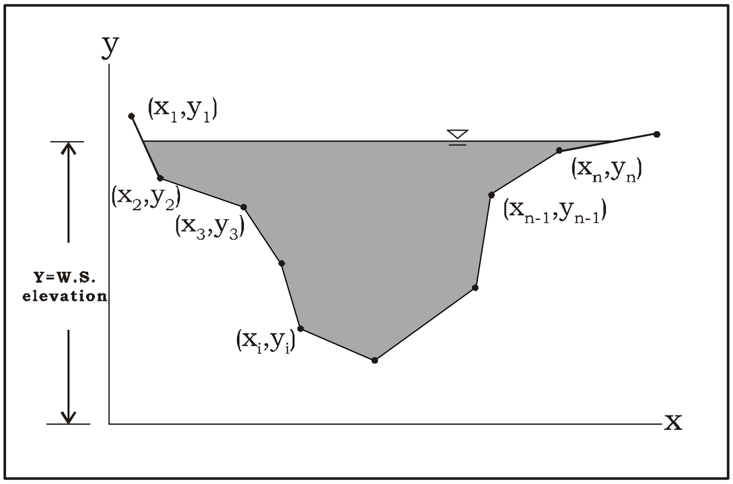
El programa siguiente produce un dibujo en la pantalla de los gráficos. (este programa no tiene ningún otro propósito que demostrar cómo utilizar comandos de la calculadora de producir dibujos en la exhibición.)

«	Comenzar programa
DEG	Seleccionar grados para ángulos
0. 100. XRNG	Establecer rango de x

0. 50. YRNG	Establecer rango de y
ERASE	Borrar figura
(5., 2.5) (95., 47.5) BOX	Trazar caja de (5,5) a (95,95)
(50., 50.) 10. 0. 360. ARC	Trazar círculo centro (50,50), r =10.
(50., 50.) 12. –180. 180. ARC	Trazar círculo centro (50,50), r= 12.
1 8 FOR j	Trazar 8 líneas en círculo
(50., 50.) DUP	Líneas centradas en (50,50)
‘12*COS(45*(j-1))’ →NUM	Calcula x, otro extremo en 50 + x
‘12*SIN(45*(j-1))’ →NUM	Calcula y, otro extremo en 50 + y
R → C	Convertir x y a (x,y), núm. complejo
+	Sumar (50,50) a (x,y)
LINE	Dibujar la línea
NEXT	Terminar lazo FOR
{ } PVIEW	Mostrar figura
»	

Ejemplo 2 - Un programa para trazar una sección transversal natural del río Este uso puede ser útil para determinar área y perímetros mojados de las secciones transversales naturales del río. Típicamente, se examina una sección transversal del río natural y se genera una serie de puntos, representando coordenadas x y con respecto a un sistema arbitrario de ejes coordenados. Estos puntos pueden ser trazados para producir un bosquejo de la sección transversal para una elevación dada de la superficie del agua. La figura abajo ilustra los términos presentados en este párrafo.

El programa, los disponibles en la ROM en el disquete o CD adjunto a su calculadora, utiliza cuatro sub-programas FRAME, DXBED, GTIFS, y INTRP. El programa principal, llamado XSECT, tomas como entrada una matriz de valores de x y de y, y la elevación de la superficie del agua Y (ver la figura abajo), en esa orden. El programa produce un gráfico de la sección transversal que indica los datos de entrada con los puntos en el gráfico, y demuestra la superficie libre en la sección representativa.



Se sugiere que usted crea un sub-directorio separado para almacenar los programas. Usted podría llamar el sub-directorio RIVER, puesto que estamos tratando con las secciones transversales irregulares de canales abiertos, típicas de los ríos.

Para ver el programa XSECT en acción, utilice los datos siguientes. Escríbalos como matrices de dos columnas, la primera columna con datos x y la segunda con datos y. Almacene las matrices en variables con nombres tales como XYD1 (datos x-y 1) y XYD2 (datos x-y 2). Para activar el programa coloque una de las matrices de datos en la pantalla, e.g., VAR XYD1, después escriba una elevación de la superficie del agua, digamos 4.0, y presione XSECT. La calculadora mostrará un bosquejo de la sección representativa con la superficie correspondiente del agua. Para salir de la pantalla del gráfico, presione ON.

Intentar los ejemplos siguientes:

XYD1 2 XSECT
XYD1 3 XSECT
XYD1 4 XSECT
XYD1 6 XSECT

Sea paciente al activar el programa XSECT. Debido al número relativamente alto de funciones gráficas usadas, no contando las iteraciones numéricas, el programa puede tomar un cierto tiempo para producir el gráfico (cerca de 1 minuto).

Datos 1

x	y
0.4	6.3
1.0	4.9
2.0	4.3
3.4	3.0
4.0	1.2
5.8	2.0
7.2	3.8
7.8	5.3
9.0	7.2

Datos 2

x	y
0.7	4.8
1.0	3.0
1.5	2.0
2.2	0.9
3.5	0.4
4.5	1.0
5.0	2.0
6.0	2.5
7.1	2.0
8.0	0.7
9.0	0.0
10.0	1.5
10.5	3.4
11.0	5.0

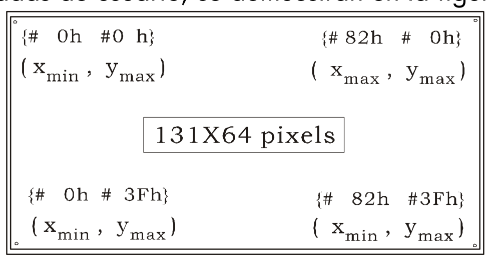
Nota: El programa FRAME, según se programó originalmente (ver disquete o CD ROM), no mantiene la escala apropiada del gráfico. Si usted desea mantener la escala apropiada, substituya FRAME con el programa siguiente:

```
« STOΣ MINΣ MAXΣ 2 COL→ DUP →COL DROP – AXL ABS AXL 20
/ DUP NEG SWAP 2 COL→ + →ROW DROP SWAP → yR xR « 131
DUP R→B SWAP yR OBJ→ DROP – xR OBJ→ DROP - / * FLOOR
R→B PDIM yR OBJ→ DROP YRNG xR OBJ→ DROP XRNG ERASE » »
```

Este programa mantiene el ancho de la variable en 131 píxeles - el tamaño mínimo de PICT en píxeles para el eje horizontal - y ajusta el número de píxeles en los ejes verticales para mantener una escala de 1:1 entre las hachas verticales y horizontales.

Coordenadas del píxel

La figura abajo demuestra los coordenadas gráficos para la pantalla (mínima) típica de 131×64 píxeles. Las coordenadas de los píxeles se miden de la esquina izquierda superior de la pantalla {# 0h # 0h}, la cuál corresponde a las coordenadas definidos por el usuario (x_{min}, y_{max}). Las coordenadas máximas en términos de píxeles corresponden a la esquina derecha más baja de la pantalla {# 82h #3Fh}, el cual en coordenadas de usuario es el punto (x_{max}, y_{min}). Las coordenadas de las dos otras esquinas, ambos en píxel así como en coordenadas de usuario, se demuestran en la figura.

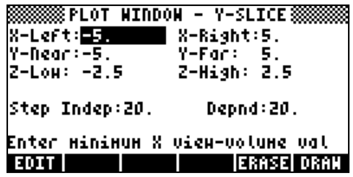


Animación de gráficas

Adjunto presentamos una manera de producir la animación de gráficas usando el tipo de diagrama Y-Slice. Suponga que usted desea animar la onda viajera, f(X,Y) = 2.5 sin(X-Y). Podemos tratar la X como el tiempo en la animación produciendo diagramas de f(X, Y) vs. Y para diversos valores de X. Para producir este gráfico, use lo siguiente:

- ← 2D/3D simultáneamente (en modo RPN). Seleccionar Y-Slice para TYPE. '2.5*SIN(X-Y)' para EQ. 'X' para INDEP. Presione NXT OK.

- ← WIN , simultáneamente (en modo RPN). Utilizar los valores siguientes:



- Presione ERASE DRAW. Dar un plazo de tiempo para que la calculadora genere todos los gráficos necesarios. Cuando estén listos, se mostrará una onda sinusoidal viajera en su pantalla.

Animación de una colección de gráficos

La calculadora proporciona la función ANIMATE para animar un número de gráficos que se han colocado en la pantalla. Usted puede generar un gráfico en la pantalla de los gráficos usando los comandos en los menús PLOT y PICT. Para colocar el gráfico generado en la pantalla, utilice PICT RCL. Cuando usted tiene *n* gráficos en niveles *n* a *1* de la pantalla, usted puede utilizar simplemente el comando *n* ANIMATE para producir una animación hecha de los gráficos que usted puso en la pantalla.

<u>Ejemplo 1 - Animación de una ondulación en una superficie del agua</u>

Como ejemplo, escriba el programa siguiente que genera 11 gráficos que demuestran un círculo centrado en el centro de la pantalla de los gráficos y que aumenta el radio por un valor constante en cada gráfico subsiguiente.

«	Comenzar programa
RAD	Cambiar a radianes
131 R→B 64 R→B PDIM	Ajustar PICT 131×64 píxel
0 100 XRNG 0 100 YRNG	Rangos x,y a 0-100
1 11 FOR j	Lazo con j = 1 .. 11
ERASE	Borrar PICT actual
(50., 50.) ‘5*(j-1)’ →NUM	Centros de círculos (50,50)
0 ‘2*π’ →NUM ARC	Dibujar centros r = 5(j-1)
PICT RCL	PICT a la pantalla
NEXT	Finalizar lazo FOR-NEXT

11 ANIMATE Animar
» Terminar programa

Almacenar este programa en un variable llamado PANIM (inglés, Plot ANIMation). Para activar el programa presione VAR (si es necesario) PANIM. Le tomará a la calculadora más de un minuto para generar los gráficos y para comenzar la animación. Por lo tanto, sea realmente paciente. Usted verá el símbolo del reloj de arena en la parte superior de la pantalla antes de producir la animación. La animación se asemeja a la ondulación producida por un guijarro que cae en la superficie del agua quieta, aparece en la pantalla. Para detener la animación, presionar ON.

Los 11 gráficos generados por el programa todavía están disponibles en la pantalla. Si usted desea recomenzar la animación, utilizar simplemente: 11 ANIMATE. (La función ANIMATE está disponible usando ← PRG NXT GROB NXT ANIMA). La animación será recomenzada. Presione ON para parar la animación una vez más. Note que el número 11 todavía será enumerado en el nivel 1 de la pantalla. Presione ◄ para borrar el número de la pantalla.

Suponga que usted desea guardar las figuras que componen esta animación en una variable. Usted puede crear una lista de estas figuras, llamémosle WLIST, usando:

1 1 ← PRG TYPE →LIST ' ALPHA ALPHA W L I S T ALPHA STO►

Presione VAR para recuperar su lista de variables. La variable WLIST será listada en el menú. Para animar esta lista de variables usted podría utilizar el programa siguiente:

«	Comenzar programa
WLIST	Lista WLIST en pantalla
OBJ→	Decomponer lista, nivel 1 = 11
ANIMATE	Comenzar la animación
»	Terminar programa

Almacene este programa en una variable llamada RANIM (Re-ANIMate).
Para activarlo, presione RANIM.

El programa siguiente animará los gráficos en WLIST hacia delante y hacia atrás:

«	Comenzar programa
WLIST DUP	Lista WLIST en pantalla, copia adicional
REVLIST +	Revertir orden, concatenar 2 listas
OBJ→	Decomponer lista, nivel 1 = 22
ANIMATE	Comenzar la animación
»	Terminar programa

Almacene este programa en una variable llamada RANI2 (Re-ANImate versión 2). Para activarlo, presione RANI2. La animación ahora simula una ondulación en la superficie del agua quieta que se refleja en las paredes de un tanque circular. Presione ON para detener la animación.

Ejemplo 2 - Animando trazas de diversas funciones de potencias

Suponga que usted desea animar las trazas de la función $f(x) = x^n$, n = 0, 1, 2, 3, 4, en el mismo sistema de ejes. Usted podría utilizar el programa siguiente:

«	Comenzar programa
RAD	Cambiar a radianes
131 R→B 64 R→B PDIM	PICT ajustada a 131×64 píxel
0 2 XRNG 0 20 YRNG	Ajustar rangos x y
0 4 FOR j	Lazo con j = 0,1,…,4
'X^j' STEQ	Almancenar 'X^j' en variable EQ
ERASE	Borrar PICT actual
DRAX LABEL DRAW	Dibujar ejes, etiquetas, funciones
PICT RCL	PICT a la pantalla
NEXT	Finalizar lazo FOR-NEXT
5 ANIMATE	Animar
»	

Almacene este programa en una variable llamada PWAN (inglés, PoWer function ANimation). Para activar el programa use VAR (si es necesario) PWAN. Usted verá la calculadora dibujar cada función individual de la energía antes de comenzar la animación en la cual las cinco funciones serán trazadas rápidamente una después de la otra. Para parar la animación, presione ON.

Más información sobre la función ANIMATE

La función ANIMATE según lo utilizado en los dos ejemplos anteriores utiliza como entrada los gráficos que se animarán y su número. Usted puede utilizar información adicional para producir la animación, tal como el intervalo del tiempo entre los gráficos y el número de las repeticiones de los gráficos. El formato general de la función ANIMATE en tales casos es el siguiente:

```
n-graphs   { n {#X #Y} delay rep }  ANIMATE
```

`n` representa el número de gráficos, `{#X #Y}` representa las coordenadas del píxel de la esquina derecha más baja del área que se trazará, `delay` es el número de segundos indicando un plazo entre los gráficos consecutivos en la animación, y `rep` es el número de las repeticiones de la animación.

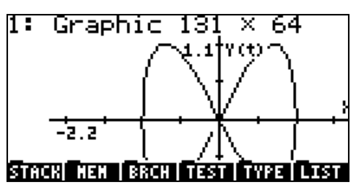
Objetos gráficos (GROBs)

La palabra GROB representa, en inglés, GRaphics Objects, u objetos gráficos, y se utiliza en el ambiente de la calculadora para representar una descripción píxel por píxel de una imagen que se ha producido en la pantalla. Por lo tanto, cuando una imagen se convierte en un GROB, se convierte en una secuencia de dígitos binarios (bits), es decir, valores de 0 y 1. Para ilustrar los GROBs y la conversión de imágenes a GROBs considere el ejercicio siguiente.

Cuando producimos un gráfico en la calculadora, el gráfico se convierte en el contenido de una variable especial llamada PICT. Así, para ver el último contenido de PICT, usted podría utilizar:

PICT RCL (← PRG NXT PICT PICT ← RCL).

El nivel 1 de la pantalla muestra la línea `Graphic 131×64` (si usa el tamaño de pantalla estándar) seguido por un bosquejo de la parte superior del gráfico. Por ejemplo,

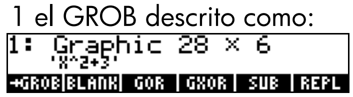


Si usted presiona ▼ entonces el gráfico contenido en el nivel 1 se demuestra en la representación gráfica de la calculadora. Presione CANCL para regresar a pantalla normal.

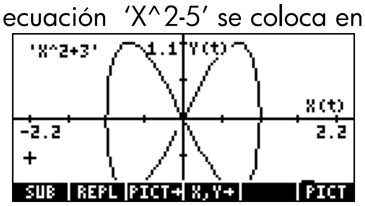
El gráfico en el nivel 1 todavía no está en formato de GROB, aunque es, por definición, un objeto gráficos. Para convertir un gráfico en la pantalla en un GROB, use: 3 ENTER ← PRG NXT GROB →GROB. Ahora tenemos la información siguiente en el nivel 1:

La primera parte de la descripción es similar a lo que teníamos originalmente, a saber, `Graphic 131×64`, pero ahora se expresa como `Graphic 13128 × 8`. Sin embargo, la representación gráfica ahora es substituida por una secuencia de ceros y unos que representan los píxeles del gráfico original. Así, el gráfico original según lo ahora convertido a su representación equivalente en bits.

Usted puede también convertir ecuaciones en GROBs. Por ejemplo, con el escritor de ecuaciones escriba la ecuación 'X^2+3' en el nivel 1 de la pantalla, y después presione 1 ENTER ← PRG NXT GROB →GROB . Usted ahora tendrá en el nivel 1 el GROB descrito como:



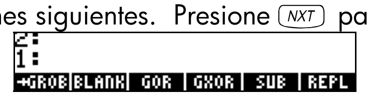
Como objeto gráfico, esta ecuación se puede ahora poner en la representación gráfica. Para recobrar la pantalla de gráficas presione ◄. Entonces, mueva el cursor a un sector vacío en el gráfico, y presione EDIT NXT NXT REPL. La ecuación 'X^2-5' se coloca en el gráfico, por ejemplo:



Así, los GROBs se puede utilizar para documentar gráficos poniendo ecuaciones, o texto, en la representación gráfica.

El menú GROB

El menú GROB, accesible a través de ← PRG NXT GROB →GROB, contiene las funciones siguientes. Presione NXT para moverse al menú siguiente:



→GROB

De estas funciones hemos utilizado ya SUB, REPL, (del menú EDIT de gráficas), ANIMATE [ANIMA], y →GROB. ([*PRG*] es simplemente una manera de volver al menú de programación.) Mientras usamos →GROB en los dos ejemplos anteriores usted pudo haber notado que utilizamos un 3 para convertir el gráfico a un GROB, mientras que usamos un 1 cuando convertimos la ecuación a un GROB. Este parámetro de la función →GROB indica el tamaño del objeto que se está convirtiendo a GROB como 0 ó 1 – para un objeto pequeño, 2 – mediano, y 3 – grande. Las otras funciones en el menú de GROB se describen a continuación.

BLANK

La función BLANK, con argumentos #n y #m, crea un objeto gráfico en blanco de achura y altura especificadas por los valores #n y #m, respectivamente. Esto es similar a la función PDIM en el menú GRAPH.

GOR

La función GOR (Graphics OR) tomas como entrada $grob_2$ (una blanco GROB), un conjunto de coordenadas, y $grob_1$, y produce la superposición de $grob_1$ sobre $grob_2$ (o PICT) comenzando en las coordenadas especificadas. Las coordenadas se pueden especificar como coordenadas de usuario (x,y), o píxeles {#n #m}. GOR utiliza la función OR para determinar el estado de cada píxel (es decir, encendido o apagado) en la región traslapada entre $grob_1$ y $grob_2$.

GXOR
La función GXOR (Graphics XOR) realiza la misma operación que GOR, pero usar XOR para determinar el estado final de píxeles en el área traslapada entre los objetos gráficos $grob_1$ y $grob_2$.

Nota: En GOR y GXOR, cuando *grob2* es substituido por PICT, no se produce ninguna salida. Para ver la salida usted necesita recobrar PICT a la pantalla usando ya sea PICT RCL o PICTURE.

→LCD
Toma un GROB especificado y lo exhibe en la pantalla de la calculadora comenzando en la esquina izquierda superior.

LCD→
Copia el contenido de la de la pantalla y del menú en a un GROB de 131 x 64 píxeles.

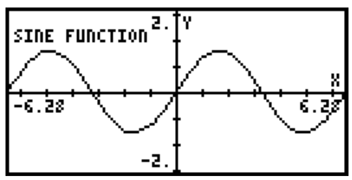
SIZE
La función SIZE, cuando se aplica a un GROB, muestra el tamaño del GROB en la forma de dos números. El primer número, mostrado en el nivel 2 de la pantalla, representa la anchura del objeto de los gráficos, y segundo, en el nivel 1 de la pantalla, muestra su altura.

Un ejemplo de un programa usando GROB
El programa siguiente produce el gráfico de la función del seno incluyendo un marco – dibujado con la función BOX – y un GROB para etiquetar el gráfico. Aquí está el listado del programa:

«	Comenzar programa
RAD	Cambiar a radianes
131 R→B 64 R→B PDIM	Pantalla a 131×64 píxeles
-6.28 6.28 XRNG –2. 2. YRNG	Ajuste rangos x y
FUNCTION	Seleccionar FUNCTION como tipo
'SIN(X)' STEQ	Almancenar la funcion sin en EQ
ERASE DRAX LABEL DRAW	Despejar, ejes, etiquetas, gráfico
(-6.28,-2.) (6.28,2.) BOX	Dibujar un marco

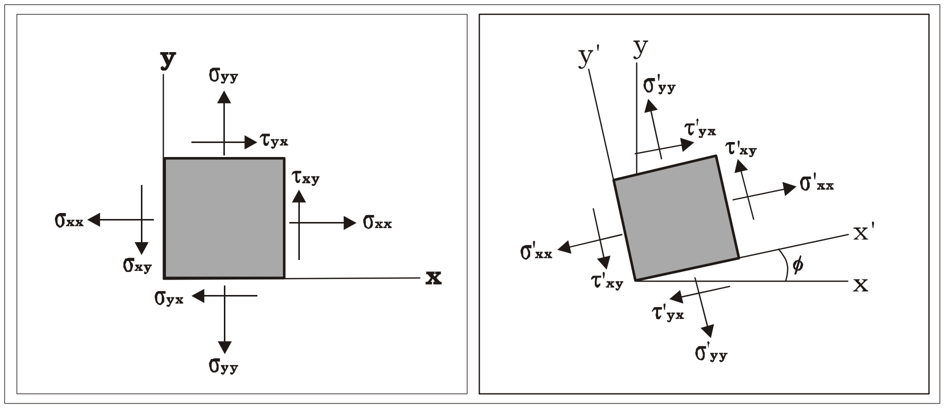
PICT RCL	PICT se pasa a la pantalla
"SINE FUNCTION"	Colocar etiqueta en pantalla
1 →GROB	Texto convertido a GROB
(-6., 1.5) SWAP	Coordenadas para el GROB
GOR	Combinar PICT con etiqueta GROB
PICT STO	Almacenar GROB con PICT
{ } PVIEW	Poner PICT a la pantalla
»	Terminar programa

Almacenar programa bajo el nombre GRPR (GROB PRogram). Presione GRPR para activar el programa. La salida lucirá:



Un programa con funciones de trazado y dibujo

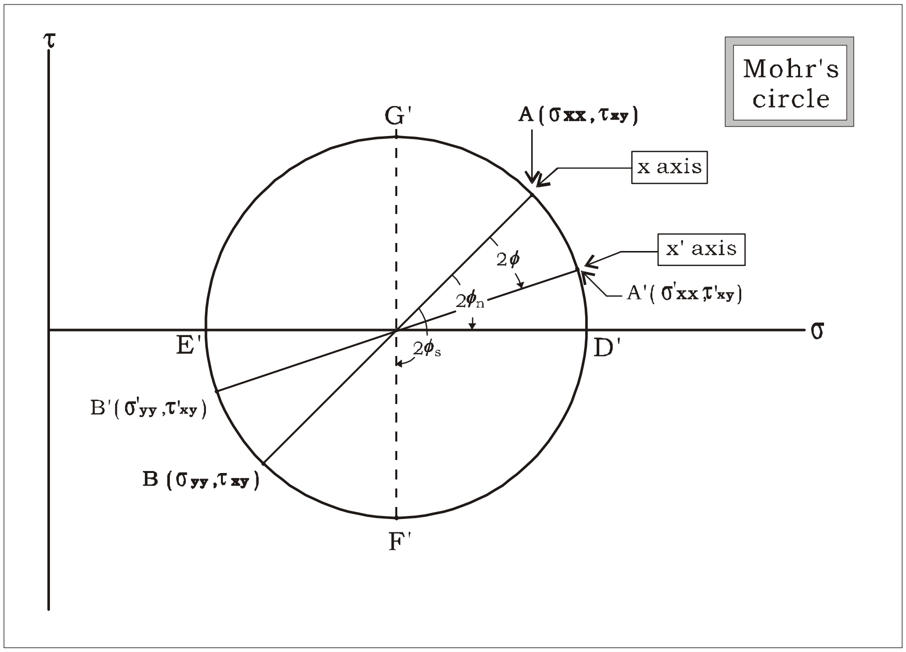
En esta sección desarrollamos un programa para producir, dibujar y etiquetar el círculo de Mohr para una condición dada de la tensión de dos dimensiones. La figura lateral izquierda abajo demuestra el estado dado de la tensión en dos dimensiones, con σ_{xx} y σ_{yy} siendo tensiones normales, y $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ siendo tensiones de corte. La figura lateral derecha demuestra el estado de tensiones cuando el elemento es rotado por un ángulo ϕ. En este caso, las tensiones normales son σ'_{xx} y σ'_{yy}, mientras que las tensiones de corte son τ'_{xy} y τ'_{yx}.



La relación entre el estado original de tensiones (σ_{xx}, σ_{yy}, τ_{xy}, τ_{yx}) y el estado de la tensión cuando los ejes se rotan a la izquierda cerca f (σ'_{xx}, σ'_{yy}, τ'_{xy}, τ'_{yx}), puede ser representado gráficamente por la construcción demostrada en la figura siguiente.

Para construir el círculo de Mohr utilizamos un sistema coordenado cartesiano con eje x el corresponder a las tensiones normales (σ), y eje y el corresponder a las tensiones de corte (τ). Localizar los puntos A(σ_{xx},τ_{xy}) y B (σ_{yy}, τ_{xy}), y dibujar el segmento AB. El punto C donde el segmento AB cruza el eje σ_n ser el centro del círculo. Notar que las coordenadas del punto C son ($\frac{1}{2}\cdot(\sigma_{yy} + \sigma_{xy})$, 0). Al construir el círculo a mano, usted puede utilizar un compás para trazar el círculo puesto que usted conoce la localización del centro C y de dos puntos, A y B.

El segmento AC representa el eje x en el estado original de la tensión. Si usted desea determinar el estado de la tensión para un sistema de ejes x'-y', rotado a la izquierda por un ángulo ϕ con respecto al sistema original de ejes x-y, trace el segmento A'B', centrado en C y rotado a la derecha cerca y ángulo 2ϕ con respecto al segmento AB. Las coordenadas del punto A' darán los valores (σ'_{xx},τ'_{xy}), mientras que los de B' dará los valores (σ'_{yy},τ'_{xy}).



La condición de la tensión para la cual la tensión de corte, τ'_{xy}, es cero, indicado por el segmento D'E', produce las llamadas tensiones principales, σ^P_{xx} (en el punto D') y σ^P_{yy} (en el punto E'). Para obtener las tensiones principales usted necesita rotar el sistema coordenado x'-y' por un ángulo ϕ_n, a la izquierda, con respecto al sistema x-y. En el círculo de Mohr, el ángulo entre los segmentos AC y D'C representa $2\phi_n$.

La condición de la tensión para la cual la tensión de corte, τ'_{xy}, es un máximo, es dado por el segmento F'G'. Bajo tales condiciones ambas tensiones normales, $\sigma'_{xx} = \sigma'_{yy}$, son iguales. T él pesca corresponder con caña a esta rotación es ϕ_s. El ángulo entre el segmento AC y el segmento F'C en la figura representa $2\phi_s$.

Programación modular

Para desarrollar el programa que trazará el círculo de Mohr dado un estado de la tensión, utilizaremos la programación modular. Básicamente, este acercamiento consiste en la descomposición del programa en un número de

subprogramas que se creen como variables separadas en la calculadora. Estos subprogramas entonces son ligados por un programa principal, al que llamaremos *MOHRCIRCL*. Primero crearemos un sub-directorio llamado MOHRC dentro del directorio HOME, y nos movemos en ese directorio para escribir los programas.
El paso siguiente es crear el programa y los subprogramas principales dentro del sub-directorio.

El programa principal MOHRCIRCL utiliza los subprogramas siguientes:

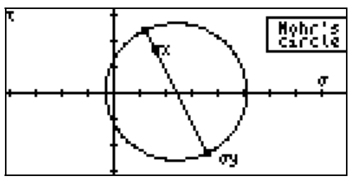
- INDAT: Solicita datos de entrada: σx, σy, τxy del usuario, produce una lista σL = {σx, σy, τxy} como salida.
- CC&r: Usa σL como entrada, produce σc = ½(σx+σy), r = radio del círculo de Mohr, ϕn = ángulo de las tensiones principales, como salida.
- DAXES: Usa σc y r como entrada, determina rangos de los ejes y dibuja los ejes para la construcción del círculo del Mohr
- PCIRC: Usa σc, r, y ϕn como entrada, dibuja Círculo de Mohr produciendo un diagrama PARAMETRIC
- DDIAM: Usa σL como entrada, dibuja el segmento AB (ver la figura del círculo de Mohr arriba), juntando los puntos de referencias de entrada en el círculo del Mohr
- σLBL: Usa σL como entrada, coloca etiquetas para identificar puntos A y B con las etiquetas "σx" y "σy".
- σAXS: Coloca las etiquetas "σ" y "τ" en los ejes x y y, respectivamente.
- PTTL: Coloca el título "Mohr's circle" en la figura.

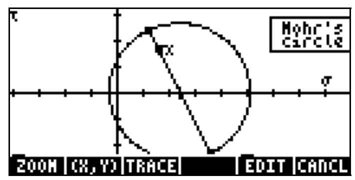
Funcionamiento del programa

Si usted mecanografió los programas en el orden demostrado arriba, usted tendrá en su sub-directorio MOHRC las variables siguientes: PTTL, σAXS, PLPNT, σLBL, PPTS, DDIAM. Presionando NXT se observan también: PCIRC, DAXES, ATN2, CC&r, INDAT, MOHRC. Antes de reordenar las variables, active el programa una vez presionando la tecla etiquetada MOHRC. Use lo siguiente:

MOHRC	Activa el programa MOHRCIRCL
2 5 ▼	Escriba σx = 25
7 5 ▼	Escriba σy = 75
5 0 ENTER	Escriba τxy = 50, finalice entrada de datos.

A este punto el programa MOHRCIRCL comienza a activar los subprogramas para producir la figura. Sea paciente. El círculo del Mohr que resulta se mostrará como en la figura de la izquierda.





Porque esta vista de PICT se invoca con la función PVIEW, no podemos conseguir ninguna otra información del diagrama además de la figura misma. Para obtener la información adicional fuera del círculo del Mohr, termine el programa presionando ON. Después, presione ◄ para recuperar el contenido de PICT en el ambiente de los gráficos. El círculo del Mohr ahora parece el cuadro a la derecha (véase arriba).

Presione las teclas de menú TRACE y (X,Y). En el fondo de la pantalla usted encontrará el valor de ϕ que corresponde al punto A(σx, τxy), i.e., ϕ `= 0, (2.50E1, 5.00E1).`

Presionar la tecla (►)para incrementar el valor de ϕ y ver el valor correspondiente de (σ'_{xx}, τ'_{xy}). Por ejemplo, para ϕ = 45°, tenemos los valores (σ'_{xx}, τ'_{xy}) = (1.00E2, 2.50E1) = (100, 25). El valor de σ'_{yy} será encontrado en ángulo 90° más adelante, i.e., donde ϕ = 45 + 90 = 135°. Presione la tecla ► hasta alcanzar ese valor de ϕ, encontramos (σ'_{yy}, τ'_{xy}) = (-1.00E-10,-2.5E1) = (0, 25).

Para encontrar los valores normales principales presione [◄] hasta que el cursor vuelve a la intersección del círculo con el lado positivo del eje σ. Los valores encontrados en ese punto son ϕ = 59°, y (σ'_{xx}, τ'_{xy}) = (1.06E2,-1.40E0) = (106, -1.40). Ahora, contábamos con el valor de τ'_{xy} = 0 en la localización de los ejes principales. Lo qué sucede es que, porque hemos limitado la resolución en la variable independiente a ser $\Delta\phi$ = 1°, esquivamos el punto real donde las tensiones de corte se convierten en cero. Si usted presiona [◄] una vez más, usted encuentra valores de ϕ = 58°, y (σ'_{xx}, τ'_{xy}) = (1.06E2,5.51E-1) = (106, 0.551). Lo qué esta información nos dice es que en alguna parte entre ϕ = 58° y ϕ = 59°, la tensión de corte, τ'_{xy}, se hace cero.

Para encontrar el valor real de ϕn, presione [ON]. Entonces escriba la lista que corresponde a los valores {σx σy τxy}, para este caso, será `{ 25 75 50 } [ENTER]`

Entonces, presione [CC&r]. El último resultado en la salida, 58.2825255885°, es el valor real de ϕn.

Un programa para calcular tensiones principales

El procedimiento seguido arriba para calcular ϕn, puede ser programado como sigue:

<u>*Programa PRNST:*</u>

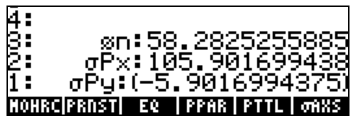
«	Comenzar prog. PRNST (PRiNcipal STresses)
INDAT	Escriba datos como para MOHRCIRC
CC&r	Calcular σc, r, y ϕn, como en MOHRCIRC
"ϕn" →TAG	Etiquetar ángulo para tensiones principales
3 ROLLD	Mover ángulo etiquetado del nivel 3
R→C DUP	Convertir σc y r a (σc, r), duplicar
C→R + "σPx" →TAG	Calcular tensión principal σPx, etiquetarla
SWAP C→R - "σPy" →TAG	Intercambiar, calcular σPy, etiquetarla.
»	Terminar programa PRNST

Para activar el programa:

[VAR] [PRNST]	Comenzar programa PRNST

2 5 ▼ Escriba σx = 25
7 5 ▼ Escriba σy = 75
5 0 ENTER Escriba τxy = 50, y terminar datos.

El resultado es:



Ordenar las variables en el sub-directorio

Activando el programa MOHRCIRCL por la primera vez produjo un par de nuevas variables, PPAR y EQ. Éstas son las variables Plot PARameter y EQuation necesario para trazar el círculo. Es sugiere que reordenamos las variables en el sub-directorio, de modo que los programas MOHRC y PRNST son las dos primeras variables en las etiquetas del menú. Esto puede ser logrado creando la lista { MOHRCIRCL PRNST } usando:

VAR ← {} MOHRC PRNST ENTER

Y entonces, pidiendo la lista usando:

← PRG MEM DIR ORDER.

Después que activamos la función ORDER, presione VAR. Usted ahora verá que tenemos los programas MOHRCIRCL y PRNST siendo las primeras dos variables en el menú, como esperamos.

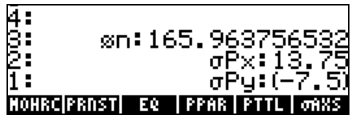
Un segundo ejemplo de los cálculos del círculo de Mohr

Determinar las tensiones principales para el estado de la tensión definido por σ_{xx} = 12.5 kPa, σ_{yy} = -6.25 kPa, y τ_{xy} = - 5.0 kPa. Dibujar el círculo de Mohr, y determine de la figura los valores de σ'_{xx}, σ'_{yy}, y τ'_{xy} si el ángulo ϕ = 35°.

Para determinar las tensiones principales utilice el programa PRNST, como sigue:

VAR PRNST Comenzar programa PRNST
1 2 . 5 ▼ Escriba σx = 12.5
6 . 2 5 +/- ▼ Escriba σy = -6.25
5 +/- ENTER Escriba τxy = -5, y terminar datos.

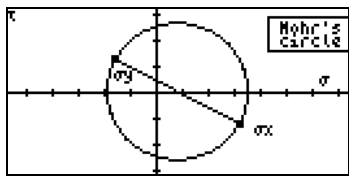
El resultado es:



Para dibujar el círculo de Mohr, utilizar el programa [MOHRC], como sigue:

[VAR] [MOHRC]	Comenzar programa PRNST
[1] [2] [.] [5] [▼]	Escriba σx = 12.5
[6] [.] [2] [5] [+/-] [▼]	Escriba σy = -6.25
5 [+/-] [ENTER]	Escriba τxy = -5, terminar entrada.

El resultado es:



Para encontrar los valores de las tensiones que corresponden a una rotación de 35° en el ángulo de la partícula tensionada, utilizamos:

[ON] [◄]	Pantalla clara, mostrar PICT en pantalla gráfica
[TRACE] [(X,Y)].	Mover cursor sobre el círculo mostrando ϕ y (x,y)

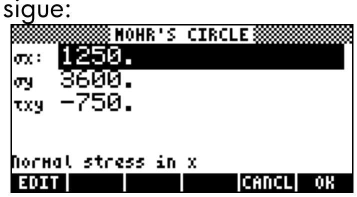
Después, presione [►] hasta leer ϕ = 35. Los coordenadas correspondientes son (1.63E0, -1.05E1), i.e., para ϕ = 35°, σ'_{xx} = 1.63 kPa, y σ'_{yy} = -10.5kPa.

Una forma interactiva para el círculo de Mohr

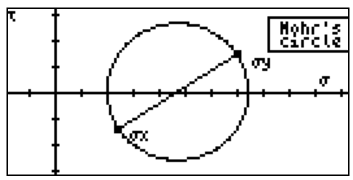
Para una manera más lujosa de escribir los datos de entrada, podemos sustituir el subprograma INDAT, con el programa siguiente que activa una forma interactiva:

```
« "MOHR'S CIRCLE" { { "σx:" "Normal stress in x" 0 }
{ "σy:" "Normal stress in y" 0 } { "τxy:" "Shear stress"
0} }   { } { 1 1 1 } { 1 1 1 }  INFORM DROP »
```

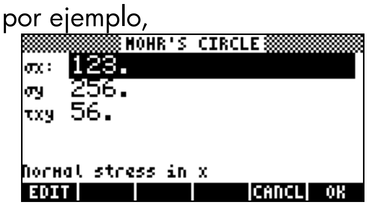
Con esta sustitución en el programa, al activarse MOHRC se producirá una forma interactiva como sigue:



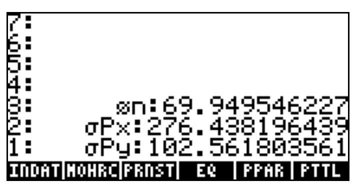
Presione OK para continuar la ejecución de programa. El resultado es la figura siguiente:



Dado que el programa INDAT se utiliza también para el programa PRNST (PRiNcipal STresses), activando ese programa en particular ahora utilizará una forma interactiva, por ejemplo,



El resultado, después de presionar OK, es lo que sigue:

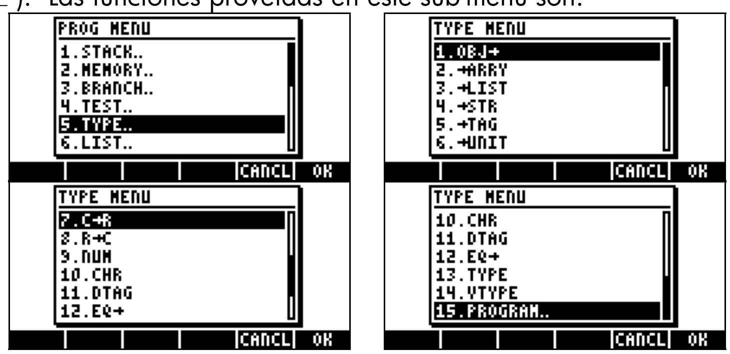


Capítulo 23
Cadenas de caracteres

Las cadenas de caracteres son objetos de la calculadora incluidos entre comillas. Estas cadenas de caracteres se manipulan como texto por la calculadora. Por ejemplo, la secuencia "FUNCION SENO", se puede transformar en un GROB (objeto gráfico), para rotular un gráfico, o se puede utilizar como salida en un programa. Los sistemas de caracteres escritos por el usuario como entrada a un programa se tratan como cadenas de caracteres. También, muchos objetos en la salida de los programas son también cadenas de caracteres.

Funciones de caracteres en el sub-menú TYPE

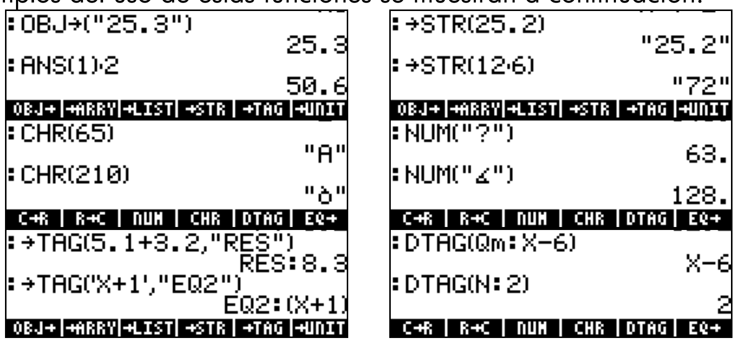
El sub-menú TYPE es accesible a través del menú PROG (programación, ← PRG). Las funciones proveídas en este sub-menú son:



Entre las funciones del sub-menú TYPE que se utilizan para manipular texto se encuentran:

OBJ→: Convierte texto al objeto por él representado
→STR: Convierte un objeto a una cadena de caracteres
→TAG: Rotula una cantidad
DTAG: Remueve el rótulo de una cantidad rotulada
CHR: Produce un carácter correspondiente al argumento
NUM: Produce el código correspondiente al primer carácter en texto

Los ejemplos del uso de estas funciones se muestran a continuación:



Concatenación de texto

Las cadenas de caracteres pueden ser concatenadas al usar el signo de adición +, por ejemplo:

La concatenación de textos es útil para crear salidas en los programas. Por ejemplo, la operación "YOU ARE " AGE + " YEAR OLD" crea la cadena de caracteres "YOU ARE 25 YEAR OLD", si el número 25 se almacena en la variable AGE.

El sub-menú CHARS

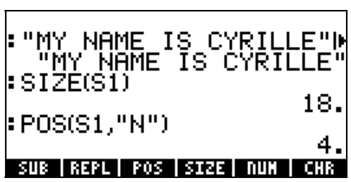
El sub-menú CHARS se accede a través del menú PRG (programación, ← PRG).

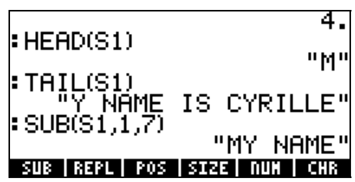
Las funciones proveídas en el sub-menú CHARS son las siguientes:

La operación de las funciones NUM, CHR, OBJ→, y →STR fue presentada anteriormente en este capítulo. También hemos visto las funciones SUB y REPL en lo referente a gráficos en un capítulo anterior. Las funciones SUB, REPL, POS, SIZE, HEAD, y TAIL tienen un efecto similar al de listas:

SIZE: número de una sub-secuencia en una secuencia (espacios incluidos)
POS: posición de la primera ocurrencia de un carácter en una secuencia
HEAD: primer carácter extraído de una secuencia
TAIL: remueve el primer carácter en una secuencia
SUB: extrae una sub-secuencia indicando el comienzo y el final de la misma
REPL: substituye los caracteres en una secuencia por una sub-secuencia que comienza en la posición dada
SREPL: substituye una sub-secuencia por otra sub-secuencia en una secuencia

Como ejemplos ejecútense los ejercicios siguientes: Almacenar la secuencia "MY NAME IS CYRILLE" en la variable S1. Utilizaremos esta secuencia para demostrar los ejemplos de las funciones en el menú CHARS





La lista de caracteres

La colección completa de caracteres disponibles en la calculadora es accesible con la secuencia ⓡ CHARS. Cuando usted destaca cualquier carácter, por ejemplo, el carácter de alimentación de línea ↵ , usted verá en el lado izquierdo de la última línea de la pantalla la secuencia de teclas para producir tal carácter (↱. en este caso) y el código numérico que corresponde al carácter (10 en este caso).

Los caracteres no definidos aparecen como un cuadrado oscuro en la lista de caracteres (▪) y para ellos se muestra la palabra (None) en la última línea de la pantalla, aún y cuando un código numérico existe para todos los caracteres. Los caracteres numéricos muestran el número correspondiente la pantalla.

Las letras muestran el código α (i.e., ALPHA) seguido por la letra correspondiente, por ejemplo, cuando usted destaca la letra M, se lee αM en la parte inferior izquierda de la pantalla, lo que indica el uso de las teclas ALPHA M . Por otro lado, m muestra la combinación α↰M, o ALPHA ↰ M .

Los caracteres griegos, por ejemplo σ, mostrará el código α↱S, o ALPHA ↱ S . Algunos caracteres, como la letra ρ, no tienen teclas asociadas con ellos. Por lo tanto, la única manera de obtener tales caracteres es a través de la selección del carácter en la lista de caracteres presionando después ECHO1 o ECHO.

Use ECHO1 para copiar un carácter a la pantalla y volver inmediatamente a la pantalla normal de la calculadora. Use ECHO para copiar una serie de caracteres a la pantalla. Para volver a la pantalla normal de la calculadora use ON .

Véase el apéndice D para más detalles en el uso de caracteres especiales. También, el apéndice G demuestra los atajos para producir caracteres especiales.

Capítulo 24
Objetos y señales (banderas) de la calculadora

Los números, listas, vectores, matrices, algebraicos, etc., son objetos de la calculadora. Se clasifican según su naturaleza en 30 tipos diversos, que se describen posteriormente. Las señales o banderas son variables que se pueden utilizar para controlar las características de la calculadora. Las banderas o señales fueron introducidas en el capítulo 2.

Descripción de los objetos de la calculadora

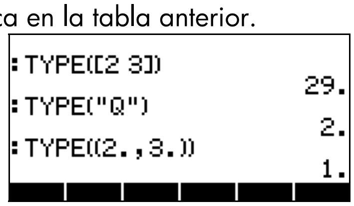
La calculadora reconoce objetos de los tipos siguientes:

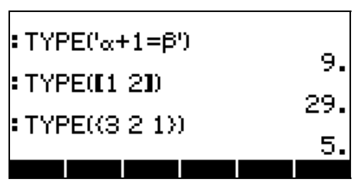
Número	Tipo	Ejemplo
0	Número real	-1.23E-5
1	Número complejo	(-1.2,2.3)
2	Cadena de caracteres	"Hello, world "
3	Arreglo real	[[1 2][3 4]]
4	Arreglo complejo	[[(1 2) (3 4)] [(5 6) (7 8)]]
5	Listas	{3 1 'PI'}
6	Nombre global	X
7	Nombre local	y
8	Programas	<< → a 'a^2' >>
9	Objetos algebraicos	'a^2+b^2'
10	Entero binario	# A2F1E h
11	Objeto gráfico	Graphic 131×64
12	Objeto rotulado	R: 43.5
13	Objeto de unidades	3_m^2/s
14	Nombre XLIB	XLIB 342 8
15	Directorio	DIR Σ END
16	Biblioteca	Library 1230"...
17	Objeto de reserva	Backup MYDIR
18	Función pre-definida	COS
19	Instrucción pre-definida	CLEAR

Número	Tipo	Ejemplo
21	Número real extendido	Long Real
22	Número complejo extendido	Long Complex
23	Arreglo enlazado	Linked Array
24	Objeto carácter	Character
25	Objeto código	Code
26	Datos de biblioteca	Library Data
27	Objeto externo	External
28	Entero	3423142
29	Objeto externo	External
30	Objeto externo	External

La función TYPE

Esta función, disponible en el sub-menú PRG/TYPE (), o a través del catálogo de funciones, se usa para determinar el tipo de un objeto. El argumento de la función es el objeto de interés. La función produce el tipo de objeto según se indica en la tabla anterior.





La función VTYPE

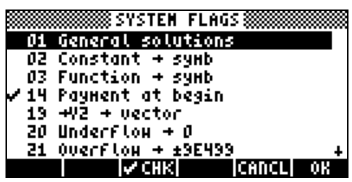
Esta función funciona similar a la función TYPE, pero se aplica a una variable, produciendo el tipo de objeto almacenado en la variable.

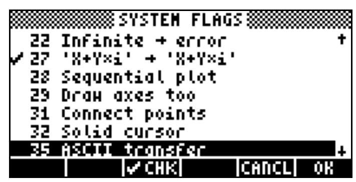
Banderas o señales de la calculadora

Una bandera o señal de la calculadora es una variable que puede estar seleccionada o no seleccionada. El estado de una bandera afecta el comportamiento de la calculadora, si la bandera es una bandera del sistema, o el comportamiento de un programa, si es una bandera del usuario. Las banderas o señales se describen más detalladamente a continuación.

Banderas o señales del sistema

Las banderas del sistema se acceden usando MODE FLAGS. Presiónese la tecla direccional vertical para ver un listado de todas las banderas del sistema con su número y una breve descripción. Las primeras dos pantallas con las banderas del sistema se muestran a continuación:





Usted reconocerá muchas de estas banderas por que corresponden a opciones en el menú MODES (por ejemplo, la bandera 95 para el modo Algebraico, 103 para el modo Complejo, etc.). A través de este manual de usuario hemos acentuado las diferencias entre menú de listas (CHOOSE boxes) y menú de teclas (SOFT menus), los cuáles son seleccionados fijando o removiendo la bandera 117 del sistema. Otro ejemplo del ajuste de la bandera del sistema es el de las banderas 60 y 61 que se relacionan con la biblioteca de constantes (CONLIB, ver el capítulo 3). Estas banderas funcionan de la manera siguiente:

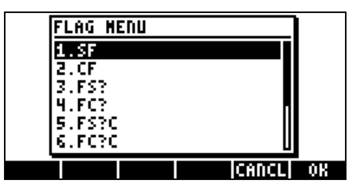
- bandera 60: removida (valor pre-definido):unidades SI, fija: unidades ENGL
- bandera 61: removida (valor pre-definido):use unidades, fija: solamente muestre el valor de la constante

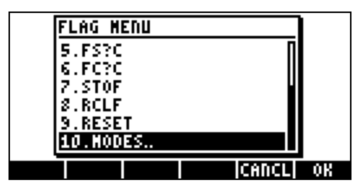
Funciones para fijar y cambiar las banderas o señales

Estas funciones se pueden utilizar para fijar, remover, o verificar el estado de las banderas del usuario o de las banderas del sistema. Cuando se usan las funciones con las banderas del sistema, los argumentos son números enteros negativos. Así, la bandera 117 del sistema será referida como bandera -117. Por otra parte, las banderas del usuario serán referidas como el número entero positivo al aplicar estas funciones. Es importante entender que las banderas del usuario tienen usos solamente en la programación para ayudar a controlar el flujo de programa.

Las funciones para la manipulación de las banderas de la calculadora están disponibles en el menú PRG/MODES/FLAG. El menú PRG se activa con ← PRG . Las pantallas siguientes (con bandera de sistema 117 fija a CHOOSE boxes) muestran la secuencia de pantallas para conseguir el menú FLAG:

Las funciones contenidas dentro del menú FLAG son las siguientes:





La operación de estas funciones se muestra a continuación:

SF Fijar una bandera
CF Remover una bandera
FS? Produce 1 si la bandera ha sido fijada, 0 si no ha sido fijada
FC? Produce 1 si la bandera está sin fijar, 0 si la bandera ha sido fijada
FS?C Prueba una bandera como lo hace FS, y la remueve

FC?C Prueba una bandera como lo hace FC, y la remueve
STOF Almacena nuevos ajustes de las banderas del sistema
RCLF Recobra los ajustes existentes de las banderas del sistema
RESET Reajusta los valores actuales de una opción (podría ser utilizado para reajustar una bandera)

Banderas o señales del usuario

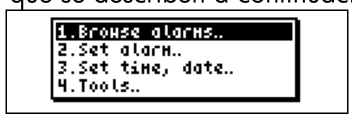
Para propósitos de programación, las banderas 1 a 256 están disponibles para el usuario. Estas banderas o señales no tienen ningún significado a la operación de la calculadora.

Capítulo 25
Funciones de fecha y de hora

En este capítulo demostramos algunos de las funciones y de los cálculos usando horas y fechas.

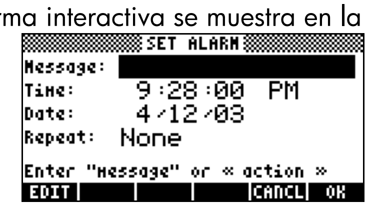
El menú TIME

El menú TIME, activado con la secuencia ↱ TIME (la tecla 9) proporciona las funciones siguientes, que se describen a continuación:

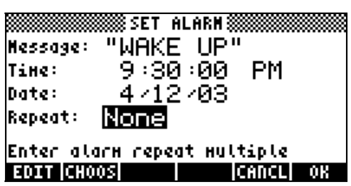


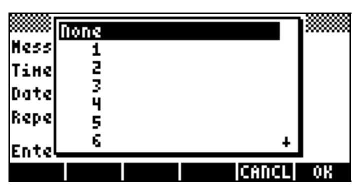
Programando una alarma

La opción *2. Set alarm..* provee una forma interactiva que permite al usuario fijar un alarmar. La forma interactiva se muestra en la figura siguiente:



La localidad llamada Message: permite que usted escriba una cadena de caracteres que identifica la alarma. La localidad llamada Time: le deja incorporar la época para activar el alarmar. La localidad llamada Date: se utiliza para fijar la fecha de una alarma (o para la primera activación, si se requiere repetición de la alarma). Por ejemplo, usted podría fijar la alarma siguiente. La figura de la izquierda muestra la alarma sin repetición. La figura de la derecha muestra las opciones para la repetición después de presionar CHOOS. Después de presionar OK la alarma será fijado.





Revisando las alarmas

La opción *1. Browse alarms…* en el menú TIME le deja revisar sus alarmas actuales. Por ejemplo, después de programar la alarma presentada en el ejemplo anterior, esta opción mostrará la pantalla siguiente:

Esta pantalla provee cuatro teclas del menú:

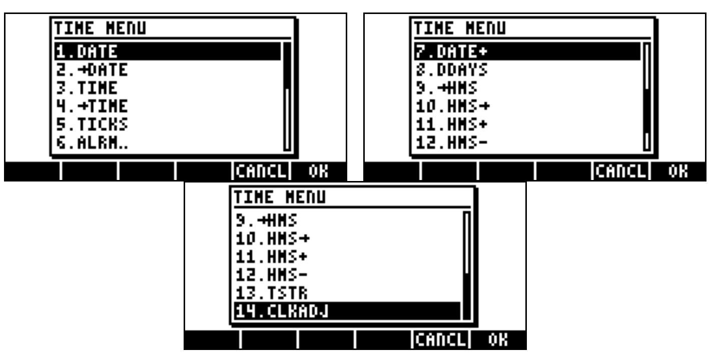
EDIT: editar la alarma seleccionada, proveyendo una forma interactiva
NEW: programar una nueva alarma
PURG: eliminar una alarma
OK : recobrar pantalla normal

Fijar hora y fecha

La opción *3. Set time, date…* provee una forma interactiva que permite al usuario fijar la hora actual y la fecha. Los detalles fueron proveídos en el Capítulo 1.

Herramientas del menú TIME

La opción *4. Tools…* proporciona un número de funciones útiles para la operación de reloj, y cálculos con horas y fechas. La figura siguiente demuestra a funciones las herramientas disponibles del menú TIME:

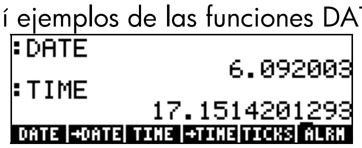


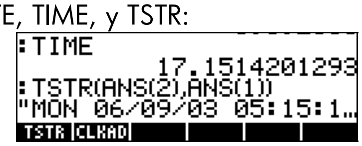
El uso de estas funciones se muestra a continuación:

DATE: Copia la fecha a la pantalla
→DATE: Fija la fecha del sistema al valor especificado
TIME: Cambia formato a 24-hr HH.MMSS
→TIME: Fija la hora al valor especificado en formato 24-hr HH.MM.SS
TICKS: Provees el tiempo del sistema como un entero binario en unidades de 1 pulso del reloj, un pulso (tick) = 1/8192 sec
ALRM..: Sub-menú con funciones de manipulación de alarmas (descritas más adelante)
DATE+: Agrega o resta un número de días a una fecha
DDAYS(x,y): Calcula el número de días entre las fechas x,y
→HMS: Convierte la hora de formato decimal a formato HH.MMSS
HMS→: Convierte la hora de formato HH.MMSS a decimal
HMS+: Suma dos valores de horas en el formato HH.MMSS
HMS-: Sustrae dos valores de horas en formato HH.MMSS
TSTR(hora, fecha): convierte la hora y fecha a una cadena de caracteres
CLKADJ(x): Suma x pulsos al tiempo de sistema (1 pulso = 1/8192 sec)

Las funciones →DATE, →TIME, CLKADJ se utilizan para ajustar la fecha y la hora. No se proveen ejemplos para estas funciones.

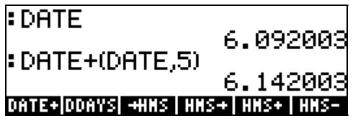
He aquí ejemplos de las funciones DATE, TIME, y TSTR:





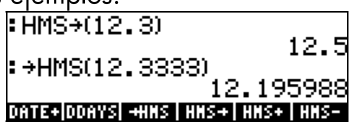
Cálculos con las fechas

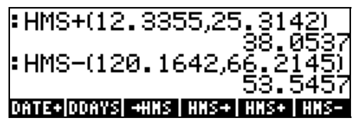
Para los cálculos con las fechas, utilice las funciones DATE+, DDAYS. A continuación se presenta un ejemplo del uso de estas funciones, junto con un ejemplo de la función TICKS:



Cálculo con horas

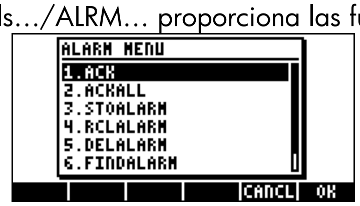
Las funciones →HMS, HMS→, HMS+, y HMS- se utilizan para manipular valores en formato HH.MMSS. Éste es el mismo formato usado para calcular con medidas angulares en grados, minutos, y segundos. De esta manera, estas operaciones son útiles no solamente para los cálculos con unidades de tiempo, sino también para los cálculos angulares. A continuación se muestran algunos ejemplos:





Funciones de alarmas

El sub-menú TIME/Tools…/ALRM… proporciona las funciones siguientes:



La operación de estas funciones se muestran a continuación:
ACK: Reconoce alarmas ya pasadas
ACKALL: Reconoce todas las alarmas ya pasadas
STOALARM(x): Almacena la alarma (x) en la lista de alarmas del sistema
RCLALARM(x): Recobra la alarma (x) de la lista de alarmas del sistema
DELALARM(x): Remueve la alarma x de la lista de alarmas del sistema
FINDALARM(x): Muestra la primera alarma programada para una hora específica

El argumento x en la función STOALARM es una lista que contiene una referencia de la fecha (mm.ddyyy), hora del día en formato de 24 hr (hh.mm), una cadena de caracteres que identifica la alarma, y el número de repeticiones de la alarma. Por ejemplo,

```
STOALARM({6.092003,18.25,"Test",0}
```

El argumento x en el resto de funciones de alarmas es un número entero positivo que indica el número de la alarmar que se debe recobrar, suprimir, o encontrar.

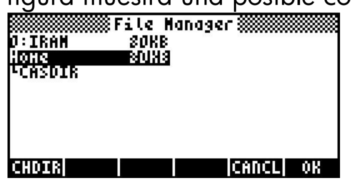
Puesto que el manejo de las alarmas se puede hacer fácilmente con el menú TIME (véase arriba), las funciones de alarmas en esta sección son más útiles para escribir programas.

Capítulo 26
Manejo de la memoria

En el Capítulo 2 de la Guía del Usuario se presentaron los conceptos básicos y operaciones para crear y manipular variables y directorios. En este Capítulo se presenta el manejo de la memoria de la calculadora en términos de la partición de la memoria y las técnicas para preservar datos en ciertas localidades de la misma (datos back up).

Estructura de la memoria

La calculadora contiene un total de 80 KB para la operación de la calculadora y almacenamiento de datos (memoria de usuario). Para ver la forma en que se divide la memoria de usuario, utilícese la función FILES („ ¡). La siguiente figura muestra una posible configuración:



Esta pantalla indica la existencia de un puerto de memoria (memory port 0), además de la memoria correspondiente al directorio HOME (Véase el Capítulo 2 en la Guía del Usuario).

Puerto 0 y el directorio HOME comparten la misma área de la memoria, por lo tanto, mientras más datos se almacene en el directorio HOME, menos memoria hay disponible para almacenamiento en el Puerto 0. El tamaño total de memoria para el área Puerto 0/directorio HOME es de 80 KB.

El Puerto 0 y el directorio HOME constituyen el área de Memoria de Acceso Aleatorio, en inglés, RAM (Random Access Memory). El segmento RAM de la memoria requiere una alimentación continua de corriente eléctrica proveída por las baterías de la calculadora. Para evitar la pérdida de contenidos de la memoria RAM, la calculadora incluye una batería de reserva modelo CR2032. Véanse detalles adicionales sobre su operación hacia el final de este Capítulo.

El directorio HOME

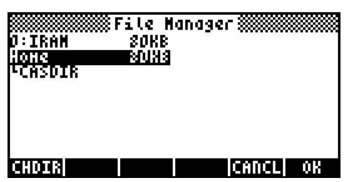
Al utilizar la calculadora uno puede crear variables para almacenar resultados intermedios y finales de las operaciones. Algunas operaciones, tales como operaciones gráficas o estadísticas, pueden crear variables adicionales para almacenar datos. Estas variables se mostrarán en el directorio HOME o en cualquiera de sus directorios. Para mayor información sobre la manipulación de variables y directorios, refiérase al Capítulo 2 de la Guía del Usuario.

Memoria de Puertos

A diferencia del directorio HOME, la memoria de Puertos no puede subdividirse en directorios, y solo puede contener objetos de reserva (objetos de reserva) u objetos de biblioteca. Estos dos tipos de objetos se describen posteriormente en este Capítulo.

Verificación de objetos en la memoria

Para ver los objetos actualmente almacenados en la memoria utilícese la función FILES („ ¡). La pantalla siguiente muestra el directorio HOME con, con un directorio, a saber, CASDIR.



Cualquier directorio adicional puede verificarse al mover el cursor hacia abajo en el diagrama de directorios que se muestra. El cursor puede también moverse hacia arriba para seleccionar un Puerto de memoria. Cuando se seleccione un directorio, sub-directorio, o Puerto de memoria, presiónese la tecla OK para ver los contenidos del objeto seleccionado.
Otra forma de acceder un Puerto de memoria es a través del menú LIB (**‚ á** , asociado con la tecla **2** . LIB es la abreviatura de la palabra inglesa "biblioteca" que significa "biblioteca.")

Si existe alguna biblioteca activa en la calculadora se mostrará en esta pantalla. Una de esas bibliotecas es la biblioteca de demostración HP49D mostrada en la pantalla anterior. Al presionarse la tecla de menú correspondiente (**A**) se activará esta biblioteca. Al presionarse la tecla correspondiente a un Puerto de memoria se activará ese Puerto. Información adicional sobre bibliotecas se presenta posteriormente en este Capítulo.

Objetos de reserva (backup objects)

Los objetos de reserva se utilizan para copiar datos del directorio HOME a un Puerto de memoria. El propósito de copiar objetos de reserva en los Puertos de memoria es el de preservar los contenidos de los el objetos para uso futuro. Los objetos de reserva (backup objects) tienen las siguientes características:

- Estos objetos pueden existir solamente en los Puertos de memoria (es decir, no se pueden producir objetos de reserva en el directorio HOME, aunque uno puede hacer cuantas copias del objeto original como se quieran).
- Los contenidos de un objeto de reserva no pueden modificarse (es posible, sin embargo, copiar el objeto a un directorio en el directorio HOME, modificarlo en esa localidad, y copiarlo a memoria de Puerto una vez modificado)
- Es posible almacenar un objeto simple o un directorio completo como un objeto de reserva. No es posible, sin embargo, crear un objeto de reserva a partir de un cierto número de objetos contenidos en un directorio.

Cuando se crea un objeto de respaldo en la memoria de Puerto, la calculadora obtiene un valor llamado *verificación de redundancia cíclica*, ó, en inglés, *cyclic redundancy check* (CRC) , al cual se le conoce también como un valor *checksum* . Este valor se basa en los datos binarios contenidos en el objeto de interés. Este valor se almacena junto con el objeto de reserva, y se utiliza para verificar la integridad del objeto de reserva. Cuando se reinstala un objeto de reserva en el directorio HOME, la calculadora obtiene otra vez el valor CRC y lo compara con el valor original. Si se identifica una discrepancia en estos valores, la calculadora le advierte al usuario que los datos reinstalados pueden estar corruptos.

Copiando objetos de reserva en la memoria de Puerto

La operación de copia de un objeto de reserva de la memoria de usuario a la memoria de Puerto es similar a la operación de copia de variables de un subdirectorio a otro (véanse los detalles en el Capítulo 2 de la Guía del Usuario). Uno puede, por ejemplo, usar la función FILES („ ¡) para copiar y borrar objetos de reserva como se hace con objetos normales en la calculadora. Además, existen funciones específicas para manipular objetos de reserva, tal como se describe a continuación.

Copiando y reinstalando el directorio HOME

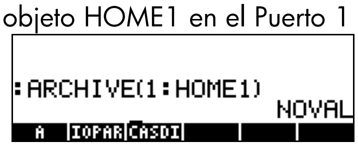
Es posible copiar los contenidos del actual directorio HOME a un solo objeto de reserva. Este objeto contendrá todas las variables, asignación de teclas, y alarmas definidas actualmente en el directorio HOME. Uno puede también reinstalar los contenidos del directorio HOME al copiar un objeto de reserva ya existente con los mismos. Las instrucciones para estas operaciones se muestran a continuación:

Copiando el directorio HOME a un objeto de reserva

Para copiar los contenidos actuales del directorio HOME a un objeto de reserva, en modo algebraico, utilícese la función:

ARCHIVE(:Número_de_Puerto: Objeto_de_Reserva)

En esta función, Número_de_Puerto es igual a 0 (cero), y Objeto_de_Reserva es el nombre del objeto donde se almacena el directorio HOME. El símbolo : : se escribe utilizando „ ê . Por ejemplo, para copiar el directorio HOME en el objeto HOME1 en el Puerto 1 de la memoria, utilícese:



Para copiar el directorio HOME a un objeto de reserva en modo RPN, utilícese:

: Número_de_Puerto : Objeto_de_Reserva ` ARCHIVE

Reinstalando el directorio HOME

Para reinstalar el directorio HOME en modo algebraico utilícese:

RESTORE(: Número_de_Puerto : Objeto_de_Reserva)

Por ejemplo, para reinstalar HOME a partir del objeto de reserva HOME1, utilícese: RESTORE(: 0 : HOME1)

En modo RPN utilícese:

: Número_de_Puerto : Objeto_de_Reserva ` RESTORE

Nota: Cuando se reinstala el directorio a partir de un objeto de reserva, sucede lo siguiente:

- El directorio en el objeto de reserva elimina el directorio HOME actual. Por lo tanto, todos los datos en el directorio HOME que no han sido copiados en reserva, serán eliminados.
- La calculadora se apaga y se enciende por sí misma. Los contenidos de la pantalla antes de la reinstalación de HOME se pierden.

Almacenando, borrando, y reinstalando objetos de reserva

Para crear un objeto de reserva utilícese una de las siguientes opciones:

- Utilícese la función FILES („ ¡) para copiar el objeto a un Puerto. Si se sigue esta opción, el objeto de reserva tendrá el mismo nombre que el objeto original.
- Utilícese la función STO para copiar el objeto a un Puerto. Por ejemplo, en modo algebraico, para copiar la variable A a un objeto de reserva llamado AA en Puerto 1, utilícese:

  ³A³ K „ ê 1 ™ ~ a ~ a `
- Utilícese la función ARCHIVE para crear un objeto de reserva con los contenidos del directorio HOME (véanse instrucciones anteriores).

Para borrar un objeto de reserva de un Puerto de memoria:

- Utilícese la función FILES („ ¡) para borrar el objeto como se hace con cualquier variable del directorio HOME (véase el Capítulo 2 en la Guía del Usuario).

- Utilícese la función PURGE como se indica a continuación:
  En modo algebraico, utilícese:
  PURGE(: Número_de_Puerto : Objeto_de_Reserva)
  En modo RPN, utilícese:
  : Número_de_Puerto : Objeto_de_Reserva PURGE

Para reinstalar un objeto de reserva:

- Utilícese la función FILES („ ¡) para copiar el objeto de reserva de la memoria de Puerto al directorio HOME.
- Cuando se reinstala un objeto de reserva, la calculadora lleva a cabo una verificación de integridad del objeto reinstalado al calcular el valor CRC. Cualquier discrepancia entre los valores CRC calculado y almacenado produce un mensaje indicando datos corruptos.

Utilizando datos en objetos de reserva

Aunque no se pueden modificar directamente los contenidos de los objetos de reserva, sus contenidos se pueden utilizar en operaciones. Por ejemplo, se pueden ejecutar programas almacenados como objetos de reserva o utilizar datos de objetos de reserva para ejecutar programas. Para ejecutar programas en objetos de reservas o utilizar datos de objetos de reserva utilícese la función FILES („ ¡) para copiar los contenidos del objeto de reserva a la pantalla. Alternativamente, se puede utilizar la función EVAL para ejecutar un programa almacenado en un objeto de reserva, o la función RCL para recobrar datos contenidos en un objeto de reserva como se muestra a continuación:

- En modo algebraico:
  - Para evaluar un objeto de reserva, escríbase:
    EVAL(argumento(s), : Número_de_Puerto : Objeto_de_Reserva)
  - Para copiar un objeto de reserva a la pantalla, escríbase:
    RCL(: Número_de_Puerto : Objeto_de_Reserva)

- En modo RPN:
  - Para evaluar a objeto de reserva, escríbase:
    Argumento(s) ` : Número_de_Puerto : Objeto_de_Reserva
    EVAL

- Para copiar un objeto de reserva a la pantalla, escríbase: : Número_de_Puerto : Objeto_de_Reserva ` RCL

Utilizando bibliotecas

Las bibliotecas son programas binarios creados por los usuarios que pueden cargarse en la calculadora y pueden ejecutarse desde cualquier directorio en el directorio HOME. Las bibliotecas pueden copiarse a la calculadora como una variable regular, e instalarse y adjuntarse al directorio HOME.

Instalando y adjuntando una biblioteca

Para instalar una biblioteca, cópiense los contenidos de la biblioteca en la pantalla(utilícese la tecla de menú **,** , o la función RCL) y almacénense en el Puerto 0. Por ejemplo, para instalara una variable de biblioteca en un Puerto, utilícese:

- En modo algebraico:
  STO(Variable_Biblioteca, Número_de_Puerto)
- En modo RPN:
  Variable_Biblioteca ` Número_de_Puerto **K**

Después de instalar la biblioteca en un Puerto de memoria es necesario adjuntar la biblioteca al directorio HOME. Esto se puede hacer al apagar y encender la calculadora, o, al presionar, simultáneamente, **$** **C** . Después de adjuntarse al directorio HOME, la biblioteca estará lista para utilizarse. Para acceder el menú de activación de bibliotecas utilícese (**,** **á**). El nombre de la biblioteca instalada deberá aparecer en las teclas del menú.

Número de bibliotecas

Cuando se utiliza el menú LIB (**,** **á**) y se presiona la tecla correspondiente al puerto 0, se mostrarán los números de las bibliotecas disponibles en las teclas de menú. Cada biblioteca tiene un número asociado de cuatro dígitos. Estos números los asigna la persona que produce la biblioteca, y se utilizan para borrar la biblioteca si es necesario.

Borrando una biblioteca

Para borrar una biblioteca de un Puerto de memoria, utilícese:

- En modo algebraico:
  PURGE(:Número_de_Puerto: número_biblioteca)
- En modo RPN:
  : Número_de_Puerto : número_biblioteca PURGE

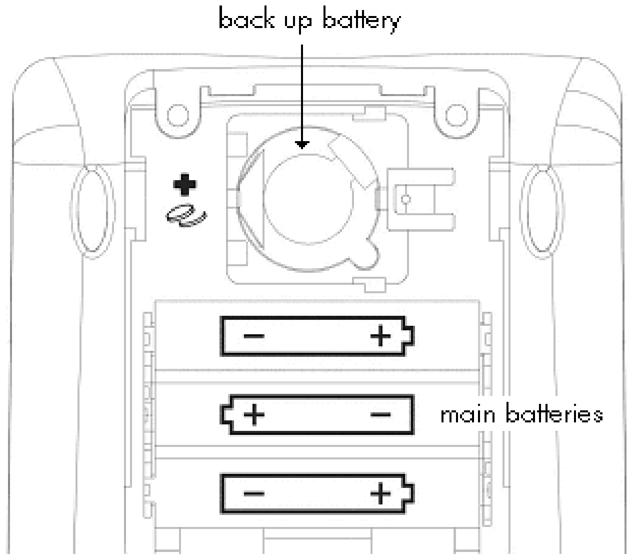
En los cuales, número_biblioteca es el número de la biblioteca descrito anteriormente.

Creando bibliotecas

Las bibliotecas pueden escribirse en lenguaje Assembler, en lenguaje System RPL, o utilizando una biblioteca para crear bibliotecas, por ejemplo, LBMKR. Este programa, por ejemplo, puede encontrarse en la red Internet (véase por ejemplo, http://www.hpcalc.org). Los detalles de la programación de la calculadora en lenguaje Assembler o System RPL no se incluyen en este documento. El usuario puede encontrar información relacionada en la red de Internet.

Batería de respaldo

Una batería de respaldo CR2032 se incluye en la calculadora para proveer energía eléctrica adicional a la memoria volátil cuando se reemplazan las baterías principales. Se recomienda reemplazar la batería de respaldo cada 5 años. La pantalla indicará cuando sea necesario reemplazar la batería de respaldo. El diagrama siguiente muestra la localización de la batería de respaldo en el compartimiento superior en la parte trasera de la calculadora.


back up battery
main batteries

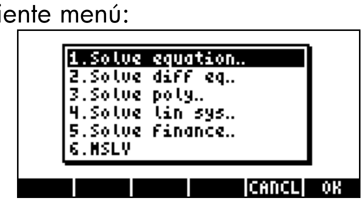
Apéndice A
Utilizando formas interactivas

Este ejemplo que muestra la forma de cambiar el tiempo del día y la fecha en la calculadora ilustra el uso de formas interactivas (formas interactivas). He aquí algunas reglas generales:

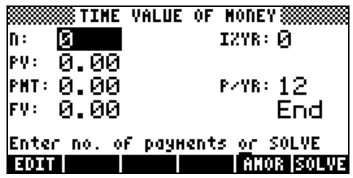
- Utilícense las teclas direccionales (◀ ▶ ▼ ▲) para cambiar de una posición a la otra en la forma interactiva.
- Utilícese cualquiera de las teclas de menú CHOOS (escoger) para vers las opciones disponibles en cualquier posición de la forma interactiva.
- Utilícense las teclas direccionales (◀ ▶ ▼ ▲) para seleccionar la opción preferida en cualquire posición, y presiónese la tecla OK (F6) para efectuar la selección.
- En algunas ocasiones, se requiere utilizar una marca de aprobado (check mark) para seleccionar una opción en una forma interactiva. En tal case, utilícese la tecla de menú ✓CHK para cambiar la selección.
- Presiónese la tecla CANCL para cancelar una forma interactiva y regesar a la pantalla normal de la calculadora. De forma alternativa, presiónese la tecla ENTER o la tecla ON para cancelar una forma interactiva.

Ejemplo - Utilizando formas interactivas en el menú NUM.SLV

A continuación se presenta las características de las formas interactivas utilizando para ello las formas interactivas de cálculos financieros disponible en la colección de soluciones numéricas (NUM.SLV). Actívense las soluciones numéricas con la combinación ↱ NUM.SLV (asociada con la tecla 7). Esta acción produce el siguiente menú:



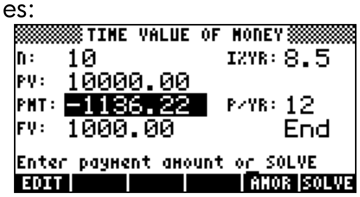
Para activar los cálculos financieros utilícese la tecla direccional vertical (▼) a fin de seleccionar la opción *5. Solve finance*. Presiónese OK, para activar los cálculos financieros. La pantalla resultante es una forma interactiva con posiciones correspondientes a cierto número de variables (n, I%YR, PV, PMT, FV).



En este caso en particular, provéanse los siguientes valores para las variables: n = 10, I%YR = 8.5, PV = 10000, FV = 1000, y obténgase el valor de la variable PMT (el significado de las variables se presenta posteriormente). Ejecútese el siguiente ejercicio:

10 OK	Escríbase n = 10
8.5 OK	Escríbase I%YR = 8.5
10000 OK	Escríbase PV = 10000
▼ 1000 OK	Escríbase FV = 1000
▲ ◄ SOLVE	Seleccionar y calcular PMT

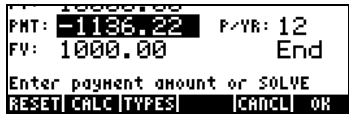
La pantalla que resulta es:



En esta forma interactiva se observan las siguientes teclas de menú:

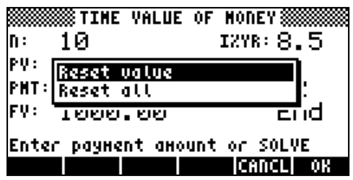
EDIT Presiónese para editar la posición seleccionada
AMOR Menú de amortización (opción específica para este cálculo)
SOLVE Presiónese para calcular la posición seleccionada

Al presionar NXT se observan las siguientes teclas de menú:

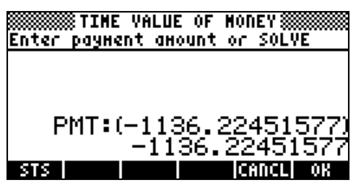


RESET Para recobrar valores preseleccionados de una posición dada
CALC Presiónese para accesar la pantalla con fines de cálculo
TYPES Presiónese para determinar los tipos de objectos permisibles
CANCL Cancelar la operación
OK Accéptese el valor escrito en la posición dada

Al presionarse la tecla RESET se proveen dos opciones a seguir:

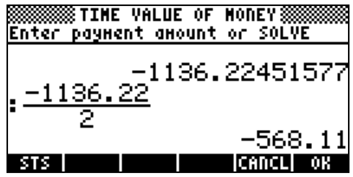


Si se selecciona la opción *Reset value* se recobran valores prescritos solamente en la posición seleccionada. En cambio, si se selecciona la opción *Reset all*, se recobran valores prescritos (usualmente, 0) en todas las posiciones en la forma interactiva. A continuación, uno puede acceptar la selección previa (presiónese OK), o canceler la operación (presiónese CANCL). Presiónese CANCL en este ejemplo. Presiónese CALC para accesar la pantalla con fines de cálculo. La pantalla resultante es:

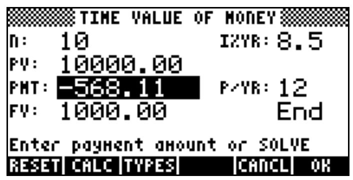


La pantalla mostrará el valor de la posición de la forma interactiva que fuera seleccionada previamente. Supóngase que se quiere dividir este valor por 2. La siguiente pantalla muestra, en modo ALG, después de calcularse:

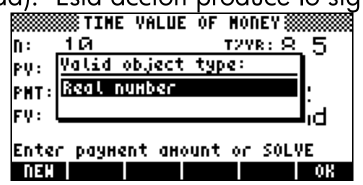
-1136.22/2:



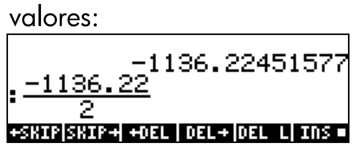
(En modo RPN, utilícese -1136.22 ENTER 2 ENTER ÷).
Presiónese OK para aceptar este valor calculado. La forma mostrará los siguientes valores:



Presiónese TYPES para ver los tipos de valores acceptables en la posición PMT (la posición seleccionada). Esta acción produce lo siguiente:



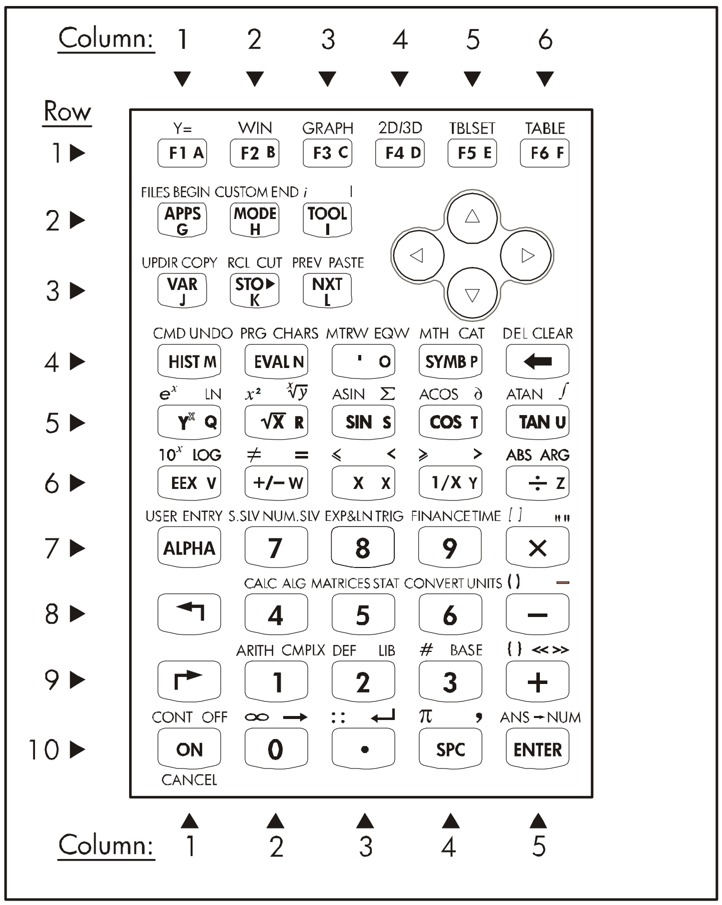
Este resultado indica the que el valor de la variable PMT debe ser un número real. Presiónese OK para recuperar la forma interactiva, y presiónese NXT para recobrar el menú original. A continuación, presiónese la tecla ENTER o la tecla ON para recobrar la pantalla normal. Para este ejemplo, se mostrarán los siguientes valores:



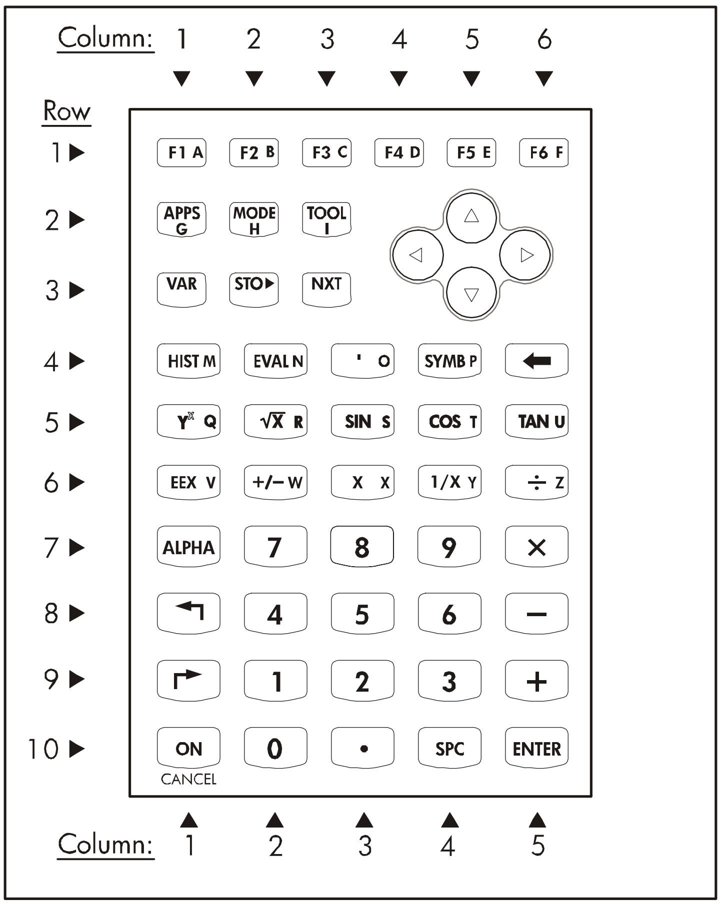
El primer resultado es el valor de PMT calculado en la primera parte de este ejercicion. El segundo resultado es el cálculo hecho para redefinir el valor de PMT.

Apéndice B
El teclado de la calculadora

La figura siguiente muestra un diagrama del teclado de la calculadora enumerando sus filas y columnas.



La figure muestra 10 filas de teclas combinadas con 3, 5, ó 6 columnas. La Fila 1 tiene 6 teclas, las filas 2 y 3 tienen 3 teclas cada una, y las filas 4 a 10 tienen 5 teclas cada una. Existen cuatro teclas direccionales (con símbolos de flechas) localizadas en el lado derecho del teclado en el espacio ocupado por filas 2 y 3. Cada tecla tiene tres, cuatro, o cinco funciones. Las funciones principales de las teclas se muestran en la siguiente figures. Para operar esta función principal, simplemente presiónese la tecla correspondiente. Para referirse a una tecla se utiliza el número de la fila y la columna donde se ubica la tecla. Por ejemplo, la tecla *(10,1)* es la tecla encender la calculador (la tecla *ON*).



Funciones principales en el teclado de la calculadora

Funciones principales

Las teclas de F1 a F6 se asocian a las opciones del menú que aparecen en la pantalla de la calculadora. Así, estas teclas activarán una variedad de funciones que cambian según el menú activo.

- Las teclas direccionales, ▲▼◀▶, se utilizan para mover un carácter a la vez en la dirección de la tecla presionada (es decir, hacia arriba, hacia abajo, a la izquierda, o a la derecha).
- La función APPS activa el menú de los modos .
- La función de la HERRAMIENTA activa un menú de las herramientas útiles para manejar variables y se utiliza para conseguir información sobre la calculadora
- La función VAR muestra las variables almacenadas en el directorio activo
- La función STO se usa para almacenar variables
- La función NXT se utiliza para ver las opciones o variables en las teclas adicionales del menú
- La función HIST permite el acceso a la historia del modo algebraico, es decir, la colección de funciones recientes
- La función EVAL se usa para evaluar expresiones algebraicas y numéricas
- La tecla apóstrofe ['] se utiliza para activar un par de apóstrofes para las expresiones algebraicas
- La tecla SYMB activa el menú simbólico de las operaciones
- La tecla ◀ (tecla cancelación) se utiliza para suprimir caracteres en una línea
- La tecla y^x calcula potencias.
- La tecla $\sqrt{x}$ calcula la raíz cuadrada de un número
- Las teclas SIN (seno), COS (coseno), y TAN calculan el seno, coseno, y la tangente, respectivamente, de un número
- La tecla EEX se utiliza para escribir la potencias de diez (es decir, 5×10^3, se escribe como 5 EEX 3, que se muestra como *5E3*).
- La tecla +/- cambia el signo de los números
- La tecla X escribe el carácter X (mayúscula).
- La tecla 1/x calcula el inverso de un número
- Las teclas +, −, ×, y ÷, se utilizan para las operaciones aritméticas fundamentales (adición, substracción, multiplicación, y división, respectivamente).

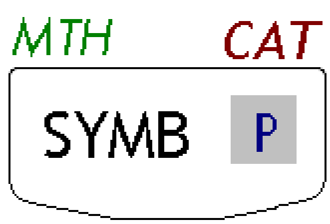
- La tecla ALPHA se combina con otras teclas para escribir caracteres alfabéticos.
- Las teclas ↰ y ↱ se combinan con otras teclas para activar menús, para escribir caracteres, o para calcular funciones.
- Las teclas numéricas (0 a 9) se utiliza para escribir los dígitos del sistema de numeración decimal
- Existe una tecla de la coma (,) y una tecla espaciadora (SPC).
- La tecla ENTER se utiliza para escribir un número, una expresión, o una función a la pantalla
- La tecla ON se usa para encender la calculadora.

Funciones alternas de las teclas

La tecla verde, *tecla (8,1)*, la tecla roja, *tecla (9,1)*, y la tecla azul ALPHA, *tecla (7,1)*, pueden combinarse con otras teclas para activar funciones alternas en el teclado. Por ejemplo, el tecla de SYMB, tecla(4,4), tiene las seis funciones siguientes asociadas:

SYMB	Función principal, activar el menú simbólico
↰ MTH	para activar el menú de MTH (matemáticas)
↱ CAT	para activar la función de CATálogo
ALPHA P	Función ALFA, escribir la letra mayúscula P
ALPHA ↰ P	para escribir la letra minúscula p
ALPHA ↱ P	para escribir el símbolo π

De las seis funciones asociadas a la tecla solamente las primeras cuatro se muestran en el teclado mismo. La tecla se muestra de la siguiente manera:



Notar que el color y la posición de las etiquetas en la tecla, a saber, **SYMB**, *MTH*, *CAT* y **P**, indican cuál es la función principal (SYMB), y cuál de las otras tres funciones se asocia con ⬅(*MTH*), ➡ (*CAT*) , y ALPHA (**P**).

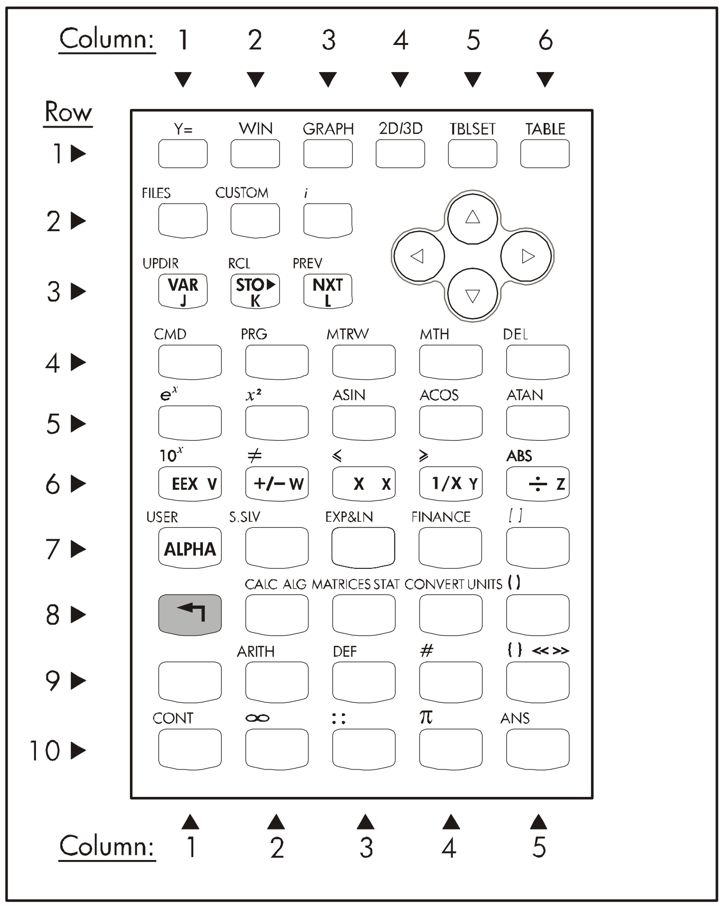
Diagramas que muestran la función o el carácter resultando de combinar las teclas de la calculadora con ⬅, ➡, ALPHA, ALPHA ⬅, y ALPHA ➡, se muestran a continuación. En estos diagramas, el carácter o la función que resulta para cada combinación se muestra con fondo blanco. Si se activan las teclas ⬅, ➡, ALPHA, estas se muestran con fondo sombreado. Las teclas que no son activadas se muestran con fondo negro.

Funciones alternas con ⬅

El bosquejo siguiente demuestra las funciones, los caracteres, o los menús asociados a las diversas teclas de la calculadora cuando se combinan con la tecla ⬅.

- Las seis funciones asociadas a las teclas de F1 a F6 con la tecla ⬅ se refieren a la creación y a la producción de gráficos y de tablas. Al usar estas funciones en el modo de operación algebraico de la calculadora, presiónese primero ⬅, seguida de cualquiera de las teclas en la fila 1. Al usar estas funciones en el modo de RPN de la calculadora, es necesario presionar ⬅ simultáneamente con la tecla en la fila 1 deseada. La función Y = se utiliza para escribir las funciones del y=f(x) de la forma para trazar, la función WIN se utiliza para fijar los parámetros de la ventana gráfica, la función GRAPH se utiliza para producir un gráfico, la función 2D/3D se utiliza para seleccionar el tipo de gráfico a ser producido, la función TBLSET se utiliza para fijar los parámetros para una tabla de valores de una función, la función TABLE se utiliza para generar una tabla de valores de una función.
- La función FILE activa el catálogo de archivos en la memoria de la calculadora
- La función CUSTOM activa las opciones a ser seleccionadas por el usuario
- La tecla *i* se utiliza escribir la unidad imaginaria *i* en la pantalla
- La función de UPDIR mueve el nivel de la posición de memoria un nivel hacia arriba en el diagrama de archivos de la calculadora

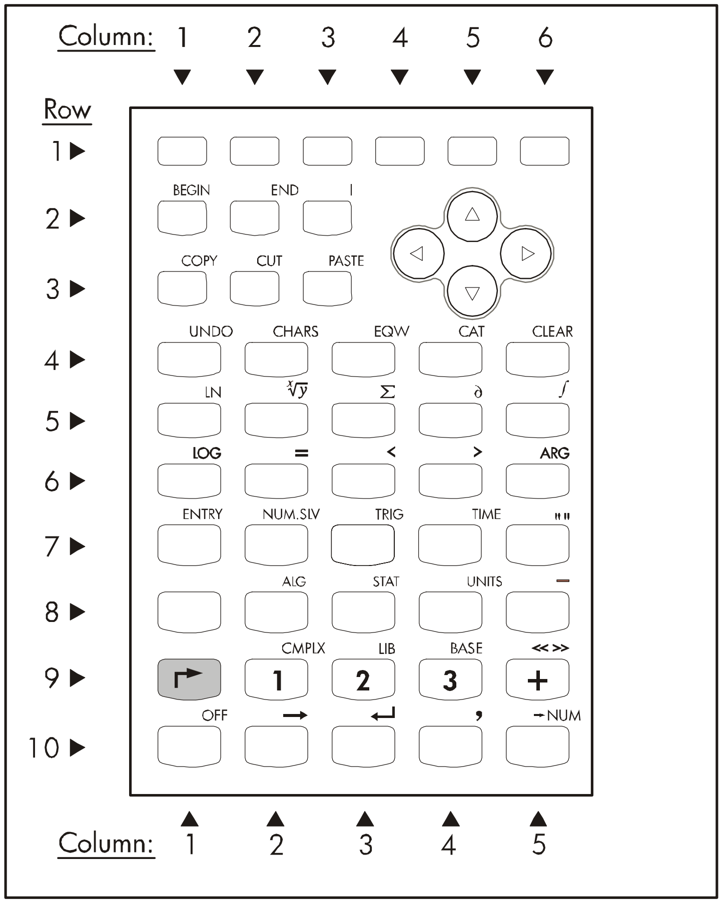
- La función RCL se utiliza para recobrar valores de variables.
- La función PREV muestra el sistema anterior de seis opciones del menú
- La función CMD muestra las acciones más recientes en la pantalla
- La función PRG activa los menús de programación
- La función de MTRW activa a escritor de matrices



Funciones del teclado de la calculadora combinadas con ⬑

- La función MTH activa un menú funciones matemáticas
- La tecla DEL se usa para borrar la pantalla

- la tecla e^x calcula la función exponencial de x.
- La tecla x^2 calcula el cuadrado de x (se conoce también como la función SQ)
- Las funciones ASIN, de ACOS, y ATAN calcula el arco seno, el arco coseno, y arco tangent, respectivamente
- La función 10^x calcula el antilogaritmo de x.
- Las funciones ≠, ≤, y ≥, se utiliza para comparar el valor de los números
- La función ABS calcula el valor absoluto de un número real, o la magnitud de un número complejo o de un vector
- La función USER activa menús definidos por el usuario
- La función S.SLV activa el menú de soluciones simbólicas
- La función EXP&LN activa el menú para sustituir expresiones en términos de las funciones exponencial y logaritmo natural
- La función FINANCE activa un menú para el cálculo financiero
- La función CALC activa un menú de las funciones del cálculo
- La función MATRICES activa un menú para crear manipular matrices
- La función CONVERT activa un menú para la conversión de unidades y otros objetos
- La función ARITH activa un menú de las funciones aritméticas
- La tecla DEF se utiliza para definir una función simple como variable en el menú de la calculadora
- La tecla CONTINUE se utiliza para continuar una operación de la calculadora
- La tecla ANS recupera el resultado anterior cuando la calculadora está en el modo algebraico de operación
- Las teclas [ ], (), y { } se utilizan para escribir corchetes, paréntesis, o llaves.
- La tecla # se utiliza escribir números en la base numérica activa.
- La tecla del infinito ∞ se utiliza para escribir el símbolo infinito en una expresión.
- La tecla π se usa para escribir el símbolo π (el cociente de la longitud de una circunferencia a su diámetro).
- Las teclas direccionales, cuando se combinan con ←, mueven el cursor al primer carácter en la dirección de la tecla presionada.



Funciones del teclado de la calculadora combinadas con ↱

Funciones alternas con ↱

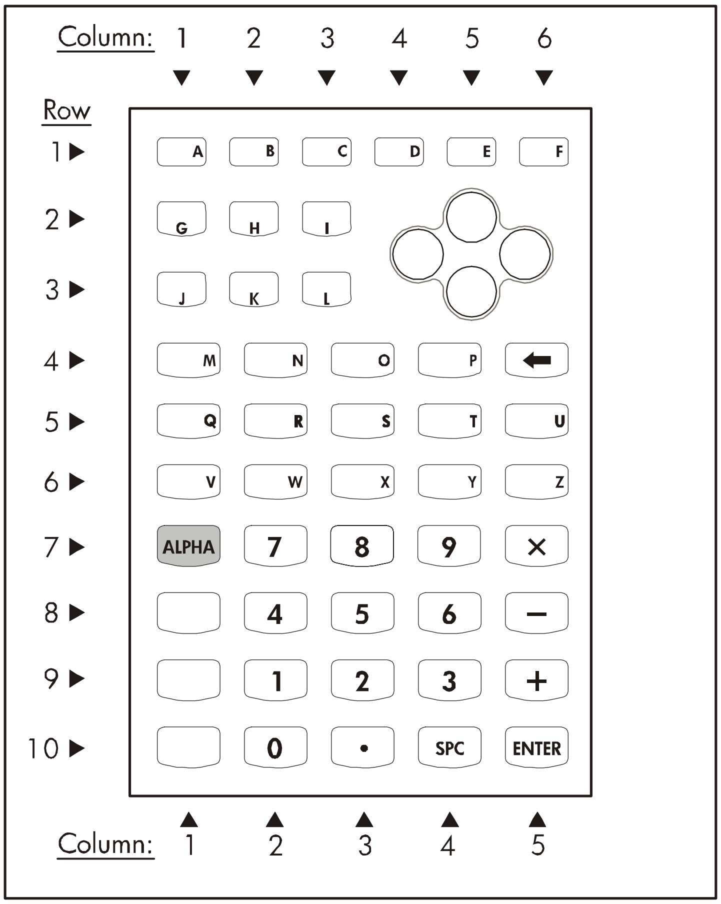
El bosquejo arriba demuestra las funciones, los caracteres, o los menús asociados a las diversas teclas de la calculadora cuando la tecla ↱ se activa.

- Las funciones *BEGIN, END, COPY, CUT* y *PASTE* se usan para editar caracteres.
- La tecla *UNDO* se utiliza para deshacer la operación más reciente de la calculadora.

- La función CHARS activa el menú de los caracteres especiales
- La función EQW se utiliza para activar el escritor de ecuaciones
- La función CAT se utiliza para activar el catálogo funciones
- La función CLEAR limpia la pantalla
- La función LN calcula el logaritmo natural de x
- La función $\sqrt[x]{y}$ calcula el la raíz *x* de *y*.
- la función Σ se utiliza para escribir sumatorias (o la letra griega mayúscula sigma).
- La función ∂ se utiliza para calcular derivadas
- La función ∫ se utiliza para calcular integrales
- La función LOG calcula el logaritmo de base 10.
- La función ARG calcula el argumento de un número complejo
- La función ENTRY se utiliza para cambiar los modos de escritura en la calculadora
- La función NUM.SLV activa el menú de soluciones numéricas
- La función TRIG activa el menú de funciones trigonométricas
- La función TIME activa el menú del tiempo
- La función ALG activa el menú de funciones del álgebra
- La función STAT activa menú de operaciones estadísticas
- La función UNITS activa el menú para las unidades de medida
- La función CMPLX activa el menú de las funciones de números complejos
- La función LIB activa el menú de funciones de biblioteca
- La función BASE activa el menú conversión de bases numéricas
- La tecla OFF apaga la calculadora
- La tecla →NUM produce el valor numérico de una expresión.
- La tecla " " escribe comillas utilizadas para escribir texto
- La tecla __ escribe una línea de subrayado
- La tecla << >> escribe los símbolos de programas.
- La tecla → inscribe una flecha que representa un punto de entrada en un programa.
- La tecla ↵ escribe un carácter de ENTER en los programas y texto
- La tecla (,) escribe una coma.
- Las teclas direccionales, cuando se combinan con ↱, mueven el cursor al último carácter en la dirección de la tecla presionada.

Caracteres ALPHA

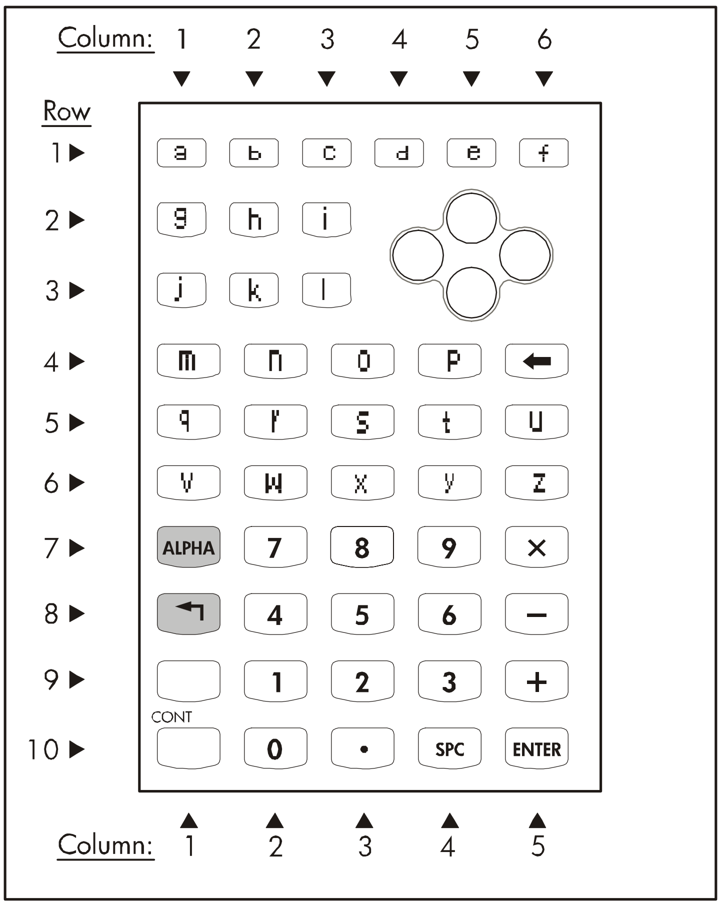
El bosquejo siguiente demuestra los caracteres asociados a las diversas teclas de la calculadora cuando se activa la tecla ALPHA. Nótese que la función ALPHA se utiliza principalmente para escribir las letras mayúsculas del alfabeto (A a la Z). Los números, los símbolos matemáticos (-, +), coma (.), y los espacios (SPC), cuando se combinan con ALPHA, resultan ser los mismos que las funciones principales de estas teclas. La función ALPHA produce un asterisco (*) cuando se combina con la tecla de multiplicar, es decir, ALPHA ×.



Funciones ALPHA del teclado de la calculadora

Caracteres con la combinación ALPHA ↰

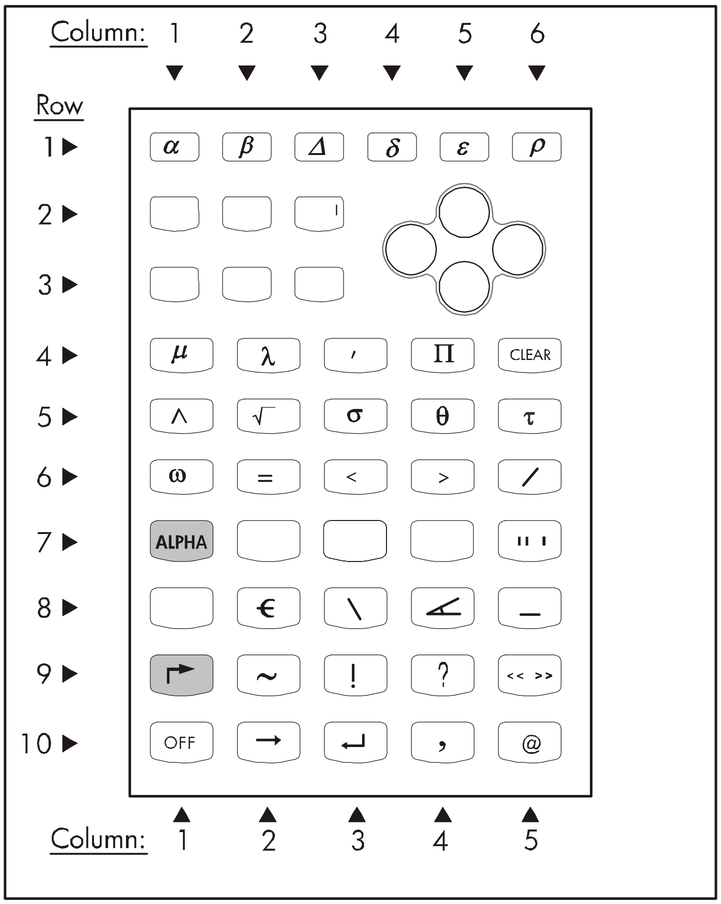
El bosquejo siguiente demuestra los caracteres asociados a las diversas teclas de la calculadora cuando la función de la ALFA se combina con ↰. Nótese que la combinación ALPHA ↰ se utiliza principalmente para escribir las letras minúsculas del alfabeto (a á la z). Los números, los símbolos matemáticos (-, +), coma (.), los espacios (SPC), y las teclas ENTER y CONT, cuando se combinan con ALPHA ↰, resultan ser los mismos que las funciones principales de estas teclas.



Funciones ALPHA ↰ del teclado de la calculadora

Caracteres con la combinación ALPHA ⇒.

El bosquejo siguiente demuestra los caracteres asociados a las diversas teclas de la calculadora cuando la función de la ALFA se combina con ⇒.



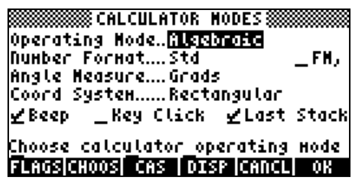
Funciones ALPHA ⇒ del teclado de la calculadora

Nótese que la combinación ALPHA ↱ se utiliza principalmente para escribir un número de caracteres especiales en la pantalla de la calculadora. Las funciones CLEAR, OFF, →, ↵, coma (,), y OFF resultan ser las mismas que las funciones principales de estas teclas cuando se usa la combinación ALPHA ↱. Los caracteres especiales generados por la combinación ALPHA ↱ incluyen las letras griegas (α, β, Δ, δ, ε, ρ, μ, λ, σ, θ, τ, ω, y Π). Otros caracteres generados por la combinación ALPHA ↱
son |, ‘, ^, =, <, >, /, “, \, __, ~, !, ?, <<>>, y @.

Apéndice C
Ajustes del CAS

CAS significa *C*omputer *A*lgebraic *S*ystem (Sistema Algebraico de Computadora). Ésta es la base matemática de la calculadora donde se programan las operaciones y las funciones matemáticas simbólicas. El CAS ofrece un número de ajustes a seleccionarse según el tipo de operación de interés. Para ver los ajustes opcionales del CAS utilizar lo siguiente:

- Presione la tecla MODE para activar la forma interactiva denominada CALCULATOR MODES.



Al pié de la pantalla usted encontrará las teclas de menú siguientes:

FLAGS Provee menú para manipular banderas de la calculadora (*)
CHOOS Para elegir opciones en las posiciones de la forma
CAS Provee una forma interactiva para cambiar el CAS
DISP Provee una forma interactiva para cambiar la pantalla
CANCL Cierra esta forma interactiva y vuelve a la pantalla normal
OK Utilizar esta llave para aceptar ajustes

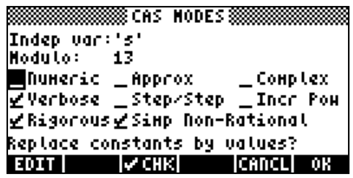
(*)Las banderas o señales son variables en la calculadora, referida por números, que pueden "ser fijados" y "removidas" para cambiar ciertas opciones en el funcionamiento de la calculadora.

Al presionarse la tecla NXT se muestran las funciones restantes en la forma interactiva CALCULATOR MODES:

RESET Para reajustar una opción destacada
CANCL Cierra esta forma interactiva y vuelve a la pantalla normal

OK Utilizar esta llave para aceptar ajustes

- Para recobrar el menú original en la forma interactiva CALCULATOR MODES, presione la tecla NXT . De interés a este punto es el cambiar los ajustes del CAS. Esto se logra presionando la tecla CAS. Los valores pre-seleccionados de los ajustes del CAS se muestran a continuación:



- Para navegar las muchas opciones de la forma interactiva La forma interactiva CAS MODES, use: ◄►▼▲.

- Para seleccionar o remover cualesquiera de los ajustes demostrados anteriormente, seleccione la raya enfrente de la opción del interés, y presione la tecla ✓CHK hasta el ajuste correcto se alcance. Cuando se selecciona una opción, una marca de aprobado será mostrada en la raya (Vg., las opciones *Rigorous* y *Simp Non-Rational* en la pantalla anterior). Las opciones no seleccionadas no mostrarán ninguna marca en la raya que precede la opción de interés (Vg.., las opciones *_Numeric, _Approx, _Complex, _Verbose, _Step/Step, _Incr Pow* en la pantalla anterior).

- Después de seleccionar y no seleccionar todas las opciones que usted desea en la forma interactiva CAS MODES, presione la tecla OK . Esto le llevará de nuevo a la forma interactiva CALCULATOR MODES. Para volver a la exhibición normal de la calculadora a este punto, presione la tecla OK una vez más.

Selección de la variable independiente

Muchas de las funciones proporcionadas por el CAS usan una variable independiente predeterminada. Esta variable es pre-seleccionada como la letra *X* (mayúscula) según se muestra en la forma interactiva CAS MODES. Sin embargo, el usuario puede cambiar esta variable a cualquier otra letra o combinación de letras y de números (el nombre de las variables debe comenzar con una letra) editando el valor de *Indep var* en la forma interactiva CAS MODES.

Una variable llamada VX existe el directorio {HOME CASDIR} de la calculadora que tiene, pre-definido, el valor 'X'. Éste es el nombre de la variable independiente preferida para los usos algebraicos y del cálculo. . Por esa razón, la mayoría de los ejemplos en este capítulo utilizan X como la variable desconocida. Si usted utiliza otros nombres de variables independientes, por ejemplo, con la función HORNER, el CAS no trabajará correctamente.

La variable VX es un habitante permanente del directorio { HOME CASDIR }. Hay otras variables del CAS en el directorio { HOME CASDIR }, por ejemplo, REALASSUME (REALA), MODULO (MODUL), CASINFO (CASIN), etc.

Usted puede cambiar el valor de VX almacenando un nuevo nombre algebraico en él, Vg.., ' x ', ' y ', ' m ', etc. Preferiblemente, mantenga ' X ' como su variable VX para los ejemplos en esta guía.

También, evitar de usar el VX variable en sus programas o ecuaciones, para no confundirse con el VX del CAS. Si usted necesita referir a la componente x de la velocidad, por ejemplo, utilice vx o Vx

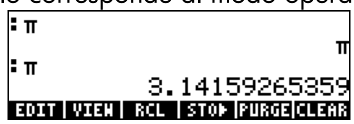
Selección del módulo

La opción *Modulo* de la forma interactiva CAS MODES representa un número (valor pre-selecto = *13*) utilizado en aritmética modular. Más detalles sobre aritmética modular se presentan en otras secciones.

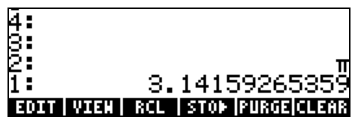
Modo CAS Numeric vs. Symbolic

Cuando se selecciona el modo *Numeric* en el CAS, ciertas constantes predefinidas en la calculadora se exhiben en su valor de punto flotante (floating-point value). Por preselección, la opción _*Numeric* se presenta desactivada, significar que esas constantes predefinidas serán exhibidas como su símbolo, más bien que su valor, en la exhibición de la calculadora.

La pantalla siguiente demuestra los valores de la constante π (el cociente de la longitud de la circunferencia a su diámetro) in el formato simbólico seguido por el numérico. Este ejemplo corresponde al modo operativo algebraico.



El mismo ejemplo, correspondiendo al modo de funcionamiento de RPN, se demuestra a continuación:

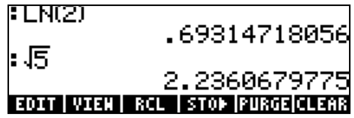


Modo CAS Approximate vs. Exact

Cuando se selecciona el modo *_Approx*, operaciones simbólicas (Vg.., integrales definidas, raíces cuadradas, etc.), serán calculadas numéricamente. Cuando la opción *_Approx* no está seleccionada (el modo Exact está activo), las operaciones simbólicas serán calculadas como expresiones algebraicas de forma cerrada, siempre que sea posible.

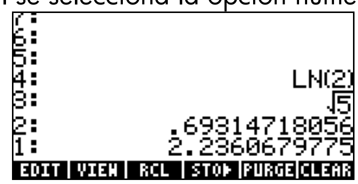
La pantalla siguiente demuestra un par de expresiones simbólicas escritas con el modo exacto activo con la calculadora en modo algebraico:

En modo algebraico, el objeto incorporado por el usuario se muestra en el lado izquierdo de la pantalla, seguido inmediatamente por un resultado en el lado derecho de la pantalla. Los resultados demostrados arriba muestran las expresiones simbólicas para *ln(2)*, i.e., el logaritmo natural de 2, y $\sqrt{5}$, i.e., la raíz cuadrada de 5. Si la opción *_Numeric* CAS se selecciona, los resultados correspondientes para estas operaciones son como sigue:



Las teclas necesarios para incorporar estos valores en modo algebraico son los siguientes: ↱ LN 2 ENTER √x 5 ENTER

Los mismos cálculos se pueden producir en modo de RPN. Los niveles *3:* y *4:* de la pantalla demuestran el caso del ajuste Exact del CAS (i.e., la opción *_Numeric* de CAS está sin seleccionar), mientras que los niveles *1:* y *2:* demostrar el caso en el cual se selecciona la opción numérica del CAS.

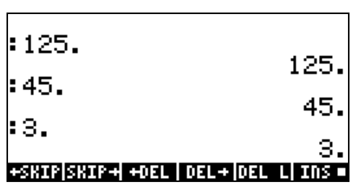


Las teclas requeridas son: 2 ↱ LN 5 √x ENTER

Un atajo del teclado para intercambiar los modos APPROX y EXACT consiste en usar: ↱ (mantener) ENTER. En este contexto, "mantener" significa mantener presionada la tecla ↱ y apretar simultáneamente la tecla ENTER.

Números reales vs. números enteros

Las operaciones del CAS utilizan números enteros para mantener la precisión completa de los cálculos. Los números reales se almacenan en la forma de una mantisa y de un exponente, y tienen precisión limitada. En el modo APPROX, sin embargo, siempre que usted incorpore un número entero, este se transforma automáticamente en un número real, según se ilustra a continuación:



Siempre que la calculadora liste un valor entero seguido por un punto decimal, está indicando que el número entero se ha convertido a una representación de numero real. Esto indicará que el número se escribió con el CAS fijado a modo APPROX.

Se recomienda que usted seleccione el modo EXACT para las aplicaciones del CAS, y cambie al modo APPROX si se lo pide la calculadora par completar una operación.

Para la información adicional sobre números reales y del enteros, así como otros objetos en la calculadora, referirse al capítulo 2.

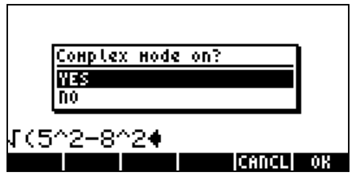
Modo CAS Complex vs. Real

Un número complejo es un número de la forma *a+bi*, en la cual *i*, definida por $i^2 = -1$ es la unidad imaginaria (los ingenieros eléctricos prefieren utilizar el símbolo *j*), y *a* y *b* son números reales. Por ejemplo, el número *2 + 3i* es un número complejo. Información adicional sobre operaciones con números complejos se presenta en el capítulo 4 de esta guía.

Cuando se selecciona la opción _*Complex* CAS, si una operación da lugar a un número complejo, el resultado será mostrado en la forma *a+bi* o en la forma de un par ordenado *(a,b)*. Por otra parte, cuando no se selecciona la opción _*Complex* CAS (i.e., la opción Real del CAS está activa), y una operación da lugar a un número complejo, se le solicitará cambiar al modo complejo. Si usted declina, la calculadora producirá un error.

Notar por favor que, en modo COMPLEJO el CAS puede realizar una gama más amplia de operaciones que en modo REAL, pero también será considerablemente más lento. Así, se recomienda que usted utiliza el modo REAL en la mayoría de los casos y cambie a COMPLEJO la calculadora así lo solicita en al completar una operación.

El ejemplo siguiente muestra el cálculo de la cantidad $\sqrt{5^2 - 8^2}$ usando el modo algebraico, con la opción REAL del CAS seleccionada. En este caso, le preguntan si usted desea cambiar el modo al complejo:

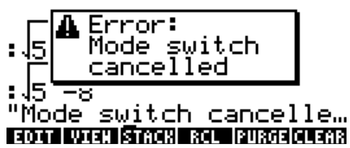


Si usted presiona la tecla OK, la opción compleja es activada, y el resultado es el siguiente:

Las teclas usadas para producir el resultado anterior son las siguientes:

√x ← () 5 ← yˣ 2 + 8 ← yˣ 2 ENTER

Cuando se le pida cambiar al modo COMPLEX, utilice: F6 . Si usted decide no aceptar el cambio al modo COMPLEX, usted obtiene el mensaje de error siguiente:



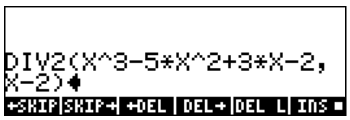
Modo CAS Verbose vs. no-verbose

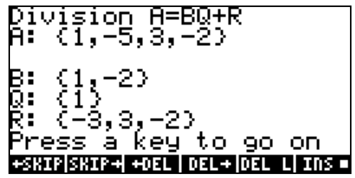
Cuando se selecciona la opción *_Verbose*, en ciertas aplicaciones del cálculo se proporcionan líneas de comentario en la exhibición principal. Si la opción *_Verbose* CAS no está activa, entonces esas aplicaciones del cálculo no mostrarán ninguna línea de comentario. Las líneas de comentario aparecerán momentáneamente en las líneas superiores de la exhibición mientras que se está calculando la operación.

Modo CAS Step-by-step (paso a paso)

Cuando se selecciona la opción *_Step/step* CAS, ciertas operaciones serán demostradas paso a la vez en la exhibición. Cuando no se selecciona la opción *_Step/step* CAS, entonces los pasos intermedios no serán demostrados.

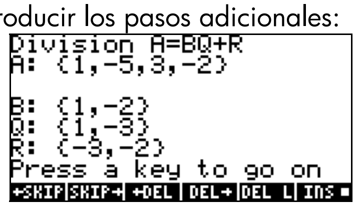
Por ejemplo, seleccionando la opción Step/step, las pantallas siguientes demuestran la división paso a paso de dos polinomios, a saber, $(X^3$-$5X^2$+3X-2)/(X-2). Esto se logra usando la función DIV2 mostrada abajo. Presione ENTER para demostrar el primer paso:

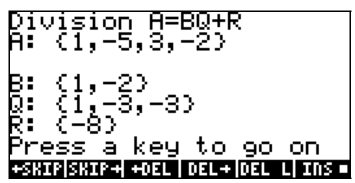


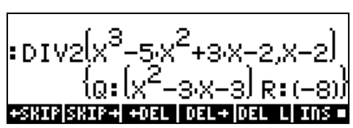


La pantalla nos informa que la calculadora está funcionando una división de polinomios A/B, tal que A = BQ + R, donde Q = cociente, y R = residuo. Para el caso bajo consideración, A = X^3-$5X^2$+3X-2, y B = X-2. Estos polinomios son representados en la pantalla por las listas de sus coeficientes. Por ejemplo, la expresión A: {1,-5,3,-2} representa el polinomio A = X^3-$5X^2$+3X-2, B:{1,-2} representa el polinomio B = X-2, Q: {1} representa el polinomio Q = X, y R:{-3,3,-2} representa el polinomio R = -$3X^2$+3X-2.

A este punto, presione, por ejemplo, la tecla ENTER. Continué presionando ENTER para producir los pasos adicionales:







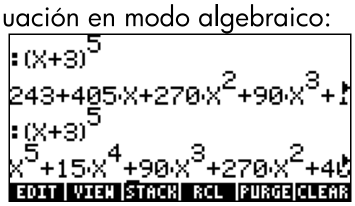
Así, los pasos intermedios demostrados representan los coeficientes del cociente y del residuo de la división sintética paso a paso como habría sido realizado a mano, es decir,

$$\frac{X^3-5X^2+3X-2}{X-2} = X^2 + \frac{-3X^2+3X-2}{X-2} =$$

$$X^2-3X+\frac{-3X-2}{X-2} = X^2-3X-3X-\frac{8}{X-2}.$$

Modo CAS de potencia creciente

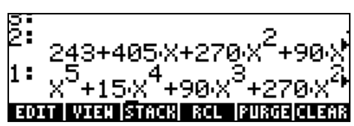
Cuando se selecciona la opción *_Incr pow* CAS, los polinomios serán enumerados de modo que los términos tengan potencias crecientes de la variable independiente. Cuando no se selecciona la opción *_Incr pow* (valor pre-selecto) entonces los polinomios serán enumerados de modo que los términos tengan potencias decrecientes de la variable independiente. Un ejemplo se muestra a continuación en modo algebraico:



En el primer caso, el polinomio $(X+3)^5$ se amplía con potencias crecientes de *X*, mientras que en el segundo caso, el polinomio muestra potencias decrecientes de *X*. Las teclas en ambos casos son las siguientes:

← () X + 3 ▶ Y^x 5 ENTER

En el primer casa la opción *_Incr pow* se seleccionó, mientras que en el segundo no fue seleccionada. El mismo ejemplo, en la notación de RPN, se demuestra abajo:



La misma secuencia de teclas fue utilizada para producir cada uno de estos resultados:

' ← () X + 3 ▶ Y^x 5 ENTER EVAL

Modo CAS Rigorous

Cuando se selecciona la opción _*Rigorous* CAS, la expresión algebraica *|X|*, i.e., el valor absoluto, no se simplifica a *X*. Cuando no se selecciona la opción _*Rigorous* CAS, la expresión algebraica *|X|* se simplifica a *X*.

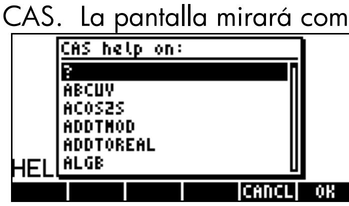
El CAS puede solucionar una variedad más grande de problemas si el modo riguroso no se fija. Sin embargo, el resultado, o el dominio en el cual el resultado es aplicable, pueden ser muy limitado.

Simplificación de expresiones no racionales

Cuando se selecciona la opción _*Simp Non-Rational* CAS, las expresiones no-racionales serán simplificadas automáticamente. Por otra parte, cuando no se selecciona la opción _*Simp Non-Rational* CAS, las expresiones no-racionales no serán simplificadas automáticamente.

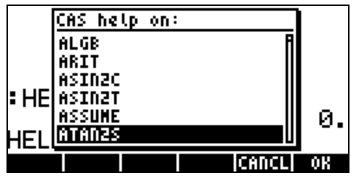
Usando la función informativa del CAS

Encender la calculadora, y presione la tecla TOOL para activar el menú TOOL. Después, presione la tecla F2, seguida de la tecla ENTER, para activar la función informativa del CAS. La pantalla mirará como sigue:



A este punto se le proporcionará una lista de todos las funciones del CAS en orden alfabético. Usted puede utilizar la tecla ▼ para navegar a través de la lista. Para moverse hacia arriba en la lista use ▲ . Las teclas direccionales están situadas en el lado derecho del teclado entre las primera y cuarta fila.

Suponer que usted desea encontrar la información sobre el comando ATAN2S (función ArcTANgent-to-Sine). Presione la tecla ▼, hasta que la función ATAN2S esté seleccionada:



Notar que, en este caso, las teclas del menú F5 y F6 son las únicas con instrucciones asociadas a ellas, a saber:

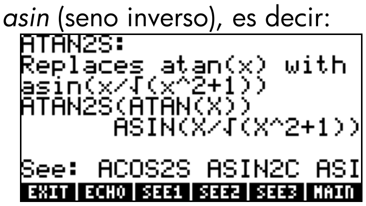
CANCL F5 CANCeLar la función informativa del CAS
OK F6 Active la función informativa del CAS para la función seleccionada

Si usted presiona la tecla CANCL F5, la función informativa del CAS se cancela, y la calculadora vuelve a la pantalla normal.

Para ver el efecto de usar OK en la función informativa del CAS, repitamos los pasos usados arriba para la selección de la función ATAN2S en la lista de las funciones del CAS: HELP F2 ENTER ▼ ▼ …(10 times)

Entonces, presione la tecla OK F6 para obtener la información sobre la función ATAN2S.

La función informativa del CAS indica que la función ATAN2S substituye el valor de *atan(x)*, la tangente inversa de un valor *x*, por su equivalente en términos de la función *asin* (seno inverso), es decir:



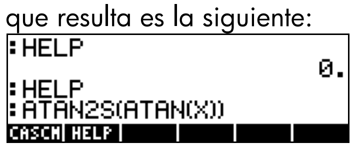
Las cuarta y quinta líneas en la pantalla proporcionar un ejemplo del uso de la función ATAN2S. La línea cuatro, a saber, ATAN2S(ATAN(X)), es la declaración de la operación que se realizará, mientras que la línea cinco, a saber, ASIN(X/√(X^2+1)), es el resultado.

La última línea en la pantalla, comenzando con la partícula *See:*, es un enlace de referencia que enumera otras funciones del CAS relacionadas con la función ATAN2S.

Note que hay seis funciones asociadas a las llaves suaves del menú en este caso (usted puede comprobar que haya solamente seis funciones porque al presionar NXT no produce ninguna tecla de menú adicional). Las funciones de las teclas del menú son las siguientes:

EXIT	F1	Salir de la función informativa del CAS
ECHO	F2	Copiar la función del ejemplo a la pantalla y salir
SEE1	F3	Ver el primer enlace (si existe) en la lista de referencias
SEE2	F4	Ver el segundo enlace (si existe) de la lista de referencias
SEE3	F5	Ver el tercer enlace (si existe) de la lista de referencias
MAIN	F6	Volver a la lista PRINCIPAL en la función informativa del CAS

En este caso deseamos copiar (ECHO) el ejemplo en la pantalla presionando ECHO F2 . La pantalla que resulta es la siguiente:



Ahora hay cuatro líneas de la pantalla ocupada con salida. Las primeras dos líneas superiores corresponden al primer ejercicio con la función informativa del CAS en cuál cancelamos el pedido de ayuda. La tercera línea de arriba a abajo muestra la llamada más reciente a la función informativa del CAS, mientras que la ultima línea muestra la copia (ingles, ECHO, o eco) de la función del ejemplo. Para activar la función copiada presione ENTER. El resultado es:

Notar que, a medida que se producen nuevas líneas de salida, la pantalla empuja las líneas existentes hacia arriba y llena la parte inferior de la pantalla con más líneas de salida.

La función informativa del CAS, descrita en esta sección, es muy útil para ver la definición de las muchas funciones del CAS disponibles en la calculadora. Cada entrada en la función informativa del CAS, siempre que sea apropiado, tendrá un ejemplo del uso de la función, así como referencias según se mostró en este ejemplo.

Para navegar rápidamente a una función particular en la lista de del CAS del informativa del función sin tener que utilizar las llaves de flecha toda la hora, podemos utilizar un atajo que consiste en mecanografiando la primera letra en el nombre de la función. Suponga que deseamos encontrar la información sobre la función IBP (inglés, Integration By Parts, o integración por partes), una vez que la lista de la función informativa del CAS está disponible, use la tecla ALPHA (primera llave en la cuarta fila de abajo hacia arriba del teclado) seguido por la tecla para la letra i (igual que la tecla TOOL), i.e., ALPHA I. Esto le llevará automáticamente a la primera función que comienza con *i*, a saber, IBASIS. Entonces, usted puede utilizar la tecla ▼, dos veces, para encontrar la función IBP. Al presionar la tecla OK F6, activamos la función informativa del CAS para IBP. Presione MAIN F6 para recuperar la lista principal de funciones, o EXIT F1 para salir.

Referencias para los comandos que no pertenecen al CAS

La facilidad de la ayuda contiene las entradas para todos los comandos desarrollados para el CAS (Computer Algebraic System). Hay una gran cantidad de otras funciones y comandos que fueron desarrollados originalmente para las calculadoras de la serie HP 48G que no se incluyen en la facilidad de la ayuda. Las referencias para esos comandos son la *HP 48G Series guía del usuario* (HP Part No. 00048-90126) y la *HP 48G Series Advanced User's Reference Manual* (HP Part No. 00048-90136) ambos publicadas por Hewlett-Packard Company, Corvallis, Oregon, en 1993.

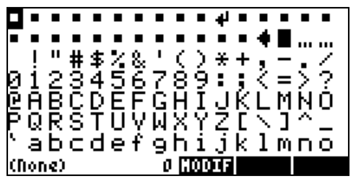
Términos y condiciones para el uso del CAS

El uso del software del CAS requiere que el usuario tenga el conocimiento matemático apropiado. No se proveen garantías para el funcionamiento del software del CAS, sino lo permitido por ley aplicable. A menos que se indique lo contrario, el responsable de la licencia del software del CAS lo provee sin garantía de ninguna clase, expresa o implícita, incluyendo, pero no limitada a, las garantías implicadas de la comerciabilidad y la aplicabilidad a un propósito particular. El riesgo completo en cuanto a la calidad y el funcionamiento del software del CAS es responsabilidad del usuario. Si el software del CAS resultara ser defectuoso, el usuario asume el costo total del mantenimiento, reparación o corrección necesarias.

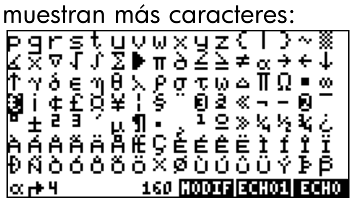
Bajo ninguna circunstancia, a menos que sea requerida por la ley, el proveedor de la licencia será responsable por daños, incluyendo cualquier daño general, especial, incidental, o consecuente, resultante del uso o incapacidad de usar el software CAS (que incluye pero no está limitado a la pérdida de datos o los datos convertidos a inexactos o las pérdidas sostenidas por usted o por terceros o la inhabilidad del CAS de funcionar con cualquier otro programa), incluyendo el caso en que el proveedor de la licencia o la contraparte hayan sido advertidos de la posibilidad de tales daños. Si es requerido por la ley aplicable, el importe a pagar máximo por los daños por el proveedor de la licencia no excederá la cantidad de los derechos pagada por Hewlett-Packard al proveedor de la licencia del software del CAS.

Apéndice D
Caracteres adicionales

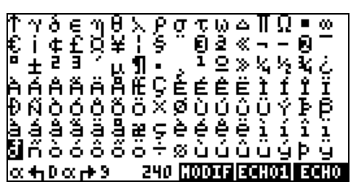
Si bien se pueden utilizar cualquiera de las letras mayúsculas y minúsculas del teclado, existen 255 caracteres usables en la calculadora, incluyendo caracteres especiales como θ, λ, etc., que se pueden utilizar en expresiones algebraicas. Para tener acceso a estos caracteres utilizamos la combinación ↱ CHARS en el teclado (asociada a la llave de EVAL). El resultado se muestra en la pantalla siguiente:



Utilizando las teclas direccionales, ◀ ▶ ▼ ▲, podemos navegar a través de la colección de caracteres. Por ejemplo, al moverse el cursor hacia abajo en la pantalla se muestran más caracteres:



Moviendo el cursor aún más abajo, produce los siguientes caracteres:



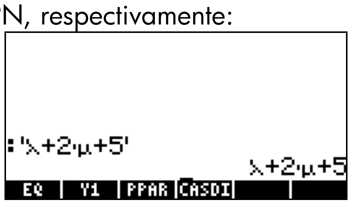
Habrá un carácter destacado siempre. La línea más baja en la pantalla mostrará el "atajo" para escribir el carácter destacado, así como el código de carácter de ASCII correspondiente. (por ejemplo, en la pantalla anterior, el atajo es α↰Dα↱9, es decir, ALPHA ↰ D ALPHA ↱ 9, y el código ASCII es 240). La pantalla también muestra tres funciones asociadas con las teclas del menú, f4, f5, y f6. Estas funciones son:

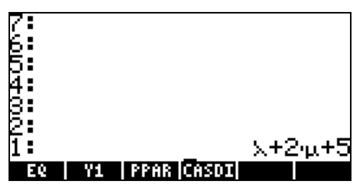
MODIF: Abre una pantalla de los gráficos donde el usuario puede modificar el carácter destacado. Utilícese esta opción cuidadosamente, puesto que alterará el carácter modificado hasta que se encienda nuevamente la calculadora. (Imagínese el efecto de cambiar el gráfico del carácter 1 de manera que parezca un 2!).
ECHO1: Copia el carácter destacado a una línea en la pantalla o al escritor de ecuaciones (EQW) y regresa el control a la pantalla normal (es decir, copia un solo caracter la pantalla).
ECHO: Copia el carácter destacado a una línea en la pantalla o al escritor de ecuaciones (EQW), pero el cursor permanece en la pantalla de caracteres permitiendo que el usuario seleccione caracteres adicionales (es decir, copia una cadena de caracteres a la pantalla). Para salir de la pantalla de caracteres presiónese ENTER.

Por ejemplo, supóngase que se quiere escribir la expresión: $\lambda^2 + 2\mu + 5$

Se recomienda lo siguiente, usando la pantalla ya sea en modo algebraico o de RPN:

Use las teclas: ' ↱ CHARS para activar la pantalla de caracteres. Después, utilícense las teclas direccionales para destacar el carácter λ. Presiónese ECHO1 (es decir, la tecla F5), y continúe con: + 2 × ↱ CHARS. A continuación, utilícense las teclas direccionales para destacar el carácter μ. Presiónese ECHO1 (es decir, la tecla F5), y conclúyase la expresión con: + 5 ENTER. Aquí está el resultado de este ejercicio en modos algebraicos y de RPN, respectivamente:





A continuación se listan los caracteres más comúnmente utilizados con la combinación ALPHA ↱:

Letras griegas

α	(alfa)	ALPHA ↱ A
β	(beta)	ALPHA ↱ B
δ	(delta)	ALPHA ↱ D
ε	(epsilón)	ALPHA ↱ E
θ	(theta)	ALPHA ↱ T
λ	(lambda)	ALPHA ↱ N
μ	(mu)	ALPHA ↱ M
ρ	(ro)	ALPHA ↱ F
σ	(sigma)	ALPHA ↱ S
τ	(tau)	ALPHA ↱ U
ω	(omega)	ALPHA ↱ V
Δ	(delta mayúscula)	ALPHA ↱ C
Π	(pi mayúscula)	ALPHA ↱ P

Otros caracteres

~	(tilde)	ALPHA ↱ 1
!	(factorial)	ALPHA ↱ 2
?	(interrogación)	ALPHA ↱ 3
\	(pleca hacia adelante)	ALPHA ↱ 5
∡	(símbolo de ángulo)	ALPHA ↱ 6
@	('arroba')	ALPHA ↱ ENTER

Algunos caracteres utilizados comúnmente y que no tienen atajos simples para escribirse son: $\bar{x}$ (la media), γ (gamma), η (eta), Ω (omega mayúscula). Estos caracteres pueden copiarse de la pantalla CHARS : ↱ CHARS .

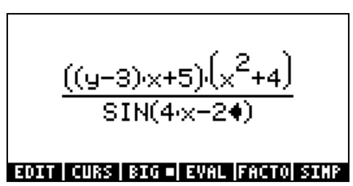
Apéndice E
Diagrama de selección en el Escritor de Ecuaciones

El diagrama de una expresión muestra cómo el Escritor de ecuaciones interpreta una expresión. La forma del diagrama de la expresión se determina por un número de reglas conocidas como la jerarquía de la operación. Las reglas son las siguientes:

1. Las operaciones en paréntesis se ejecutan primero, del más interior a los paréntesis exteriores, y de izquierda a derecha en la expresión.
2. Los argumentos de las funciones se ejecutan después, de izquierda a derecha.
3. Las funciones se ejecutan después, de izquierda a derecha.
4. Las potencias de números se ejecutan después, de izquierda a derecha.
5. Las multiplicaciones y las divisiones se ejecutan después, de izquierda a derecha.
1. Las adiciones y la substracción se ejecutan por último, de izquierda a derecha.

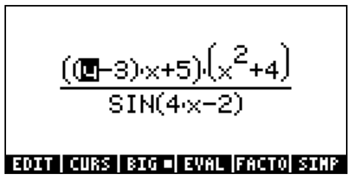
La ejecución de izquierda a derecha significa que, si dos operaciones de la misma jerarquía, por ejemplo, dos multiplicaciones, existen en una expresión, la primera multiplicación a la izquierda será ejecutada antes de la segunda, etcétera.

Considérese, por ejemplo, la expresión mostrada a continuación en el escritor de ecuaciones:

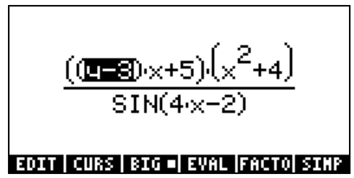


El cursor de inserción (←) está localizado actualmente a la izquierda del 2 en el argumento de la función SIN en el denominador. Presiónese la tecla direccional ▽ para activar el cursor editor (☐) alrededor del 2 en el denominador. A continuación, presiónese la tecla direccional ◁, continuamente, hasta que el cursor encierre el primer término en el numerador. A continuación, presiónese la tecla direccional vertical hacia arriba para activar el cursor selector (■) alrededor de la y. Al presionar la tecla direccional vertical hacia arriba , continuamente, podemos seguir el diagrama de la expresión que nos mostrará la evaluación de la expresión. He aquí la secuencia de operaciones destacadas por la tecla :

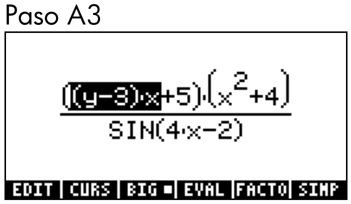
Paso A1



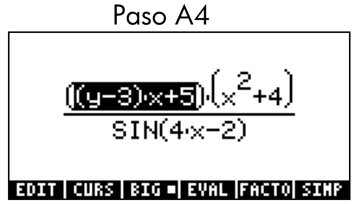
Paso A2



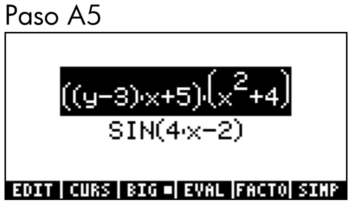
Paso A3



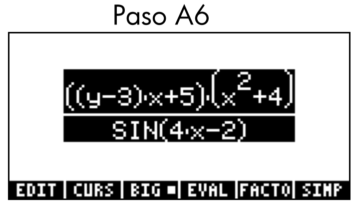
Paso A4



Paso A5

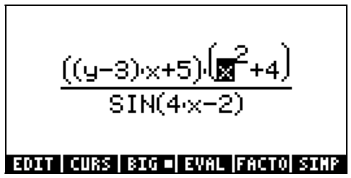


Paso A6

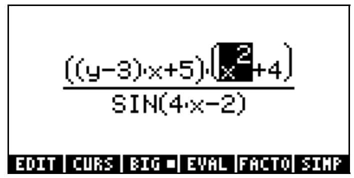


Notamos el uso de las reglas de la jerarquía de operaciones en esta selección. Primero la y (Paso A1). Después, y-3 (Paso A2, paréntesis). Después, (y-3)x (Paso A3, multiplicación). Después (y-3)x+5, (Paso A4, adición). Después, ((y-3)x+5)(x^2+4) (Paso A5, multiplicación), y, finalmente, ((y-3)x+5)(x^2+4)/SIN(4x-2) (Paso A6, división). Es importante precisar que la multiplicación en Paso A5 incluye el primer término, ((y-3)x+5) con un segundo término (x^2+4), el cuál ya ha sido calculado. Para ver los pasos para calcular este segundo término, presiónese la tecla , continuamente, hasta que el cursor editor aparezca alrededor de la y, una vez más. Después, presiónese la llave direccional hacia la derecha hasta que el cursor esté sobre la x en el segundo término en el numerador. Después, presionar la tecla direccional hacia arriba para seleccionar esta x. Los pasos en la evaluación de la expresión, empezando en este punto, se demuestran a continuación:

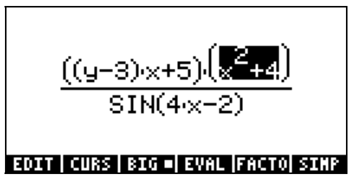
Paso B1



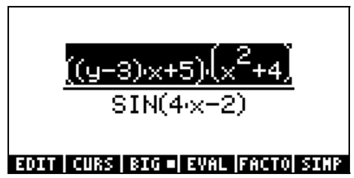
Paso B2



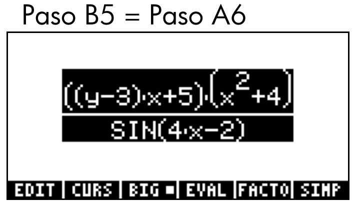
Paso B3



Paso B4 = Paso A5

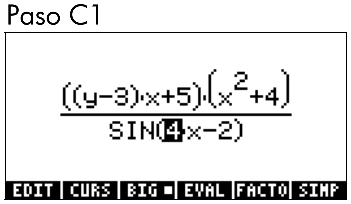


Paso B5 = Paso A6

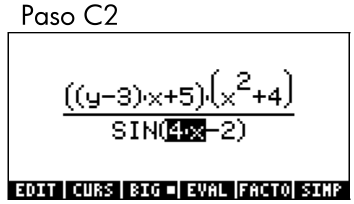


Podemos también seguir la evaluación de la expresión que empieza con el 4 en la en el argumento de la función SIN en el denominador. Presiónese la tecla , continuamente, hasta que aparezca el cursor selector alrededor de la y. Después, presiónese la tecla direccional hacia la derecha hasta que el cursor esté sobre el 4 en el denominador. Después, presiónese la tecla para seleccionar este 4. Los pasos en la evaluación de la expresión, empezando con este punto, se muestran a continuación.

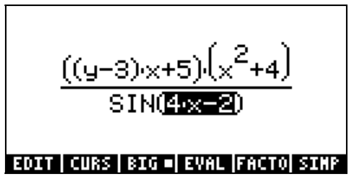
Paso C1



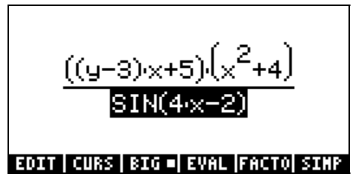
Paso C2



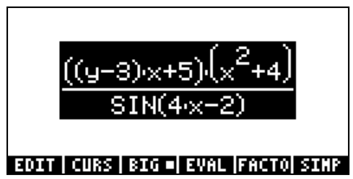
Paso C3



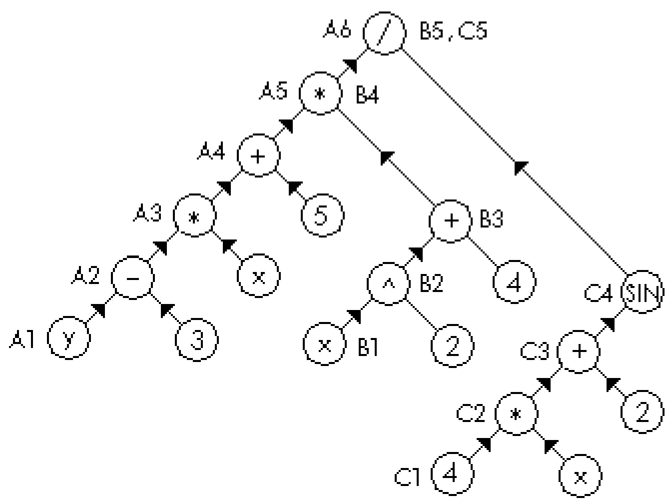
Paso C4



Paso C5 = Paso B5 = Paso A6



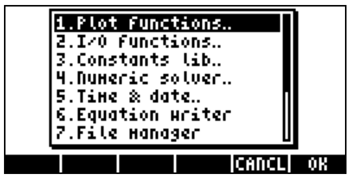
El diagrama de la expresión presentada anteriormente se muestra a continuación:

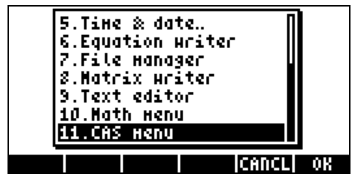


Los pasos en la evaluación de los tres términos (A1 a A6, B1 a B5, y C1 a C5) se muestran al lado de los círculos que contienen números, variables, u operadores.

Apéndice F
El menú de aplicaciones (APPS)

El menú de las aplicaciones (APPS) está disponible con la tecla APPS (primera llave en la segunda fila del teclado). La llave de APPS muestra las siguientes funciones:

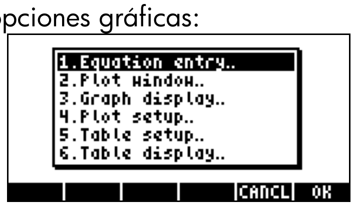




Las diversas funciones se describen a continuación:

Funciones de diagramación (Plot functions..)

Al seleccionar la opción *1. Plot functions..* en el APPS producirá la lista siguiente del menú de opciones gráficas:



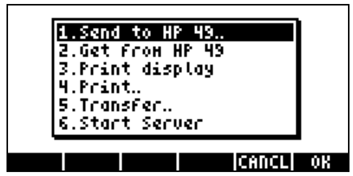
Estas seis opciones son equivalentes a las secuencias de teclas enumeradas a continuación:

Escritura de ecuación	← Y=	Ventana gráfica	← WIN
Mostrar gráficas	← GRAPH	Preparar gráfica	← 2D/3D
Preparar tabla	← TBLSET	Mostrar tabla	← TABLE

Estas funciones se presentan detalladamente en el capítulo 12.

Funciones de entrada / salida (I/O functions..)

La selección de la opción *2. I/O functions..* en APPS el menú producirá la lista siguiente del menú de las funciones de la entrada-salida:

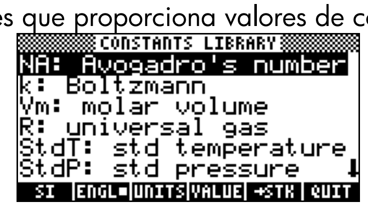


Estas funciones se describen después:

Send to HP 49..	Enviar los datos a otra calculadora
Get from HP 49	Recibir los datos de otra calculadora
Print display	Enviar la pantalla a la impresora
Print..	Objeto seleccionado se envía a la impresora
Transfer..	Transferencia de datos a otro equipo
Start Server..	Calculadora fijada como servidor para la comunicación con las computadoras

Biblioteca de constantes (Constants lib..)

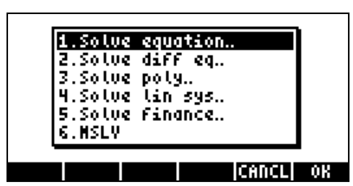
La selección de la opción *3. Constants lib..* en APPS produce un menú de biblioteca de constantes que proporciona valores de constantes físicas:



La biblioteca de las constantes se discute detalladamente en el capítulo 3.

Soluciones numéricas (Numeric solver..)

La selección de la opción *4. Num.Slv* en el menú APPS produce el menú de soluciones numéricas:



Esta operación es equivalente a la secuencia de teclas ↱ NUM.SLV . El menú de soluciones numéricas se presenta detalladamente en los capítulos 6 y 7.

Tiempo del día y fecha (Time & date..)

La selección de la opción *5.Time & date..* en el menú APPS produce el menú del tiempo del día y de la fecha:

Esta operación es equivalente a la secuencia de teclas ↱ TIME . el menú del tiempo del día y de la fecha se presenta detalladamente en el capítulo 25.

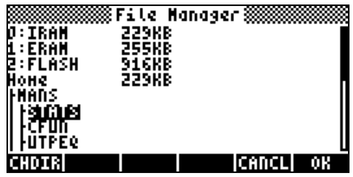
Escritor de ecuaciones (Equation writer..)

La selección de la opción *6.Equation writer..* en el menú APPS abre el escritor de ecuaciones:

Esta operación es equivalente a la secuencia de teclas ↱ EQW . El escritor de ecuaciones se presenta detalladamente en el capítulo 2. Los ejemplos que utilizan el escritor de ecuaciones están disponibles a través de esta guía.

Manejo de archivos (File manager..)

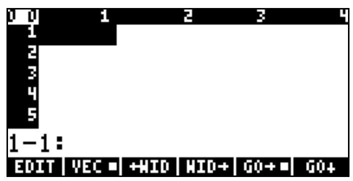
La selección de la opción *7.File manager..* en el menú APPS activa la función para el manejo de archivos:



Esta operación es equivalente a la secuencia de teclas FILES . La función de manejo de archivos se presenta en el Capítulo 2.

Escritor de matrices (Matrix writer..)

La selección de la opción *8.Matrix writer..* en el menú APPS activa el escritor de matrices:



Esta operación es equivalente a la secuencia de teclas MTRW . El escritor de matrices se presenta detalladamente en el Capítulo 10.

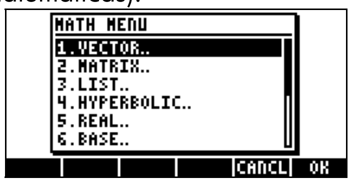
Editor de texto (Text editor..)

La selección de la opción *9.Text editor..* en el menú APPS activa el editor de texto:

El editor de textos puede ser activado en muchos casos presionando la tecla direccional ▼. Si el objeto en la pantalla es un objeto algebraico, al presionar la tecla ▼ se activará el escritor de ecuaciones. El editor de texto se introduce el capítulo 2, y se presenta en detalle en el Apéndice L.

Menú de matemáticas (Math menu ..)

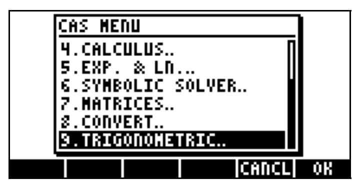
La selección de la opción *10.Math menu..* en el menú APPS produce el menú MTH (matemáticas):



Esta operación es equivalente a la secuencia de teclas ← MTH . El menú MTH se introduce en el capítulo 3 (números verdaderos). Otras funciones del menú MTH se presentan en los capítulos 4 (números complejos), 8 (listas), 9 (vectores), 10 (matrices), 11 (operaciones con matrices), 16 (transformada rápida de Fourier), 17 (funciones de la probabilidad), y 19 (números en diversas bases).

El menú CAS (CAS menu..)

La selección de la opción *11.CAS menu..* en el menú APPS produce el menú CAS o SIMBÓLICO.



Esta operación está también disponible al presionar la tecla SYMB . El menú CAS o SIMBÓLICO se introduce en el capítulo 5 (operaciones algebraicas y aritméticas). Otras funciones del menú del CAS se presentan en los capítulos 4 (números complejos), 6 (soluciones de las ecuaciones), 10 (matrices), 11 (operaciones con matrices), 13 (cálculo), 14 (cálculo multivariado), y 15 (análisis vectorial).

Apéndice G
Atajos útiles

Se presentan a continuación un número de atajos del teclado usados comúnmente en la calculadora:

- Ajuste del contraste de la pantalla: ON (manténgase) +, o ON (manténgase) −
- Alternar los modos RPN y ALG: MODE +/- OK ó MODE +/- ENTER.
- Encender y apagar la señal de sistema 95 (modo operativo ALG vs. RPN)
  MODE FLAGS ▲ ← ▲ ← ▲ ← ▲ CHK
  - En el modo de ALG, Cf(-95) selecciona modo de RPN
  - En el modo de RPN, 95 +/- ENTER SF selecciona modo de ALG
- Para alternar los modos EXACT y APROX, manténgase presionada la tecla → y presiónese la tecla ENTER simultáneamente, es decir, → (manténgase) ENTER.
- Encender y apagar la señal de sistema 105 (modo EXACT vs. APROX en el CAS): MODE FLAGS ▲ ← ▲ ← ▲ ▲ ▲ CHK
  - En modo ALG,
    Sf(-105) selecciona modo APROX en el CAS
    Cf(-105) selecciona modo EXACT del CAS
  - En modo RPN,
    105 +/- ENTER SF selecciona modo APROX en el CAS
    105 +/- ENTER CF selecciona modo EXACT del CAS
- Encender y apagar la señal de sistema 117 (CHOOSE boxes vs. SOFT menus): MODE FLAGS ▲ ← ▲ ▼ CHK

- En modo ALG,
  SF(-117) selecciona teclas de menú (SOFT menus)
  CF(-117) selecciona listas de menú (CHOOSE BOXES)

- En modo RPN,
  117 +/- ENTER SF selecciona teclas de menú (SOFT menus)
  117 +/- ENTER CF selecciona listas de menú (SOFT menus)

- Para cambiar las medidas angulares:
  - A grados: ALPHA ALPHA D E G ENTER
  - A radianes: ALPHA ALPHA R A D ENTER

- Caracteres especiales:
  - Símbolo de ángulo (∠): ALPHA ↱ 6
  - Símbolo de factorial (!): ALPHA ↱ 2
  - Símbolo de grado (°): ALPHA ↱ (manténgase) 6

- Asegurando el teclado alfabético:
  - Asegura el teclado alfabético (mayúsculas): ALPHA ALPHA
  - Libera el teclado alfabético (mayúsculas): ALPHA
  - Asegura el teclado alfabético (minúsculas): ALPHA ALPHA ↰ ALPHA
  - Libera el teclado alfabético (minúsculas): ↰ ALPHA ALPHA

- Letras griegas:

Alfa (α):	ALPHA ↱ A	Beta (β):	ALPHA ↱ B
DELTA (Δ):	ALPHA ↱ C	Delta (d):	ALPHA ↱ D
Epsilón (ε):	ALPHA ↱ E	Rho (ρ):	ALPHA ↱ F
Mu (μ):	ALPHA ↱ M	Lambda (λ):	ALPHA ↱ N
PI (Π):	ALPHA ↱ P	Sigma (σ):	ALPHA ↱ S
Theta (θ):	ALPHA ↱ T	Tau (t):	ALPHA ↱ U
Omega (ω):	ALPHA ↱ V		

- Operaciones a nivel de sistema (manténgase presionada la tecla ON, remuévase después de escribir la segunda o tercera tecla):

- ON (manténgase) F1 F6 : Recomenzar "frío" – se borra toda la memoria
- ON (manténgase) F2 : Cancela tecla
- ON (manténgase) F3 : Recomenzar "caliente" – se preserva la memoria
- ON (manténgase) F4 : Comienza auto prueba interactiva
- ON (manténgase) F5 : Comienza auto prueba continua
ON (manténgase) SPC : Apagado profundo – se detiene el contador de segundos
- ON (manténgase) F1 : Realiza la descarga de la pantalla
- ON (manténgase) F4 : Cancela la siguiente alarma repetida

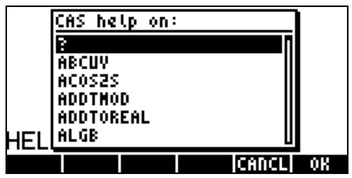
- Menús no accesibles desde el teclado: En modo RPN, escriba: número_de_menú, escriba MENU. En modo ALG, escriba MENU(número_de_menú). El número_de_menú puede ser:
  - Menú STAT : 96
  - Menú PLOT : 81
  - Menú SOLVE : 74, o use ↱ (manténgase) 7
  - Menú UTILITY : 113

- Otros menús:
  - Menú MATHS: ALPHA ALPHA M A T H S ENTER
  - Menú MAIN: ALPHA ALPHA M A I N ENTER

- Otros atajos en el teclado:
  - ↱ (manténgase) 7 : Menú SOLVE (menú 74)
  - ↰ (manténgase) MODE : Menú PRG/MODES(Capítulo 21)
  - ↰ (manténgase) ▼ : Activa editor de texto (App. L)
  - ↰ (manténgase) UPDIR : HOME(), activar directorio HOME
  - ↰ (manténgase) PREV : Recobrar el último menú activo
  - ↱ (manténgase) ▼ : Listar variables o funciones de menú
  - ↱ (manténgase) CHARS : Menú PRG/CHAR (Capítulo 21)

Apéndice H
La función informativa del CAS

La función informativa del CAS está disponible con la secuencia de teclas TOOL NXT HELP ENTER. La siguiente pantalla muestra la primera página del menú en el listado de la función informativa del CAS.



Las funciones se listan en orden alfabético. Utilizando las teclas direccionales ▲▼ se puede navegar a través de la lista de funciones. Algunas sugerencias útiles en la navegación de la lista de funciones se muestran a continuación:

- Manténgase presionada la tecla ▼ y obsérvese la pantalla hasta que la función deseada aparezca en la pantalla. A este punto, usted puede soltar la tecla direccional ▼. Probablemente, la función de interés no será seleccionado a este punto (el cursor estará más adelante o más atrás de la función). Sin embargo, usted puede utilizar las teclas verticales ▲▼, paso a paso, para localizar la función que usted desea, y entonces presione la tecla OK.
- Si, al mantener presionada la tecla vertical ▼ se pasa uno de la función deseada, presiónese la tecla ▲ para regresar a esa función. Refínese la selección con las teclas verticales ▲▼, paso a paso.
- Uno puede escribir la primera tecla de una función, y después utilizar la tecla vertical ▼ para localizar esa función particular. Por ejemplo, si se trata de localizar la función DERIV, después de activar la función informativa del CAS (TOOL NXT HELP ENTER), escríbase ALPHA D. Esta acción seleccionará la primera función que empieza con D, es decir, DEGREE. Para localizar la función DERIV, presiónese ▼, dos veces. Para activar esa función, presione OK.

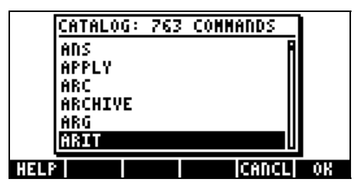
- Usted puede escribir dos o más letras de la función de interés, asegurando el teclado alfabético. Esto le llevará a la función de interés, o a su vecindad. Luego, usted necesita liberar el teclado de alfabético, y utilizar las teclas verticales ▲▼ para localizar la función (si es necesario). Presiónese OK para activar la función. Por ejemplo, para localizar el comando PROPFRAC, usted puede utilizar una de las secuencias de teclas siguientes:

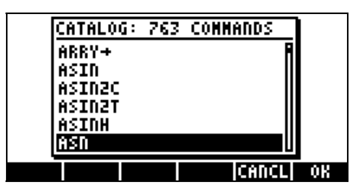
  TOOL NXT HELP ENTER ALPHA ALPHA P R ALPHA ▼ ▼ OK
  TOOL NXT HELP ENTER ALPHA ALPHA P R O ALPHA ▼ OK
  TOOL NXT HELP ENTER ALPHA ALPHA P R O P ALPHA OK

Véase el Apéndice C para más información sobre el CAS (sistema algebraico de la computadora). El apéndice C incluye otros ejemplos del uso de la función informativa del CAS.

Apéndice I
Catálogo de funciones

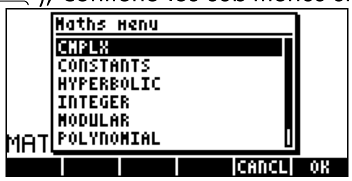
Ésta es una lista de las funciones en el catálogo de funciones (→ _CAT_). Funciones que pertenecen al CAS (Computer Algebraic System) se mencionan en el Apéndice H. Acceso a la función informativa del CAS estará disponible para aquellas funciones que muestren la tecla de menú HELP cuando se escoja una función particular. Presiónese esta tecla de menú para conseguir acceso a la función informativa del CAS para una función dada. Las primeras pantallas del catálogo se demuestran a continuación:





Apéndice J
El menú MATHS

El menú MATHS, accesible a través de la función MATHS (disponible en el catálogo de funciones ‗CAT‗), contiene los sub-menús siguientes:



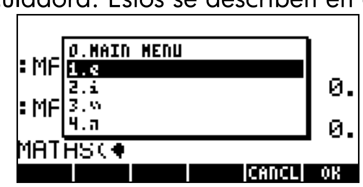
El sub-menu CMPLX

El sub-menu CMPLX contiene las funciones pertinentes a las operaciones con números complejos:

Estas funciones se describen en el capítulo 4.

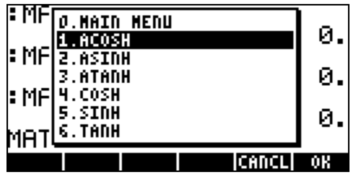
El sub-menu CONSTANTS

El sub-menu de las CONSTANTES proporciona el acceso a las constantes matemáticas de la calculadora. Éstos se describen en el capítulo 3:



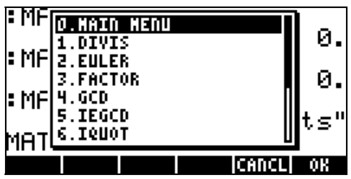
El sub-menu HYPERBOLIC

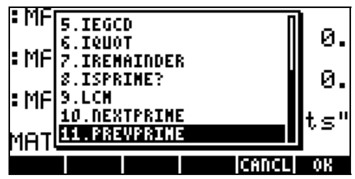
El sub-menu HYPERBOLIC contiene las funciones hiperbólicas y sus inversas. Estas funciones se describen en el capítulo 3.



El sub-menú INTEGER

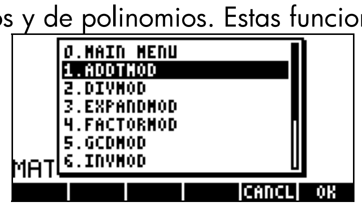
El sub-menu INTEGER provee funciones para los números de manipulación de números enteros y algunos polinomios. Estas funciones se presentan en el capítulo 5:

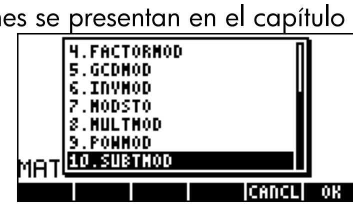




El sub-menú MODULAR

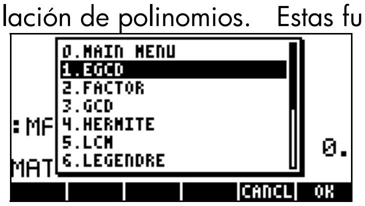
El sub-menu MODULAR provee funciones para la aritmética modular de números y de polinomios. Estas funciones se presentan en el capítulo 5:

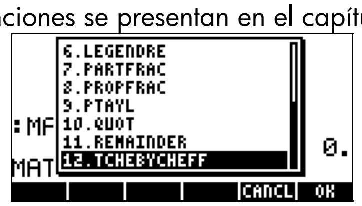




El sub-menu POLYNOMIAL

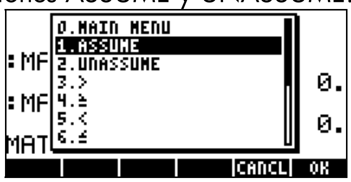
El sub-menu POLYNOMIAL incluye las funciones para generación y manipulación de polinomios. Estas funciones se presentan en el capítulo 5:





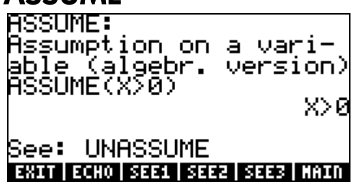
El sub-menú TESTS

El sub-menú TESTS incluye operadores relacionales (por ejemplo, ==, <, etc.), operadores lógicos (por ejemplo, AND, OR, etc.), la función IFTE, y las instrucciones ASSUME y UNASSUME.

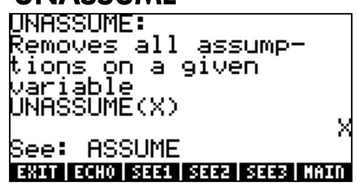


Los operadores relacionales y lógicos se presentan en el Capítulo 21 en el contexto de programar la calculadora en lenguaje UserRPL. La función IFTE se presenta en el Capítulo 3. Las funciones ASSUME y UNASSUME se presentan a continuación, utilizando la función informativa del CAS (véase el apéndice C).

ASSUME

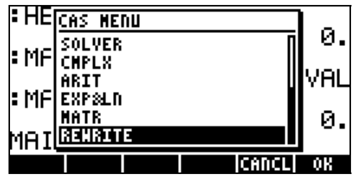


UNASSUME



Apéndice K
El menú MAIN

El menú MAIN se activa a través del catálogo de funciones. Este menú incluye los siguientes sub-menús:



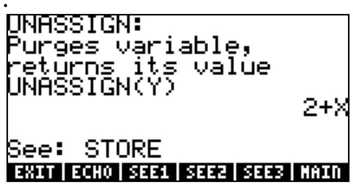
La función CASCFG

Esta es la primera función en el menú MAIN. Esta función configura el CAS. Para información sobre la configuración del CAS, véase el Apéndice C.

El sub-menú ALGB

El sub-menú ALGB incluye las siguientes funciones:

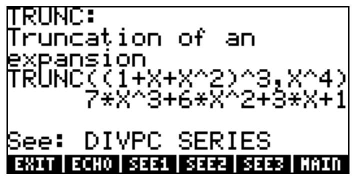
Estas funciones, exceptuando 0. MAIN MENU y 11.UNASSIGN, están disponibles en el menú ALG (⮣ ALG). La explicación detallada de estas funciones se puede encontrar en el capítulo 5. La función UNASSIGN se describe a continuación:



El sub-menú DIFF

El sub-menu de DIFF contiene las funciones siguientes:

Estas funciones están también disponibles con el sub-menú CALC/DIFF (comienze utilizando ⓵ CALC). Estas funciones se describen en los capítulos 13, 14, y 15, a excepción de la función TRUNC, que se describe a continuación:



El sub-menú MATHS

El menú MATHS se describe detalladamente en Apéndice J.

El sub-menú TRIGO

El sub-menú TRIGO contiene las siguientes funciones:

Estas funciones están también disponibles en el menú TRIG (⓶ TRIG). La descripción de estas funciones se incluye en el capítulo 5.

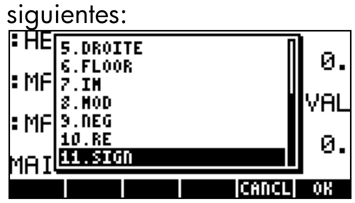
El sub-menú SOLVER

El menú SOLVER incluye las funciones siguientes:

Estas funciones están disponibles en el menú CALC/SOLVE (comenzar con ← CALC). Las funciones se describen en los capítulos 6, 11, y 16

El sub-menú de CMPLX

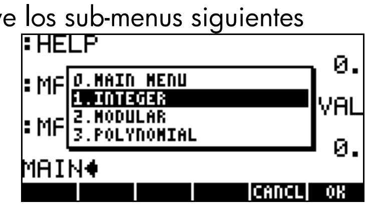
El menú de CMPLX incluye las funciones siguientes:



El menú de CMPLX está también disponible en el teclado (→ CMPLX). Algunas de las funciones en CMPLX están también disponibles en el menú de MTH/COMPLEX (comenzar con ← MTH). Las funciones de números complejos se presentan en el capítulo 4.

El sub-menu de ARIT

El menú de ARIT incluye los sub-menus siguientes



Los sub-menus, INTEGER, MODULAR, y POLYNOMIAL se presentan detalladamente en Apéndice J.

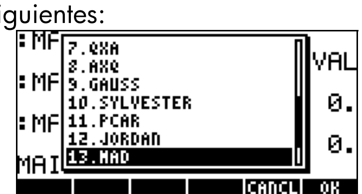
El sub-menú EXP&LN

El menú de EXP&LN contiene las funciones siguientes:

Este menú es también accesible a través del teclado usando EXP&LN . Las funciones en este menú se presentan en el capítulo 5.

El sub-menu MATR

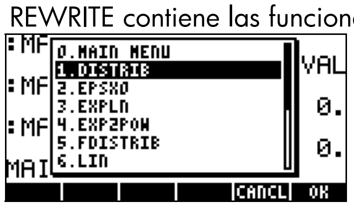
El menú MATR contiene las funciones siguientes:



Estas funciones están también disponibles a través del menú MATRICES en el teclado (MATRICES). Las funciones se describen en los capítulos 10 y 11.

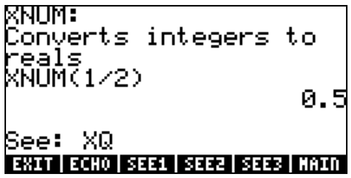
El sub-menú REWRITE

El menú REWRITE contiene las funciones siguientes:

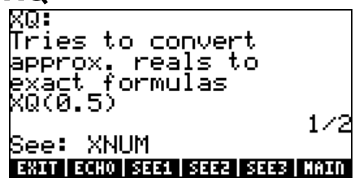


Estas funciones están disponibles a través del menú CONVERT/REWRITE (comenzar con ← CONVERT). Las funciones se presentan en el capítulo 5, a excepción de funciones XNUM y XQ, que se presentan a continuación utilizando la función informativa del CAS (TOOL NXT HELP):

XNUM



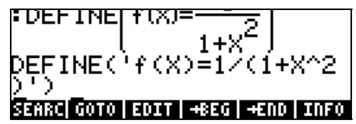
XQ

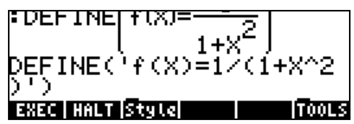


XNUM: convierte enteros a reales, ejemplo: XNUM(1/2) = 0.5
XQ: convierte reales aproximados a fórmulas exactas, ejemplo: XQ(0.5) = 1/2

Apéndice L
Funciones del editor de línea

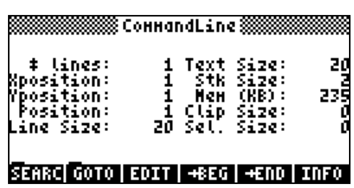
Cuando se activa el editor de línea utilizando ←▼, tanto en modo ALG como en modo RPN, se muestran las siguientes funciones (presiónese la tecla NXT para ver las funciones adicionales):





Las funciones son descritas, brevemente, a continuación:

←SKIP: Mueve el cursor al comienzo de una palabra.
SKIP→: Mueve el cursor al final de una palabra.
←DEL: Borra o elimina caracteres hasta el comienzo de una palabra.
DEL→: Borra o elimina caracteres hasta el final de una palabra.
DEL L: Borra o elimina todos los caracteres en la línea.
INS: Cuando está activa, esta función inserta caracteres en la posición del cursor. Si no está activa, el cursor reemplaza los caracteres en vez de insertarlos.
EDIT: Edita la selección.
→BEG: Mueve el cursor al comienzo de una palabra.
→END: Marca el final de una selección.
INFO: Provee información sobre el objeto a editarse, es decir,

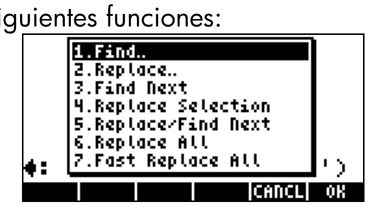


Los items que se muestran en la pantalla son fáciles de interpretar. Por ejemplo, "*X* and Y *positions*" (posiciones X y Y) indican la posición (X) en una línea y el número (Y) de la línea en el objeto a editarse. *Stk Size* (tamaño de la pantalla – stack) indica el número de objetos en el historial (pantalla) en modo ALG o en la pila (stack) en modo RPN. *Mem(KB)* indica la cantidad de memoria disponible. *Clip Size* indica el número de caracteres en reserva para copiar (clipboard). *Sel Size* indica el número de caracteres en la selección.

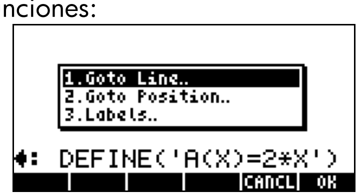
EXEC: Ejecutar función seleccionada.
HALT: Detener la ejecución de una función.

El editor de línea provee, así mismo, los siguientes sub-menús:

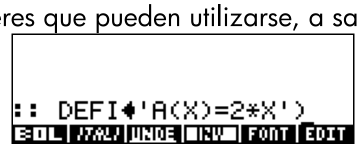
SEARCH: Búsqueda de caracteres o palabras en la línea de interés. Este sub-menú incluye las siguientes funciones:



GOTO: Mueve el cursor a una localidad predeterminada en la línea de interés. Move to a desired location in the command line. Este sub-menú incluye las siguientes funciones:



Style: Estilos de caracteres que pueden utilizarse, a saber:



El sub-menú SEARCH

Las funciones del sub-menú SEARCH son las siguientes:

Find : Se usa para localizar una cadena de caracteres en la línea. La forma interactiva que acompaña a esta función se muestra a continuación:

Replace: Se usa para localizar y reemplazar una cadena de caracteres. La forma interactiva que acompaña a esta función se muestra a continuación:

Find next..: Localiza caracteres definidos en *Find*.

Replace Selection: Reemplaza la selección con los caracteres definidos en *Replace*.

Replace/Find Next: Reemplaza una serie de caracteres y localiza la siguiente serie de los mismos. Los caracteres se definen con *Replace*.

Replace All: Reemplaza todas las instancias de una serie de caracteres. Esta función require de confirmación antes de reemplazar todas las instancias.

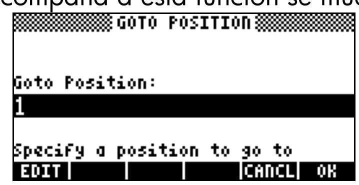
Fast Replace All: Reemplaza todas las instancias de una serie de caracteres sin requerir confirmación de parte del usuario.

El sub-menú GOTO

Las funciones del sub-menú GO TO son las siguientes:

Goto Line: to move to a specified line. La forma interactiva que acompaña a esta función se muestra a continuación::

Goto Position: Mueve el cursor a una posición específica en la línea. La forma interactiva que acompaña a esta función se muestra a continuación:



Labels: Mueve el cursor a un rótulo (label) específico en el objeto.

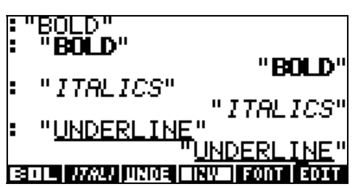
El sub-menú Style

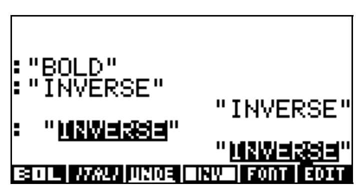
El sub-menú Style incluye los siguientes estilos de caracteres:

BOL: Bold (letra de molde)
ITALI: Italics (itálicas)
UNDE: Underline (subrayado)
INV : Inverse (colores invertidos)

La función FONT permite la selección del tamaño de los caracteres (font).

Ejemplos de los diferentes estilos se muestran a continuación:





Apéndice M
Índice alfabético

A

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W

X

Y

Z

Otros caracteres

Garantía Limitada

Período de garantía de hp 48gII calculadora gráfica: 12 meses.

1. HP le garantiza a usted, cliente usuario final, que el hardware HP, accesorios y complementos están libres de defectos en los materiales y mano de obra tras la fecha de compra, durante el período arriba especificado. Si HP recibe notificación sobre algún defecto durante el período de garantía, HP decidirá, a su propio juicio, si reparará o cambiará los productos que prueben estar defectuosos. El cambio de productos puede ser por otros nuevos o semi-nuevos.
2. HP le garantiza que el software HP no fallará en las instrucciones de programación tras la fecha de compra y durante el período arriba especificado, y estará libre de defectos en material y mano de obra al instalarlo y usarlo. Si HP recibe notificación sobre algún defecto durante el período de garantía, HP cambiará el software cuyas instrucciones de programación no funcionan debido a dichos defectos.
3. HP no garantiza que el funcionamiento de los productos HP será de manera ininterrumpida o estará libre de errores. Si HP no puede, dentro de un período de tiempo razonable, reparar o cambiar cualquier producto que esté en garantía, se le devolverá el importe del precio de compra tras la devolución inmediata del producto junto con el comprobante de compra.
4. Los productos HP pueden contener partes fabricadas de nuevo equivalentes a nuevas en su rendimiento o que puedan haber estado sujetas a un uso incidental.
5. La garantía no se aplica a defectos que resulten de (a) un mantenimiento o calibración inadecuados o inapropiados, (b) software, interfaces, partes o complementos no suministrados por HP, (c) modificación no autorizada o mal uso, (d) operación fuera de las especificaciones ambientales publicadas para el producto, o (e) preparación del lugar o mantenimiento inapropiados.
6. HP NO OFRECE OTRAS GARANTÍAS EXPRESAS O CONDICIONES YA SEAN POR ESCRITO U ORALES. SEGÚN LO ESTABLECIDO POR LAS LEYES LOCALES, CUALQUIER GARANTÍA IMPLÍCITA O CONDICIÓN DE MERCANTIBILIDAD, CALIDAD SATISFACTORIA O ARREGLO PARA UN PROPÓSITO PARTICULAR, ESTÁ LIMITADA A LA

DURACIÓN DE LA GARANTÍA EXPRESA ESTABLECIDA MÁS ARRIBA. Algunos países, estados o provincias no permiten limitaciones en la duración de una garantía implícita, por lo que la limitación o exclusión anterior podría no aplicarse a usted. Esta garantía podría también tener otro derechos legales específicos que varían de país a país, estado a estado o provincia a provincia.

7. SEGÚN LO ESTABLECIDO POR LAS LEYES LOCALES, LOS REMEDIOS DE ESTE COMUNICADO DE GARANTÍA SON ÚNICOS Y EXCLUSIVOS PRA USTED. EXCEPTO LO INDICADO ARRIBA, EN NINGÚN CASO HP O SUS PROVEEDORES SERÁN RESPONSABLES POR LA PÉRDIDA DE DATOS O POR DAÑOS DIRECTOS, ESPECIALES, INCIDENTALES, CONSECUENTES (INCLUYENDO LA PÉRDIDA DE BENEFICIOS O DATOS) U otros DAÑOS, BASADOS EN CONTRATOS, AGRAVIO ETCÉTERA. Algunos países, estados o provincias no permiten la exclusión o limitación de daños incidentales o consecuentes, por lo que la limitación o exclusión anterior puede que no se aplique a usted.
8. Las únicas garantías para los productos y servicios HP están expuestas en los comunicados expresos de garantía que acompañan a dichos productos y servicios. HP no se hará responsable por omisiones o por errores técnicos o editoriales contenidos aquí.

PARA LAS TRANSACCIONES DEL CLIENTE EN AUSTRALIA Y NUEVA ZELANDA: LOS TÉRMINOS DE GARANTÍA CONTENIDOS EN ESTE COMUNICADO, EXCEPTO LO PERMITIDO POR LA LEY, NO EXCLUYEN, RESTRINGEN O MODIFICAN LOS DERECHOS DE ESTATUTOS DE MANDATORIA APLICABLES A LA VENTA DE ESTE PRODUCTO PARA USTED Y SE AGREGAN A ELLOS.

Servicio

Europa

País:	Números de teléfono
Austria	+43-1-3602771203
Bélgica	+32-2-7126219
Dinamarca	+45-8-2332844
Países del este de Europa	+420-5-41422523
Finlandia	+35-89640009
Francia	+33-1-49939006
Alemania	+49-69-95307103

	Grecia	+420-5-41422523
	Holanda	+31-2-06545301
	Italia	+39-02-75419782
	Noruega	+47-63849309
	Portugal	+351-229570200
	España	+34-915-642095
	Suecia	+46-851992065
	Suiza	+41-1-4395358 (Grecia) +41-22-8278780 (Francia) +39-02-75419782 (Italia)
	Turquía	+420-5-41422523
	RU	+44-207-4580161
	República Checa	+420-5-41422523
	Sudáfrica	+27-11-2376200
	Luxemburgo	+32-2-7126219
	Otros países europeos	+420-5-41422523
Asia del Pacífico	**País :**	**Números de teléfono**
	Australia	+61-3-9841-5211
	Singapur	+61-3-9841-5211

América Latina	**País :**	**Números de teléfono**
	Argentina	0-810-555-5520
	Brasil	Sao Paulo3747-7799; RDP 0-800-1577751
	Méjico	Ciudad de Méjico 5258-9922; RDP 01-800-472-6684
	Venezuela	0800-4746-8368
	Chile	800-360999
	Colombia	9-800-114726
	Perú	0-800-10111
	América central y el Caribe	1-800-711-2884
	Guatemala	1-800-999-5105
	Puerto Rico	1-877-232-0589

Costa Rica	0-800-011-0524

Norteamérica

País :	**Números de teléfono**
EE.UU.	1800-HP INVENT
Canadá	(905)206-4663 or 800-HP INVENT

RDP=Resto del país

Conéctese a http://www.hp.com para conocer la información más reciente sobre servicio y soporte al cliente.

Información sobre normativas

Esta sección contiene información que muestra el cumplimiento de la normativa en ciertas regiones por parte de la calculadora gráfica hp 48gII. Todas las modificaciones aplicadas a la calculadora no aprobadas expresamente por Hewlett-Packard podrían invalidar la normativa aplicable a la calculadora 48gII en estas regiones.

USA

This calculator generates, uses, and can radiate radio frequency energy and may interfere with radio and television reception. The calculator complies with the limits for a Class B digital device, pursuant to Part 15 of the FCC Rules. These limits are designed to provide reasonable protection against harmful interference in a residential installation.
However, there is no guarantee that interference will not occur in a particular installation. In the unlikely event that there is interference to radio or television reception(which can be determined by turning the calculator off and on), the user is encouraged to try to correct the interference by one or more of the following measures:

- Reorient or relocate the receiving antenna.
- Relocate the calculator, with respect to the receiver.

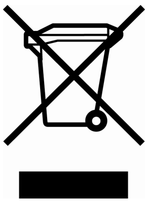
Connections to Peripheral Devices

To maintain compliance with FCC rules and regulations, use only the cable accessories provided.

Canada
This Class B digital apparatus complies with Canadian ICES-003. Cet appareil numerique de la classe B est conforme a la norme NMB-003 du Canada.

Japan
この装置は、情報処理装置等電波障害自主規制協議会(VCCI)の基準に基づく第二情報技術装置です。この装置は、家庭環境で使用することを目的としていますが、この装置がラジオやテレビジョン受信機に近接して使用されると、受信障害を引き起こすことがあります。
取扱説明書に従って正しい取り扱いをしてください。

Eliminación de residuos de equipos eléctricos y electrónicos por parte de usuarios particulares en la Unión Europea



Este símbolo en el producto o en su envase indica que no debe eliminarse junto con los desperdicios generales de la casa. Es responsabilidad del usuario eliminar los residuos de este tipo depositándolos en un "punto limpio" para el reciclado de residuos eléctricos y electrónicos. La recogida y el reciclado selectivos de los residuos de aparatos eléctricos en el momento de su eliminación contribuirá a conservar los recursos naturales y a garantizar el reciclado de estos residuos de forma que se proteja el medio ambiente y la salud. Para obtener más información sobre los puntos de recogida de residuos eléctricos y electrónicos para reciclado, póngase en contacto con su ayuntamiento, con el servicio de eliminación de residuos domésticos o con el establecimiento en el que adquirió el producto.